Lecture Notes in Mathematics
A collection of informal reports and seminars
Edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich

148

Robert Azencott
University of California, Berkeley / CA / USA

Espaces de Poisson des Groupes Localement Compacts

Springer-Verlag
Berlin · Heidelberg · New York 1970

Title No. 3305

Offsetdruck: Julius Beltz, Weinheim/Bergstr.

PREFACE

Les résultats présentés ici font le point d'un travail de recherche entrepris dans le cadre de la préparation d'un doctorat d'Etat sous la direction de J. Neveu. L'intérêt amical avec lequel J. Neveu a suivi notre travail a été pour nous un constant encouragement. Nous remercions J. Neveu et H. Furstenberg d'avoir patiemment relu les premières ébauches de nos démonstrations; leurs critiques et conseils nous ont été très utiles. Une première rédaction de l'ensemble de ce travail a été impitoyablement relue par P. Cartier et n'a pas survécu à cette épreuve; les nombreuses suggestions et les commentaires détaillés de P. Cartier ont permis de généraliser plusieurs résultats et de simplifier largement l'ensemble de l'exposé. Des conversations avec M. Duflo, P. Gérardin, R. Godement et C. Moore nous ont aidé à éclaircir quelques points de théorie des groupes. Nous tenons enfin à remercier D. Revuz avec qui nous avons souvent discuté les questions abordées ici.

R.G.A.

Paris, mai 1969

Berkeley, septembre 1969

TABLE DES MATIERES

0 INTRODUCTION

Soient G un groupe localement compact à base dénombrable, μ une mesure de probabilité sur G (mesure positive de masse 1 sur la tribu borélienne de G). Nous considérons l'équation fonctionnelle

$$(1) \qquad f(g) = \int_G f(gh)\, d\mu(h) \qquad (g \in G)$$

où f est une fonction borélienne sur G à valeurs réelles. Nous appelons fonctions μ - harmoniques les solutions boréliennes bornées de (1). Celles-ci ont été étudiées de facon approfondie par Furstenberg [8] dans le cas où G est un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini et où $\mu \ll m_G$, (m_G est la mesure de Haar sur G).

En généralisant une construction probabiliste dûe à Furstenberg, on obtient une représentation intégrale des fonctions μ - harmoniques, contenant comme cas particulier la formule de Poisson classique(qui représente les fonctions harmoniques bornées usuelles dans le disque unité, à partir de leurs valeurs sur le bord du disque). Soit H_μ l'espace de Banach des fonctions μ - harmoniques uniformément continues à gauche sur G (muni de la norme de la convergence uniforme). Pour tout entier $n \geq 0$, on note μ^n le produit de convolution de n mesures égales à μ. On prouve que si f, $f' \in H_\mu$, la limite

$$\lim_{n \to \infty} \int_G f(gh)\, f'(gh)\, d\mu^n(h)$$

existe pour tout $g \in G$ et définit une fonction de H_μ, notée $f \times f'$. L'espace H_μ muni de ce produit est une C*-algèbre. Le spectre Π_μ de cette C*-algèbre est appelé l'espace de Poisson de μ ; c'est un espace compact sur lequel G opère continûment. Si l'une au moins des puissances de convolution de μ n'est pas singulière par rapport à m_G, nous disons que μ est étalée sur G; lorsque μ est étalée, il existe une mesure de probabilité ν sur Π_μ (noyau de Poisson de μ) et une mesure quasi-invariante ε sur Π_μ telles que l'application j: $\hat{f} \to f = j(\hat{f})$ définie par

$$f(g) = j(\hat{f})(g) = \int_{\Pi_\mu} \hat{f}(gx)\, d\nu(x) \ , \quad (g \in G, \ \hat{f} \in L_\infty(\Pi_\mu , \varepsilon))$$

soit une isométrie de $L_\infty(\Pi_\mu , \varepsilon)$ sur l'espace de Banach de toutes les fonctions μ - harmoniques; par restriction, j définit une isométrie de $C(\Pi_\mu)$ (espace des fonctions continues sur Π_μ) sur H_μ. L'espace Π_μ et le noyau ν sont déterminés à isomorphisme près par cette dernière propriété.

Lorsque G est un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini, Furstenberg construit une famille finie $\underline{E}$ d'espaces homogènes de G telle que, pour tout $\mu \ll m_G$, l'espace Π_μ soit nécessairement isomorphe à un élément de $\underline{E}$. Nous précisons complètement la relation entre Π_μ et μ dans ce cas. Dans le cas général, nous démontrons que si μ_1 et μ_2 sont deux mesures étalées sur G telles que Π_{μ_1} et Π_{μ_2} soient des espaces homogènes de G, et telles que les semi-groupes fermés engendrés par les supports de μ_1 et μ_2 soient égaux, alors Π_{μ_1} et Π_{μ_2} sont isomorphes.

Nous disons qu'un groupe G est de type (T) si G est transitif sur Π_μ pour toute mesure de probabilité μ étalée sur G. La famille des groupes de type (T) contient donc celle des groupes de Lie connexes semi-simples de centre fini, et on montre qu'elle est stable par passage au quotient. L'étude de la marche aléatoire de loi μ sur G permet de caractériser certains sous-groupes du groupe des μ - périodes (périodes à droite des fonctions μ - harmoniques). Les classes de conjugaison compactes assez proches de l'unité, en particulier les petits sous-groupes compacts de G, et la composante connexe de l'unité dans le centre de G sont contenus dans le groupe des μ - périodes. On peut ainsi ramener l'étude des groupes localement compacts de type (T) à celle des groupes de Lie de type (T). Si G est un groupe de Lie de type (T) et si G_o est la composante connexe de l'unité dans G, nécessairement G/G_o est fini et G_o est de type (T).

Soit R un groupe de Lie connexe résoluble et soit $\underline{\underline{R}}$ l'algèbre de Lie de R ; alors R est de type (T) si et seulement si, quel que soit $X \in \underline{\underline{R}}$, les valeurs propres de $\mathrm{ad}(X)$ sont imaginaires pures. Soient maintenant G un groupe de Lie connexe, et R le radical de G (le plus grand sous-groupe connexe résoluble distingué de G). Si G est de type (T), nécessairement

R est de type (T), ainsi que G/R (qui est semi-simple et connexe). De plus, les espaces de Poisson des mesures étalées sur G sont isomorphes aux espaces de Poisson de G/R. Inversement, si R est de type (T) et si G/R est compact, le groupe G est de type (T). Ce résultat subsiste si on sait que R est compact et que G/R est de type (T). En particulier, si G est extension compacte d'un groupe nilpotent, G est de type (T).

Soient G un groupe de Lie de type (T) et Δ un opérateur différentiel elliptique, du second ordre, invariant à gauche sur G, et annulant les constantes. Soit $(\mu_t)_{t > 0}$ le semi-groupe de convolution sur G, de générateur infinitésimal Δ. Nous montrons que l'ensemble des fonctions μ_1 - harmoniques est identique à l'ensemble des solutions bornées f de classe 2 de $\Delta f = 0$.

Les relations entre frontière de Martin et espace de Poisson ne sont pas étudiées ici, mais nous aborderons cette question dans un prochain article. Signalons en particulier que si G est de type (T), et si μ est une mesure de probabilité sur G absolument continue par rapport à la mesure de Haar, l'espace de Poisson de μ est isomorphe à la partie active de la frontière de Martin associée à la marche aléatoire de loi μ sur G.

La plupart de nos résultats ont été résumés dans [2].