Densité des diffusions en temps petit : développements asymptotiques

Partie 1

par

Robert AZENCOTT

UER de Mathématiques
Université de Paris 7
2, Place Jussieu
75005 PARIS

ERA 070532 Statistique Appliquée
Université de Paris XI
Bâtiment 425 - Mathématique
91405 ORSAY Cedex

0. Introduction.

Sur $[0\,1] \times U$, avec U ouvert de $\mathbb{R}^m$, considérons la solution fondamentale positive minimale $p(s\,t\,x\,y)$ de l'opérateur parabolique

(1) $$L_{sx} = \partial_s + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i,j \leq m} a_{ij}(s,x)\, \partial_{x_i} \partial_{x_j} + \sum_{1 \leq i \leq m} b_i(s,x) \partial_{x_i}$$

qui vérifie donc $L_{sx}\, p(s\,t\,x\,y) \equiv 0$; on suppose $a = (a_{ij})$ et $b = (b_i)$ de classe C^{∞} *avec* $a(s,x)$ *définie positive* pour tout s, x. L'étude de $p(s\,t\,x\,y)$ quand $(t-s) \to 0$ est liée d'une part aux métriques riemanniennes $d_s(x,y)$ définies par les champs $x \to a(s,x)^{-1}$, et d'autre part aux développements asymptotiques du type W.K.B.

L'approche probabiliste du problème introduit la diffusion non homogène (x_t) sur U donnée par

(2) $$dx_t = \sigma(t,x_t)\, dw_t + b(t,x_t) dt$$

avec $\sigma\sigma^* \equiv a$, dont la densité de transition est $p(s\,t\,x\,y)$.

Dans le cas homogène en temps (où les coefficients a,b,σ ne dépendent pas du temps), on a $p(s\,t\,x\,y) \equiv \pi(t-s,x,y)$ et $d_s(x,y) \equiv d(x,y)$; dans ce cas, l'approche probabiliste a permis d'abord l'étude de $\lim\limits_{(t-s)\to 0} (t-s) \log \pi(t-s,x,y)$ par Varadhan [19], puis le calcul de l'équivalent

$$(3) \qquad \pi(t-s,x,y) \sim \alpha_0(x,y)(t-s)^{-\frac{m}{2}} \exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{2(t-s)}\right)$$

par Molchanov [16], précisé techniquement dans le Séminaire Paris 7 [17]. Quelques extensions de (3) à des situations hypoelliptiques très particulières ont été données par Gaveau [10] [11] pour des diffusions invariantes à gauche sur des groupes nilpotents et par Chaleyat-Morel-Elie [17] pour des diffusions gaussiennes.

Le calcul de développements asymptotiques du type

$$(4) \qquad \pi(t,x,y) = t^{-\frac{m}{2}} \exp\left(-\frac{d^2(x,y)}{2t}\right) (\alpha_0 + t\,\alpha_1 + \ldots + t^N \alpha_N + \text{Reste})$$

a été abordé par Kifer et Kanai ; dans [13] un calcul non probabiliste efficace mais plutôt formel de Kanai fournit le développement (4) et les équations aux dérivées partielles en cascade vérifiées par les $\alpha_j(x,y)$, sans donner d'estimation du reste ; dans [14] Kifer traite essentiellement des situations où a^{-1}, a, b et toutes leurs dérivées d'ordre N sont uniformément bornés sur U ; le calcul des coefficients α_i est très explicite, par contre un bon nombre d'estimations techniques cruciales sont données sans aucun détail de calcul ; l'utilisation de développements de Taylor stochastiques qui est l'un des aspects essentiels de notre méthode est d'ailleurs évitée explicitement par Kifer comme présentant "de réelles difficultés techniques".

Last but not least, un travail massif et tout récent de Bismut [8], preprint non disponible au moment ou nous rédigions ce travail, semble faire avancer largement la question et donne des calculs intrinsèques élégants.

Dans cet article, nous traitons complètement le cas de coefficients a,b non homogènes en temps, et localement elliptiques, à l'aide d'une technique qui s'est montrée efficace pour trois autres problèmes asymptotiques délicats du type W.K.B. (cf. Azencott [2] [4], Azencott-Doss [6]). Nous calculons ainsi le développement

$$(5) \qquad p(s\,t\,x\,y) = (t-s)^{-\frac{m}{2}} \exp\left(-\frac{d_s^2(x,y)}{2(t-s)}\right) [\alpha_0 + (t-s)\alpha_1 + \ldots + (t-s)^N \alpha_N + 0(t-s)^{N+1}].$$

La valeur en $(s\,x\,y)$ de chaque coefficient α_i ne dépend que d'un nombre fini de dérivées de a,b calculées aux points (s,z) où z décrit la géodésique minimisante joignant x à y pour la métrique d_s.

Nous obtenons des formules probabilistes du type

$$\alpha_i = E[e^{Q(Z^o)}\ P_{2i}(J_3 \ldots J_{2i+2})] \quad \text{pour} \quad i \geq 1$$

et $\alpha_o = E[e^{Q(Z^o)}]$ avec les notations suivantes :

- Q est somme d'une forme quadratique déterministe en (Z^o, dZ^o) et d'une forme affine déterministe en Z^o.
- Z^o est la trajectoire sur [0 1] du *pont* gaussien d'un processus gaussien explicite.
- les variables aléatoires numériques J_j s'obtiennent en résolvant un système en cascade d'équations d'Ito, ce qui se ramène à un nombre fini d'intégrations browniennes successives.
- les P_{2i} sont des polynômes universels à coefficients entiers.

Enfin nous donnons des estimations du reste $0(t-s)^{N+1}$ et des coefficients $|\alpha_i|$, qui sont *robustes* en σ, b, c'est-à-dire contrôlables (cf. § 2) pour des familles raisonnables de coefficients σ, b. L'ensemble de ces résultats ainsi que ceux de [2] [4] ont été annoncés à Oberwolfach [3], et plus sommairement au séminaire de Strasbourg-Grenoble 81.

Notre méthode a deux avantages : elles n'utilise aucun des résultats antérieurs [19] [16] [14], donc traite le problème "from scratch" ; elle manipule une technique simple et intuitive, qui procure très vite les résultats formels exacts, et nous semble désormais à spectre large d'application (cf. [2] [4] [6]). Il s'agit de *la méthode de Laplace sur l'espace* $\mathbb{R} \times \mathscr{C}$, où $\mathscr{C}$ est l'espace des chemins continus sur $[0\,1[$ à valeurs $\mathbb{R}^m$, *appliquée à des intégrales du type* $\int_\Omega \exp\left[\frac{F(\varepsilon, Z^\varepsilon_{[0\,1[})}{\varepsilon^2}\right] dP$ *quand* $\varepsilon \in \mathbb{R}$ *tend vers* 0 . Ici $F : \mathbb{R} \times \mathscr{C} \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle, (Ω, P) un espace de probabilité, Z_t, $0 \leq t < 1$ une diffusion à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, bâtie sur (Ω, P), paramétrée par ε, et $Z^\varepsilon_{[0\,1[}$ sa trajectoire globale.

La méthode de Laplace est systématiquement combinée avec *la formule de Girsanov Cameron-Martin qui permet de se restreindre aux trajectoires de* Z^ε *voisines de*

$\varphi \in \mathscr{C}$, *où* φ *s'obtient en minimisant une fonctionnelle d'action* λ *liée* au comportement asymptotique d'un système dynamique faiblement perturbé (cf. Varadhan [19] Ventsell-Freidlin [20] Azencott [1] [2]).

Le troisième ingrédient est le développement en puissances de ε, à coefficients semi martingales, et le contrôle précis du reste pour les diffusions paramétrées par ε : il s'agit de *la formule de Taylor stochastique* (cf. Malliavin [15] Bismut [7] Azencott [2]) et des *systèmes d'Ito en cascade* qui lui sont liés (cf. Azencott [2]).

La mise en oeuvre rigoureuse de ce programme, ainsi que *les estimations détaillées des restes*, demandent par contre des calculs longs et méticuleux. En effet Z^{ε} se trouve être *le pont* d'une diffusion X^{ε} démarrant en 0 au temps $t=0$, c'est-à-dire X^{ε} conditionné par $X_1^{\varepsilon} = 0$. Les coefficients de l'équation d'Ito de X sont des fonctions C^{∞} et bornées de (t,ε,x), mais ceux de Z^{ε} impliquent $\phi_t(\varepsilon,x) = \partial_x \log p^{\varepsilon}(t\,1\,x\,0)$ où p^{ε} est la densité de X^{ε} ; or ϕ est une fonction a priori désagréablement singulière quand $t \to 1$ et $x \to 0$, sans parler de la présence du paramètre ε.

Du point de vue technique *l'os du problème* est l'estimation efficace des $\partial_{\varepsilon}^{i}\, \partial_{x}^{j} \log p^{\varepsilon}(t\,1\,x\,0)$ quand $t \to 1$ et $x \to 0$, puis, ce qui ne manque pas de charme non plus, celle des moments du type $E|\partial_{\varepsilon}^{i}\, \partial_{x}^{j} \log p^{\varepsilon}(t\,1\,Z^{\varepsilon}0)|^{\alpha}$.

C'est pourquoi nous consacrons une partie non négligeable de ce travail à *l'étude quantitative systématique des ponts de diffusions non homogènes* (cf. § 5), ainsi qu'à d'indigestes calculs utilisant *la paramétrix* (cf. § A.2) *pour contrôler les* $\partial_{\varepsilon}^{i}\, \partial_{x}^{j} \log p\,(s\,t\,x\,y)$ *et les* $\partial_{\varepsilon}^{i}\, \partial_{x}^{j}\, p\,(s\,t\,x\,y)$, de façon *robuste* par rapport aux coefficients de X^{ε}.

Un autre noeud de difficultés est débrouillé aux § 7, 8, *le contrôle des moments des restes de Taylor stochastiques du développement de* Z^{ε}. Nous avons dû pour cela perfectionner et préciser au § A.1, th. A.1.8, *l'écriture formelle des systèmes d'Ito en cascade vérifiés par la suite des restes de Taylor stochastiques* (cf. [2]).

L'ensemble de méthodes rassemblées ici nous a permis, avec quelques aménagements inévitables, d'aborder sérieusement le cas où la diffusion initiale est seulement à coefficients hypoelliptiques (cf. [5]) (condition de Hörmander forte) malgré quelques problèmes techniques encore en suspens.

PLAN COMMENTÉ

1. Densité en temps petit : le modèle et les résultats qualitatifs essentiels.

2. Robustesse : Stabilité des "constantes" pour des familles de coefficients σ, b à rigidité et distorsion bornées.

3. Temps petit et systèmes dynamiques perturbés : passage de la diffusion initiale (x_t) au système perturbé $x_t^\varepsilon = x_{s+\varepsilon^2 t}$ avec s fixe et $\varepsilon \to 0$; fonctionnelle d'action λ du système x^ε.

4. Partie évanescente de la densité : la densité $\pi^\varepsilon(0\,1\,\xi\eta)$ de x^ε est scindée en $\pi^\varepsilon = [\pi^\varepsilon] + (\pi^\varepsilon - [\pi^\varepsilon])$ où $[\pi^\varepsilon]$ est la partie principale de π^ε quand $\varepsilon \to 0$ et $\frac{\pi^\varepsilon - [\pi^\varepsilon]}{\pi^\varepsilon}$ tend vers 0 à vitesse $\exp(-\frac{c^2}{\varepsilon^2})$.

5. Le pont d'une diffusion : étude systématique des familles de diffusions X conditionnées par $X_0 = X_1 = 0$.

6. Partie principale de la densité : on introduit la diffusion X^ε liée simplement à x^ε et à la géodésique f joignant ξ à η ; quand $\varepsilon \to 0$, $X^\varepsilon \to X^0$ gaussien ; on exprime $[\pi^\varepsilon]$ à partir du pont Z^ε de X^ε sous la forme

$$[\pi^\varepsilon] = E\, H(\varepsilon Z^\varepsilon) \exp\Big(-\frac{J_1(\varepsilon, Z^\varepsilon)}{\varepsilon^2}\Big) \quad \text{avec} \quad H \simeq 1 \quad \text{et} \quad dJ_t(\varepsilon, Z^\varepsilon) = \alpha(\varepsilon, Z^\varepsilon) dZ^\varepsilon + \beta(\varepsilon, Z^\varepsilon) dt,$$

où α, β sont des fonctions explicites simples des coefficients σ, b.

7. Le premier terme de la partie principale : on montre que $[\pi^\varepsilon] \sim \varepsilon^{-m} p^\varepsilon(0100) \exp(-\frac{d^2(x,y)}{\varepsilon^2})\, \phi(\varepsilon, \xi, \eta)$ où p^ε est la densité de X^ε, avec ϕ et $\frac{1}{\phi}$ bornés quand $\varepsilon \to 0$.

8. Développement de Taylor stochastique : écriture du système d'Ito en cascade vérifié par $z_i(t) = (\partial_\varepsilon^i Z_t^\varepsilon)_{\varepsilon=0}$ et $m_i(t) = (\partial_\varepsilon^i J_t(\varepsilon, Z^\varepsilon))_{\varepsilon=0}$; estimation des moments de $z_i(t)$ et $m_i(t)$ quand $t \to 1$.

9. Moments des restes de Taylor stochastiques : estimation des moments de $\hat{m}_{j+1}(\varepsilon,t)$, $\hat{z}_{j+1}(\varepsilon,t)$ définis par

$$Z^\varepsilon = z_0 + \varepsilon z_1 + \ldots + \varepsilon^j z_j + \varepsilon^{j+1} \hat{z}_{j+1}$$

$$J_t(\varepsilon, Z^\varepsilon) = m_0 + \varepsilon m_1 + \ldots + \varepsilon^j m_j + \varepsilon^{j+1} \hat{m}_{j+1}.$$

10. Développement asymptotique de la densité : avec $J_j \equiv m_j(1)$, on écrit $J_1(\varepsilon, Z^\varepsilon) = J_0 + \varepsilon^2 J_2 + \ldots + \varepsilon^{N+2} J_{N+2} + \varepsilon^{N+3} \hat{J}_{N+3}$ et on développe rigoureusement $[\pi^\varepsilon]$ à l'aide des formules

$$E\left[e^{-\frac{J_1(\varepsilon,Z^\varepsilon)}{\varepsilon^2}}\right] = e^{-\frac{J_0}{\varepsilon^2}} E\left[e^{-J_2}(1 - \varepsilon J_3 + \ldots + \varepsilon^k P_k(J_3 \ldots J_{k+2}) + \ldots)\right]$$

$$p_0 + \varepsilon p_1 + \ldots + \varepsilon^k p_k + \ldots$$ où les P_k sont des polynômes universels et les p_k des nombres calculables explicitement ; d'où

$$[\pi^\varepsilon] \sim [\varepsilon^{-m} \exp(- \frac{d^2(\xi,\eta)}{2\varepsilon^2})] \, [\mu_0 + \varepsilon\mu_1 + \ldots] \, [p_0 + \varepsilon p_1 + \ldots]$$

avec $\mu_j = E[e^{-J_2} P_j(J_3 \ldots J_{j+2})]$; on montre que μ_{2j+1} et p_{2j+1} sont nuls, d'où finalement

$$\pi^\varepsilon = [\varepsilon^{-m} \exp(- \frac{d^2(\xi,\eta)}{2\varepsilon^2})] \, (\alpha_0 + \varepsilon^2\alpha_1 + \varepsilon^4\alpha_2 + \ldots).$$

APPENDICE.

A.1. Calcul formel des restes de Taylor : identités polynomiales pour formes multilinéaires et système en cascade pour les restes de Taylor stochastiques des équations d'Ito paramétrées.

A.2. Diffusions paramétrées : méthode de la paramétrix et estimations de $\partial_\varepsilon^i \, \partial_x^j \log p^\varepsilon(s\,t\,x\,y)$, $\partial_\varepsilon^i \partial_x^j \, p\,(s\,t\,x\,y)$, pour la densité p^ε de diffusions uniformément elliptiques liées au paramètre ε ; calcul explicite des $(\partial_\varepsilon^i \, p^\varepsilon)_{\varepsilon=0}$.

1. DENSITE DES DIFFUSIONS ELLIPTIQUES EN TEMPS PETIT : RESULTATS CENTRAUX.

1.1. La diffusion initiale : Sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^m$ considérons la diffusion x_t $0 \le t \le 1$, *non homogène dans le temps*, solution de l'équation stochastique d'Ito

$$(1) \qquad dx_t = \sigma(t,x_t)dw_t + b(t,x_t)dt$$

Le brownien w est k-dimensionnel ; les champs $b(t,x)$ $\sigma(t,x)$ sont supposés de classe C^∞ sur $[01] \times U$. La diffusion x_t est supposée *localement elliptique*, c'est-à-dire que les matrices

$$(2) \qquad a(t,x) = \sigma(t,x)\, \sigma^*(t,x)$$

sont inversibles pour tout $t,x \in [0,1] \times U$.

Appelons $\pi(s\,t\,x\,y)$ *la densité de transition de* (x_t). Le résultat essentiel de cet article est le théorème suivant.

1.2. Théorème : Soit (x_t) une diffusion sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^m$, à coefficients C^∞, localement elliptique, comme en 1.1. Appelons d_s la distance riemannienne associée à la métrique $a(s,x)^{-1}$. Alors pour tout $N \ge 0$ pour tout compact U_0 de U il existe $\tau > 0$ tel que pour

$$(3) \qquad \xi,\eta \in U_0,\ 0 \le s < t \le 1, |\xi-\eta| \le \tau, |t-s| \le \tau$$

la densité π de la diffusion (x_t) admette le développement suivant

$$(4) \quad \pi(st\,\xi\,\eta) = (t-s)^{-\frac{m}{2}} \left[\exp - \frac{d_s(\xi,\eta)^2}{2(t-s)}\right] [\alpha_0 + \alpha_1(t-s) + \ldots + \alpha_N(t-s)^N + 0(t-s)^{N+1}]$$

Les coefficients $\alpha_0,\ldots,\alpha_N$ sont des fonctions de $(s\,\xi\,\eta)$, explicitées plus bas, qui ne dépendent que de la d_s-géodésique f joignant ξ à η, et des valeurs des dérivées $\partial_t^i \partial_x^j$ de σ,b, $0 \le i+j \le N+2$ calculées en $(0,f_u)$ avec $0 \le u \le 1$.

Enfin il existe une constante C telle que sous l'hypothèse (3), on ait les bornes uniformes

(5) $$\sum_{i=0}^{N} |\alpha_i| \leq c \qquad \text{et} \qquad |O(t-s)^{N+1}| \leq c(t-s)^{N+1}$$

ce qui permet d'intégrer en η le développement (4) , sur les compacts bien entendu.

Preuve : Elle occupe essentiellement tout le reste de l'article. En raffinant les méthodes utilisées ici mais sans en changer l'esprit on peut obtenir le théorème suivant qui traite le cas où ξ,η sont "éloignés".

1.3. Théorème : *(points éloignés) :* Les hypothèses sont les mêmes qu'en 1.2. Considérons $s \in [01[$ et $\xi,\eta \in U$ non conjugués pour d_s tels que

(6) $$d_s(\xi,\eta) < d_s(\xi,\partial U) + d_s(\eta,\partial U)$$

(7) il existe une unique géodésique minimisante (pour d_s) allant de ξ à η.

Alors sous les hypothèses (6) (7), la densité $\pi(st\,\xi\,\eta)$ admet le développement asymptotique (4) valable quand $(t-s) \to 0$.

Preuve : Les compléments nécessaires aux ingrédients présentés dans cet article seront publiés dans [5] .

1.4. Robustesse : Les constantes τ et c qui contrôlent le développement asymptotique 1.2 restent stables lorsque les coefficients σ,b varient de façon adéquate. Cette propriété de robustesse est précisée par le théorème 2.4 après quelques définitions.

1.5. Calcul : Les expressions explicites (probabilistes) obtenues ci-dessous pour les coefficients α_j sont du type

$$\alpha_j = E(e^Q P_j)$$

où Q est une fonctionnelle quadratique explicite d'un pont gaussien, et les P_j des polynômes (universels) en un nombre fini de semi-martingales browniennes obtenues par résolution (explicite) d'un système d'équations d'Ito en cascade.

2. ROBUSTESSE

2.1. Translations dans le temps : Soit (x_t) la diffusion sur $U \in \mathbb{R}^m$ introduite en 1.1, et soit π sa densité de transition. Pour étudier quand $t \to 0$ le comportement de $\pi(v,v+t,\xi,\eta)$ où $v \in [01[$ et $\xi,\eta \in U$, remplaçons les coefficients σ,b par σ_v, b_v avec

(1) $$\sigma_v(t,x) = \sigma(v+t,x) \qquad \text{et} \qquad b_v(t,x) = b(v+t,x)$$

Ceci ramène à étudier la nouvelle densité $\pi_v(0\,t\,\xi\,\eta)$ associée à σ_v,b_v. Pour avoir des résultats stables quand $v \in [01[$ il nous faudra donc étudier d'emblée $\pi(0\,t\,\xi\,\eta)$ mais pour *une famille de diffusions*. Pour éviter des sur-paramétrages encombrants, et obtenir des résultats plus généraux introduisons une terminologie adéquate.

2.2. Rigidité et distorsion : Soient σ,b des coefficients comme en 1.1. Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des compacts de $[01] \times U$. Pour tout $K \in \mathcal{K}$, $n \in \mathbb{N}$ posons, *avec* $a = \sigma\sigma^*$

(2) $$\mathrm{rig}_n(\sigma,b|K) = \sum_{0 \leq i+j \leq n} (\| 1_K\, \partial_t^i \partial_x^j a \|_\infty + \| 1_K\, \partial_t^i \partial_x^j b \|_\infty$$

(3) $$\mathrm{dis}(\sigma|K) = \| 1_K a \|_\infty + \| 1_K a^{-1} \|_\infty$$

On définit ainsi sur $\mathcal{K}$ deux fonctions que nous appellerons *n-rigidité de* (σ,b) et *distorsion de* (σ,b) ; *la rigidité* de (σ,b) sera la fonction $(n,K) \to \mathrm{rig}_n(\sigma,b|K)$. *Nous dirons que* (σ,b) *est à n-rigidité et distorsion bornées lorsque* $\mathrm{rig}_n(\sigma,b|[01] \times U)$ et $\mathrm{dis}(\sigma|[01] \times U)$ *sont finis.* Ces deux nombres sont alors appelés *n-rigidité globale et distorsion globale.*

2.3. Robustesse : Nous introduirons sous peu une foule de "constantes" $c > 0$ qui sont en fait des fonctionnelles numériques de σ,b. Une telle constante c sera dite *robuste en* (σ,b) lorsqu'il existe n entier, K compact de $[01] \times U$, et une fonction continue $\varphi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tels que c et $1/c$ soient majorées par $\varphi(r,d)$ avec $r = \mathrm{rig}_n(\sigma,b|K)$, $d = \mathrm{dis}(\sigma|K)$. *Si* φ *ne dépend que de la distorsion (deuxième variable) alors* c *sera dite ultra robuste en* (σb).

Quand (σb) sont à distorsion et n-rigidité bornées on peut remplacer le compact K par $[01] \times U$ dans les deux dernières définitions et définir ainsi les constantes *robustes globales* et *ultra-robustes globales* ; notons que *ces deux propriétés n'impliquent pas la robustesse tout court.*

2.4. Théorème : Avec les hypothèses et notations du théorème 1.2, une fois fixé le compact U_0 de U qui doit contenir ξ, η, les constantes c et τ qui interviennent dans le théorème 1.2 sont robustes en σ,b .

Preuve : Elle est donnée au § 10.3.

2.5. Majorants usuels de la densité : Appelons *noyau gaussien* tout noyau du type suivant, avec $0 \leq s < t \leq 1$ et $x,y \in \mathbb{R}^m$

$$G(stxy) = c(t-s)^{-m/2} \exp(-\mu \frac{|x-y|^2}{t-s}) \tag{4}$$

où $c > 0$ et $\mu > 0$. Classiquement on a (cf. appendice A.2.3 et [9])

(5) lemme :

pour toute diffusion X sur $\mathbb{R}^m$, à distorsion et 2-rigidité bornées, la densité p de X est majorée par un noyau G du type (4) où μ (resp$^{\underline{t}}$ c) ne dépend que de la distorsion globale (resp$^{\underline{t}}$ des distorsion et 2-rigidité globales) de X .

Localisons ce résultat.

(6) lemme : Soit (x_t) $0 \leq t \leq 1$ une diffusion sur $U \subset \mathbb{R}^m$, localement elliptique, à coefficients σ,b de classe 2 sur $[01] \times U$; alors pour chaque compact K de U il existe un noyau gaussien G du type (4), avec c robuste et μ ultra-robuste en (σ,b), tel que la densité π^W du processus (x_t) tué à la sortie de W vérifie $\pi^W \leq G$ pour tout ouvert $W \subset K$.

En effet, fixons un voisinage compact L de K dans U. Soient des coefficients $\tilde{\sigma},\tilde{b}$ de classe 2 sur $[01] \times \mathbb{R}^m$ coïncidant avec σ,b sur $[01] \times K$; il existe une évidente constante universelle $c(L,U)$ telle que l'on puisse choisir $\tilde{\sigma},\tilde{b}$ vérifiant

$$(7) \qquad \begin{cases} \operatorname{dis}(\tilde{\sigma}|[0,1] \times \mathbb{R}^m) \leq 1+\operatorname{dis}(\sigma|[01] \times L) \\ \operatorname{rig}_2(\tilde{\sigma},\tilde{b}|[01] \times \mathbb{R}^m) \leq c(L,U)\ \operatorname{rig}_2(\sigma,b|[01] \times L) \end{cases}$$

Alors pour tout ouvert $W \subset K$ on a $\pi^W \leq \tilde{p}$ où $\tilde{p}$ est la densité de la diffusion $\tilde{X}$ de coefficients $\tilde{\sigma},\tilde{b}$; il suffit d'appliquer (5) à $\tilde{X}$ et de tenir compte de (7) pour conclure.

2.6. <u>Majorant usuel de la probabilité de sortie d'une boule</u> : Soit (x_t) une diffusion sur $U \subset \mathbb{R}^m$, à coefficients σ,b continus sur $[01] \times U$. Alors pour tout compact K de U il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que de la 0-rigidité $\operatorname{rig}_0(\sigma,b|[01] \times K)$ et vérifiant

$$(8) \qquad P_{s,\xi}\left(\sup_{s \leq u \leq t} |x_u - \xi| \geq R\right) \leq \frac{1}{c} \exp\left(-c\,\frac{R^2}{t-s}\right)$$

pour tout $0 \leq s < t \leq 1$, tout $\xi \in K$, et tout $R > 0$ tel que la boule W de centre ξ et rayon R soit dans K.

Ce résultat est classique (cf. [18]) sous des formes un peu moins précises. Renvoyant à ([2] prop. A.2) pour les détails.

3. TEMPS PETIT ET SYSTEME DYNAMIQUE PERTURBE

3.1. Changement de temps : Soit (x_t) la diffusion initiale sur $U \subset \mathbb{R}^m$, vérifiant 1.1. Pour étudier la densité $\pi(0\,u\,\xi\,\eta)$ quand $u \to 0$ *on pose* $\varepsilon = \sqrt{u}$ et on introduit (cf. [1] [19]) la famille ξ_t^ε $0 \leq t \leq 1$ de diffusions sur U définies par

(1) $$\xi_t^\varepsilon = x_{t\varepsilon^2} \qquad 0 \leq t \leq 1$$

Alors ξ^ε a même loi globale que la diffusion non homogène x_t^ε $0 \leq t \leq 1$ solution sur U de

(2) $$dx_t^\varepsilon = \varepsilon\sigma(\varepsilon^2 t,\ x_t^\varepsilon)dw_t + \varepsilon^2 b(\varepsilon^2 t, x_t^\varepsilon)dt$$

En particulier si $\pi^\varepsilon(s\,t\,x\,y)$ *est la densité de* x^ε , on a :

(3) $$\pi(0,\varepsilon^2,\xi,\eta) \equiv \pi^\varepsilon(0\,1\,\xi\,\eta)$$

Désormais nous étudierons $\pi^\varepsilon(0\,1\,\xi\,\eta)$ *à l'aide de (2)* .

3.2. Fonctionnelle d'action : Le système dynamique perturbé (2) a pour limite quand $\varepsilon \to 0$ le système déterministe trivial $dx_t^0 \equiv 0$. Les probabilités d'événements concernant la trajectoire globale x_{01}^ε ont, pour $\varepsilon \to 0$, un comportement contrôlé au premier ordre par une *fonctionnelle d'action (ou d'énergie)*

$$\lambda : C_\xi(01,U) \to [0,+\infty]$$

où $C_\xi(0t,U)$ est l'espace des fonctions continues sur $[0t]$ à valeurs dans U, valant ξ au temps 0.

Rappelons (cf. [20] [1] [17]) le calcul de λ . Soit $C_\xi^1(01,U)$ l'espace des $f \in C_\xi(01,U)$ telles que $f' \in L_2[01]$. *Alors* $\lambda(f)$ *vaut* $+\infty$ *si* $f \notin C_\xi^1(01,U)$; *lorsque* $f \in C_\xi^1(01,U)$ *on a, avec* $a = \sigma\sigma^*$.

(4) $$\lambda(f) = \frac{1}{2}\int_0^1 f_t'^{\,*}\, a(0,f_t)^{-1}\, f_t'\, dt$$

Pour toute partie A de $C_\xi(01,U)$ on pose

(5) $$\Lambda(A) = \inf_{f\in A} \lambda(f)$$

Alors pour une bonne classe d'ensembles A (cf. [1] [4]) la probabilité $P(x^\varepsilon_{01} \in A)$ est "de l'ordre de" $[\exp - \frac{\Lambda(A)}{\varepsilon^2}]$.

Appelons d *la distance riémannienne sur* U *associée à la métrique* $a(0,x)^{-1}$. Si $F_{\xi\eta}$ est l'ensemble des $g \in C_\xi(01,U)$ tels que $g_0 = \xi$, $g_1 = \eta$ on a (cf. [1] [17]) bien sûr

(6) $$\Lambda(F_{\xi\eta}) = \frac{1}{2} \inf [d^2(\xi,\eta),\ d^2(\xi,\partial U)]$$

et donc pour $d(\xi\eta) < d(\xi,\partial U)$

(7) $$\Lambda(F_{\xi\eta}) = \frac{1}{2} d^2(\xi,\eta) = \lambda(f)$$

où f est une géodésique minimisante joignant ξ à η. On s'attend donc (cf. [16] [17] [19]) à ce que $\log \pi^\varepsilon(0\,1\,\xi\eta)$ soit de l'ordre de $-\frac{1}{2\varepsilon^2} d^2(\xi,\eta)$ et à ce que les trajectoires voisines de f fournissent "l'essentiel" de $\pi^\varepsilon(0\,1\,\xi\eta)$ quand $\varepsilon \to 0$.

3.3. Robustesse et système perturbé : Imposons la condition

(8) $$\xi,\eta \in U_0 \text{ compact } \textit{fixé} \text{ de } U.$$

Notons $\sigma^\varepsilon(t,x) = \varepsilon\sigma(\varepsilon^2 t,x)$ et $b^\varepsilon(t,x) = \varepsilon^2\, b(\varepsilon^2 t,x)$ les coefficients de x^ε. Il existe trivialement des constantes universelles $C(n,K)$ telles que pour tout n entier, tout compact K de $[01] \times U$, tout $0 \leq \varepsilon \leq 1$ la distorsion et la rigidité de $\sigma^\varepsilon, b^\varepsilon$ soient contrôlées par

$$\mathrm{rig}_n(\sigma^\varepsilon,b^\varepsilon|K) \leq C(n\,K)\ \mathrm{rig}_n(\sigma,b|K)$$

Les "constantes" $c(\varepsilon)$ *liées à la seule rigidité de* $\sigma^\varepsilon,b^\varepsilon$ *sont donc remplaçables par des constantes* c *indépendantes de* ε *et liées à la seule rigidité de* σ,b.

En particulier 2.4 implique pour chaque compact L de U l'existence d'un noyau gaussien G du type (4) avec c robuste et μ ultra-robuste en σ,b tel que la densité π^ε_W du processus x^ε tué à la sortie de W vérifie

(9) $\qquad \Pi_W^{\varepsilon}(s,t,x,y) \leqq G(\varepsilon s,\varepsilon t,x,y)$ pour tout W ouvert de L, tout $\varepsilon \leqq 1$

De même 2.5 entraîne facilement, pour chaque compact L de U l'existence de $c > 0$ robuste en σ, b tel que

(10) $$P_{s,\xi}[\sup_{s \leq u \leq t} x_u^{\varepsilon} - \xi| \geq R] \leq \frac{1}{c} \exp(-c \frac{R^2}{\varepsilon^2(t-s)})$$

pour $0 \leq s < t \leq 1$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$, et $\xi \in K$, $R \geq 0$ tels que la boule de centre ξ et rayon R soit contenue dans L.

4. PARTIE EVANESCENTE DE LA DENSITE.

4.1. Partie principale et partie évanescente : Les trajectoires de x^ε voisines de la géodésique f joignant ξ à η fournissent l'essentiel de la probabilité d'atteindre η. Traduisons ce fait bien connu (cf. [16][17]) en termes de densité.

Soient (x_t) la diffusion initiale 1.1 sur $U \subset \mathbb{R}^m$, π sa densité, x^ε le système ε-perturbé associé (cf. 3.(2)) et π^ε sa densité. *Notons* χ *le volume de la boule unité de* $\mathbb{R}^m$ de sorte que

(1) $$\pi(0,\varepsilon^2,\xi,\eta)=\pi^\varepsilon(0\,1\,\xi\,\eta) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\chi r^m} P(|x_1^\varepsilon-\eta| \leq r)$$

où $x_0^\varepsilon \equiv \xi$ presque sûrement.

Donnons-nous un *niveau de troncature* $\rho > 0$ et une *fonctionnelle de troncature continue* $H : C_0(01,\mathbb{R}^m) \to [01]$ telle que $H(g) = 1$ pour $\|g\| \leq \rho$ et $H(g) = 0$ pour $\|g\| \geq 2\rho$. Appelons *partie principale de* $\pi(0,\varepsilon^2,\xi,\eta)$ *associée à la troncature* (ρ,H) *la quantité* $[\pi^\varepsilon]$ *définie par*

(2) $$[\pi^\varepsilon] = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\chi r^m} E[H(x^\varepsilon-f)\, 1_{|x_1^\varepsilon-\eta|\leq r}]$$

où f est la géodésique minimisante joignant ξ à η. Nous verrons en effet au § 6 que *cette limite existe* pour ρ assez petit fixé et est de l'ordre de $\varepsilon^{-m}\exp(-\frac{d^2(\xi,\eta)}{2\varepsilon^2})$. Appelons *partie évanescente de* $\pi(0,\varepsilon^2,\xi,\eta)$ la quantité $\pi^\varepsilon - [\pi^\varepsilon] = \pi(0,\varepsilon^2,\xi,\eta) - [\pi^\varepsilon] = \pi^\varepsilon(0\,1\,\xi\,\eta) - [\pi^\varepsilon]$ qui est (cf. plus bas) *négligeable* devant $[\pi^\varepsilon]$.

4.2. Estimation de la partie évanescente : Théorème : Soient (x_t) la diffusion initiale 1.1 de coefficients σ,b, x^ε le système perturbé associé, et π^ε la densité de x^ε. A tout niveau de troncature $\rho > 0$ associons (cf. 4.1) la partie évanescente $(\pi^\varepsilon - [\pi^\varepsilon])$ de π^ε. Pour chaque compact U_0 de U il existe alors des constantes ρ_0, $c > 0$ robustes en σ,b telles que pour tout $\rho \leq \rho_0$ on ait

$$(3) \qquad 0 \leq \pi^{\varepsilon} - [\pi^{\varepsilon}] \leq \frac{1}{c} \exp\left(- \frac{d^2(\xi,\eta) + c\rho^2}{2\varepsilon^2}\right)$$

pour $\xi,\eta \in U_0$, $0 \leq \varepsilon \leq \rho/8$, $|\xi-\eta| \leq c\rho$.

Preuve : Elle sera donné en 4.5 après étude des oscillations de x restreint par une condition sur x_1^{ε} .

4.3. Amplitude maximale conditionnée : Lemme : Soit X une diffusion non homogène dans le temps, à valeurs dans $U \cup \{\infty\}$. Soit ξ le point de départ de X. Posons

$$(4) \qquad M(s,t) = \sup_{s \leq u \leq t} |X_u - \xi|$$

Soient W_ν, $W_{2\nu}$ des boules de centre η et de rayons $\nu, 2\nu$ avec $0<r<\nu<2\nu<R$. Appelons $\tau(t)$ l'instant de première entrée de X dans W_ν après l'instant t, et $\theta(t)$ l'instant de première sortie de $W_{2\nu}$ après l'instant t. Définissons les probabilités suivantes (liées au processus X),

$$(5) \qquad \begin{cases} \alpha(t,x) = P_{t,x}\ [\tau(t)<1] \\ \beta(t,x) = P_{t,x}\ [M(t,\tau(t)) \geq R\ ;\ \tau(t)<1] \\ \gamma(t,x) = P_{t,x}\ [|\tilde{X}_1-\eta| \leq r] \end{cases}$$

où $\tilde{X}$ *est le processus* X *tué à l'instant* $\theta(t)$. Enfin posons

$$(6) \qquad \begin{cases} \bar{\alpha} = \sup \{\alpha(t,x) \mid 0 \leq t<1,\ x \in \partial W_{2\nu}\} \\ \bar{\beta} = \sup \{\beta(t,x) \mid 0 \leq t<1,\ x \in \partial W_{2\nu}\} \\ \bar{\gamma} = \sup \{\gamma(t,x) \mid 0 \leq t<1,\ x \in \partial W_{\nu}\} \end{cases}$$

Alors si $|\xi-\eta| + 2\nu < R$ et $0<r<R$, on a

$$(7) \qquad \phi(R) = P\{\sup_{0 \leq t \leq 1} |X_t-\xi| \geq R\ ;\ |X_1-\eta| \leq r\} \leq \frac{\bar{\gamma}\ \bar{\beta}}{(1-\bar{\alpha})^2}$$

Preuve : Définissons les instants d'oscillations successives

$$0 \leq \theta_1 \leq \tau_2 \leq \theta_2 \leq \ldots \leq \tau_n \leq \theta_n \leq \tau_{n+1} \leq \ldots$$

par $\theta_1 = \theta(o)$, $\theta_n = \theta(\tau_n)$, $\tau_{n+1} = \tau(\theta_n)$. Soit K le plus grand entier tel que $\tau_k<1$; l'événement $\{M(0,1) \geq R\ ;\ |X_1-\eta| \leq r\}$ implique $\{2 \leq K < \infty\}$. Pour K fini on a

$$M(\tau_K,1) \leq |\xi-\eta| + \nu \quad \text{et} \quad M(0,\theta_1) \leq |\xi-\eta| + 2\nu$$

Imposons la contrainte $|\xi-\eta| + 2\nu < R$ pour en déduire

$$\begin{cases} \phi(R) = P\,[M(\theta_1,\tau_k) \geq R;\ |X_1-\eta| \leq r] = \sum\limits_{k\geq 2} p_k & \text{avec} \\ p_k = P\,[M(\theta_1,\tau_k) \geq R;\ \tau_k < 1\ ;\ \theta_k > 1\ ;\ |X_1-\eta| \leq r] \end{cases}$$

La propriété de Markov au temps τ_k et la définition de $\bar{\gamma}$ donnent pour $k \geq 2$

$$p_k \leq \bar{\gamma}\ P(A_k) \quad \text{avec} \quad A_k = \{M(\theta_1,\tau_k) \geq R\ ;\ \tau_k < 1\}$$

Comme $M(\tau_k,\theta_k) \leq |\xi-\eta| + 2\nu < R$, l'événement A_{k+1} est inclus dans la réunion des deux événements

$$\{M(\theta_1,\tau_k)\geq R\ ;\ \tau_k<\theta_k<\tau_{k+1}<1\} \quad \text{et} \quad \{M(\theta_k,\tau_{k+1})\geq R\ ;\ \theta_k<\tau_{k+1}<1\}$$

La propriété de Markov au temps θ_k donne alors par (5) (6)

$$P(A_{k+1}) \leq E[1_{A_k}\ \alpha(\theta_k,X_{\theta_k})] + E[1_{\theta_k<1}\ \beta(\theta_k,X_{\theta_k})] \leq \bar{\alpha}\ P(A_k)+\bar{\beta}\ P(\theta_k<1)$$

pour $k \geq 2$; de même

$$P(\theta_{k+1}<1) \leq P(\theta_k<\tau_{k+1}<1) \leq \bar{\alpha}\ P(\theta_k<1) \qquad \text{pour } k \geq 1.$$

D'où par récurrence $P(\theta_k<1) \leq \bar{\alpha}^{\,k-1}$ puis

$$P(A_k) \leq \bar{\alpha}^{\,k-2}\ P(A_2)+(k-2)\ \bar{\alpha}^{\,k-1}\ \bar{\beta} \qquad \text{pour } k \geq 2$$

La propriété de Markov au temps θ_1 donne

$$P(A_2) = P\,[M(\theta_1,\tau_2) \geq R\ ;\ \tau_2 < 1] \leq \bar{\beta}$$

d'où $P(A_k) \leq (k-1)\ \bar{\alpha}^{\,k-2}\ \bar{\beta}$ et par sommation

$$\phi(R) \leq \sum_{k\geq 2} p_k \leq \bar{\gamma} \sum_{k\geq 2} P(A_k) \leq \frac{\bar{\gamma}\ \bar{\beta}}{(1-\bar{\alpha})^2}$$

4.4. <u>Application au système perturbé</u> x^ε : <u>Lemme</u> : Soit x_t le système perturbé associé à la diffusion initiale (x_t) vérifiant 1.1. Pour U_o compact de U donné, il existe une constante $c > 0$ robuste en σ,b telle que

(8) $$P_\xi\{\sup_{0\leq t\leq 1} |x_t^\varepsilon-\xi|\geq R\ ;\ |x_1^\varepsilon-\eta|\leq r\} \leq \frac{1}{c}\left(\frac{r}{\nu}\right)^m \exp\left(-c\,\frac{R^2}{\varepsilon^2}\right) \text{ pourvu que}$$

(9) $\xi,\eta\in U_0$, $0\leq\varepsilon\leq\nu$, $0<r<\nu<2\nu<R$, $|\xi-\eta|+2\nu<R$, $R+2\nu<\frac{1}{4}\,d(U_0,\partial U)$

Preuve : Il suffit d'appliquer 4.3 avec $X = x^\varepsilon$. Quand (9) est vraie, les $W_{2\nu}$ restent dans U_1 compact fixe de U_0. Le processus $\tilde{X}$ induit par x^ε sur $W_{2\nu}$ a donc une densité ψ^ε majorée comme en 3.(9).

A fortiori il existe c robuste tel que

$$\psi^\varepsilon(t\,1\,x\,\eta) \leq \frac{c}{|x-\eta|^m} \quad \text{pour} \quad 0\leq\varepsilon,t<1,\ x\in W_{2\nu},\eta\in U_0$$

La définition de $\gamma(t,x)$ et un calcul élémentaire fournissent alors c_1 robuste tel que pour tout r,ε on ait

$$\bar{\gamma} \leq c_1\left(\frac{r}{\nu}\right)^m$$

Pour $R+2\nu < \frac{1}{4}\,d(U_0,\partial U)$ les boules de centre $x\in\partial W_{2\nu}$ et de rayons ν ou R sont contenues dans U_1. D'après 2.6 , on a donc

$$\bar{\alpha} \leq \exp(-c_2\,\frac{\nu^2}{\varepsilon^2}) \quad \text{et} \quad \bar{\beta} \leq \exp(-c_2\,\frac{R^2}{\varepsilon^2})$$

avec $c_2 > 0$ robuste en ,b. Appliquons maintenant(7) après avoir imposé $\varepsilon\leq\nu$ ce qui garantit $\frac{1}{1-\bar{\alpha}} \leq \frac{1}{1-\exp(-c_2)} = c_3$ avec c_3 robuste ; on obtient immédiatement (8).

4.5. Preuve du théorème 4.2 : Gardons toutes les notations du § 4. La partie évanescente de la densité vérifie par construction

(10) $$\pi^\varepsilon-[\pi^\varepsilon] \leq \overline{\lim_{r\to 0}}\,\frac{1}{\chi r^m}\,P_\xi\{\sup_{0\leq t\leq 1}|x_t^\varepsilon-f_t|\geq\rho\ ;\ |x_1^\varepsilon-\eta|\leq r\}$$

Soit $R\leq\rho-d(\xi,\eta)$ et supposons (9) vérifiée. Alors (8) (10) impliquent immédiatement

$$\pi^\varepsilon-[\pi^\varepsilon] \leq \overline{\lim_{r\to 0}}\,\frac{1}{\chi r^m}\,P_\xi\{\sup_{0\leq t\leq 1}|x_t^\varepsilon-\xi|\geq R\ ;\ |x_1^\varepsilon-\eta|\leq r\} \leq \frac{1}{c}\,\nu^{-m}\exp(-c\,\frac{R^2}{\varepsilon^2})$$

Les choix $R = \frac{\rho}{2}$, $\nu = \frac{\rho}{8}$, $d(\xi,\eta)\leq\frac{\rho}{2}$, $|\xi-\eta| < \frac{\rho}{4}$, $\rho < \frac{1}{3}\,d(U_0,\partial U)$ vérifient bien (9) et la contrainte supplémentaire imposées trois lignes plus haut. D'où c_1, puis c_2 robustes telles que

$$\pi^\varepsilon-\pi^\varepsilon \leq c_1\rho^{-m}\exp(-c\,\frac{\rho^2}{4\varepsilon^2}) \leq c_2\exp(-c\,\frac{\rho^2}{8\varepsilon^2}) \quad \text{pour } \varepsilon\leq\rho/8$$

Si on impose $d(\xi,\eta) \leq \frac{1}{10}\rho\sqrt{c}$ on aura a fortiori

$$\pi^{\varepsilon}-[\pi^{\varepsilon}] \leq c_3 \exp \left[-\frac{d^2(\xi,\eta)}{2\varepsilon^2} - \frac{c\,\rho^2}{10\varepsilon^2}\right] \quad \text{pour} \quad \varepsilon \leq \rho/8$$

d'où le théorème 4.2.

4.6. Oscillations conditionnées des diffusions uniformément elliptiques:

Corollaire :

Soit X_t une diffusion sur $\mathbb{R}^m$, non homogène en t, à coefficients S,B de distorsion et 2-rigidité bornées, de point initial 0. Alors il existe une constante $c > 0$ robuste globale en S,B telle que

$$(11) \qquad P\{\sup_{0\leq t\leq 1} |X_t|\geq R \; ; \; |X_1|\leq r\} \leq \frac{1}{c}\, r^m \exp(-c\, R^2)$$

pour tout r,R tels que $0\leq r<1$ et $R>2$.

Preuve : Il suffit de recopier mot pour mot la preuve de 4.4 avec $\xi = \eta = 0$, $\nu = 1$, $U_1 = W_2$, $U_o = W_1$, $d(U_o,\partial U) = +\infty$ et $\varepsilon=1$. L'estimation (8) coïncide alors aux notations près avec (11)

5. LE PONT D'UNE DIFFUSION

5.1. De l'utilité des ponts : La partie principale $[\pi^\varepsilon]$ de la densité $\pi^\varepsilon(0\,1\,\pi\,\eta)$ fait bien sûr intervenir un conditionnement par $x_1^\varepsilon=\eta$. A cet effet, nous introduisons pour calculer $[\pi^\varepsilon]$ une famille de diffusions X^ε de point initial 0 liées simplement au système perturbé x^ε et les ponts Z^ε des X^ε ,i.e. les diffusions X^ε conditionnées par $X_1^\varepsilon = 0$.

Après une localisation convenable, les X^ε seront à distorsion et rigidité bornées sur $\mathbb{R}^m$. *Ce paragraphe, complètement indépendant du corps de l'article*, regroupe des estimations précises concernant des familles de ponts. Il est donc suggéré en première lecture d'ignorer largement les détails des calculs du § 5 dont certains sont sûrement dispersés dans la littérature existante (cf. [8] par exemple).

Toutes les diffusions en vue sont a priori non homogènes dans le temps ce que nos notations camouflent le plus possible *en reléguant le temps* t *en indice, indice qui reste muet* (i.e. absent !) dans la plupart des équations d'Ito, intégrales, etc...

5.2. La diffusion de base : Sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^m$ considérons la diffusion X_t, $0\leq t\leq 1$, *non homogène en* t, solution de l'équation d'Ito

(1) $$dX = S(X)dw + B(X)dt$$

Les champs $B_t(x)$ et $S_t(x)$ sont supposés C^∞ sur $[0 1] \times U$. De plus $A = SS^*$ est supposée *inversible* et nous posons $\Gamma = A^{-1} = (SS^*)^{-1}$.

Le générateur infinitésimal L_{sx} de X est l'opérateur parabolique

(2) $$L_{sx} = \partial_s + \frac{1}{2} \sum_{i,j} A_s^{ij}(x)\, \partial_{x_i} \partial_{x_j} + \sum_i B_s^i(x)\, \partial_{x_i}$$

Le processus X admet classiquement une densité $p(s\,t\,x\,y) > 0$ analytique en s,x , solution fondamentale minimale de

(3) $$L_{sx}\, p(s\,t\,x\,y) = 0 \qquad 0\leq s<t\leq 1 \quad ; \quad x,y \in U$$

Pour toute fonction $u : U \to \mathbb{R}^+$ borélienne, la fonction

$$v(s,x) = \int_U p(s\,t\,x\,y)\; u(y)dy$$

est analytique sur $]0t[\times U$ si et seulement si elle est partout finie ; elle vérifie alors

(4) $$L_{sx}\, v(s,x) = 0 \qquad \text{pour} \quad 0\leq s<t,\ x \in U$$

Enfin si u est continue à support compact, on a

(5) $$\lim_{s\uparrow t} v(s,x) = u(x) \qquad \text{pour} \quad x \in U$$

En particulier soit $h(s,x)$ une fonction borélienne positive finie telle que pour $0\leq s<t<1$, $x \in U$

$$h(s,x) = \int_U p(s\,t\,x\,y)\; h(t,y)dy$$

(fonction X-invariante, ou encore parabolique selon Doob).

D'après ce qui précède on voit que

(6) $$\begin{cases} & h \text{ est analytique sur }]01[\times U \\ \text{et} & L_{sx}\, h(s,x) \equiv 0 \quad \text{sur } [01[\times U \end{cases}$$

Noter l'exclusion du temps 1.

5.3. Diffusion relativisée par une fonction invariante : Théorème :
Soit X une diffusion non homogène comme en 5.2, et $h(s,x) > 0$ une fonction invariante pour X. Pour $0\leq s<1$ considérons le *drift complémentaire* V_s défini par

(7) $$V_s(x) = A_s(x)\, \partial_x \log h(s,x) \qquad 0\leq s<1, \quad x \in U$$

et la diffusion Y_t, $0\leq t<1$ solution sur U de l'équation d'Ito

(8) $$dY = S(Y)dw + [B(Y) + V(Y)]dt$$

Alors Y_t n'explose pas pour $0\leq t<1$, et sa densité de transition q vaut

(9) $$q(s\,t\,x\,y) = \frac{1}{h(s,x)}\, p(s\,t\,x\,y)\; h(t,y)$$

De plus pour toute fonctionnelle borélienne positive

$$\phi : C\,(0\,t\,,U) \to \mathbb{R}^+$$

on a *pour* $t < 1$ et $X_0 \equiv x$,

(10) $$E\,[\phi(Y_{0t})] = \frac{1}{h(0,x)}\,E\,[\phi(X_{0t})\;h(t,X_t)]$$

On dit que Y *est la diffusion relativisée de* X *par* h *; noter que* Y_1 *n'est pas défini a priori.*

Preuve : (classique). L'existence et la continuité de la solution Y_t de (8) sur $0 \le t < \zeta$ résultent de la régularité des coefficients, en notant ζ le temps d'explosion de Y. D'autre part la fonction q *définie* par (9) vérifie clairement

(11) $$\int q(s\,t\,x\,y)\,dy \equiv 1 \qquad \text{pour} \quad 0 \le s < t < 1$$

ce qui, avec (5) montre que pour f continue à support compact

(12) $$\lim_{s \uparrow t} \int_U q(s\,t\,x\,y)\;\; f(y)dy = f(x) \qquad \text{pour} \quad x \in U$$

Enfin un calcul banal basé sur (2)(3)(6)(9) montre que pour $0 \le s < t < 1$ et $x, y \in U$

(13) $$[L_{sx} + V_s(x)\;\partial_x]\;q(s\,t\,x\,y) \;=\; 0$$

Mais d'après (3)(7), l'opérateur $L_{sx} + V_s(x)\;\partial_x$ n'est autre que le générateur infinitésimal de Y. De (11)(12)(13) on conclut que q est bien la densité de Y, et ensuite au vu de (11), que Y n'explose pas sur $[01[$.

Enfin (10) se déduit de façon standard de (9), en traitant d'abord le cas élémentaire où ϕ ne dépend que d'un nombre fini de coordonnées.

5.4. Diffusions conditionnées : Soit W un ouvert relativement compact de U. *La diffusion conditionnée de* X *par* $\{X_1 \in W\}$ *est la diffusion* Y^W *relativisée de* X *par* h_W *où,* p *étant la densité de* X*, et* $|W|$ *le volume de* W,

(14) $$h_W(s,x) \;=\; \frac{1}{|W|}\int_W p(s\,1\,x\,y)\,dy \qquad ,$$

terminologie justiée par (10). Pour $z \in U$ donné, la diffusion conditionnée de X par $\{X_1 = z\}$ est la diffusion relativisée de X par h où

(15) $$h(s,x) = p(s\,1\,x\,y)$$

5.5. Les ponts d'une diffusion : Supposons $X_0 \equiv 0$. Appelons *pont* Z *de* X *la diffusion conditionnée de* X *par* $\{X_1=0\}$. *Les ponts approchés* Y^r, $0<r$, *seront les diffusions conditionnées de* X *par* $\{|X_1| \leq r\}$. Nous adopterons *la convention* $Y^0 \equiv Z$, et nous poserons

(16) $$h_r(s,x) = \frac{1}{\chi r^m} \int_{|y|\leq r} p(s\,1\,x\,y)\,dy \quad ; \quad h_0(s,x) = p(s\,1\,x\,0)$$

où χ = volume de la boule unité de $\mathbb{R}^m$; le drift de Y^r s'écrit $B+V^r$ avec (cf. (7))

(17) $$V^r_s(x) = A_s(x)\,\partial_x \log h_r(s,x)$$

5.6. Hypothèses globales : *Jusqu'à la fin du § 5 supposons désormais* $X_0 \equiv 0$, $U \equiv \mathbb{R}^m$, *et les coefficients* S,B *de* X *à distorsion et 2-rigidités bornées.* Il existe alors (cf. appendice A.2.2 et A.2.3, ou [9]) un noyau gaussien G du type 2.(4) avec c robuste globale et μ ultra-robuste globale en S,B, tel que en tout point $(s\,t\,x\,y)$

(18) $$p(s\,t\,x\,y) \leq G(s\,t\,x\,y) \quad \text{et} \quad |\partial_x\, p(s\,t\,x\,y)| \leq (t-s)^{-1/2}\, G(s\,t\,x\,y)$$

Désormais, *les constantes* $(c, c_1, c_2, \ldots)$ et $(\mu, \mu_1, \mu_2 \ldots)$ *introduites jusqu'à la fin du § 5 sont resp$\underline{t}$ robustes globales et ultra-robustes globales en* S,B.

La constante c_0, définie par

$$c_0 = \inf_{|x|\leq 1} p(0\,1\,0\,x) > 0$$

a un statut particulier ; d'après (18) c_0 *est majorée par une constante robuste globale.* Plus bas nous verrons, justement à l'aide du théorème 7.5 que c_0 est aussi minorée par une constante robuste globale, donc est en fait robuste globale. *Mais nous n'utiliserons pas ce fait avant d'avoir obtenu* la minoration robuste globale adéquate de $p(s\,t\,x\,y)$.

5.7. Lemme : (hypothèses et notations 5.5, 5.6). Il existe une constante c_1 robuste globale en S,B telle que pour tout $t < 1$, toute fonctionnelle borélienne $F : C(0\,t\,,\ \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^\ell$, tout $0\leq r\leq 1$ on ait

(19) $$E[|F(Y^r_{0t})|\,|V_t(Y^r_t)|] \leq \frac{c_1}{c_o}(1-t)^{-3/4}\,\|F(X_{0t})\|_{2m}$$

(20) $$E[|F(Y^r_{0t})|] \leq \frac{c_1}{c_o}(1-t)^{-1/4}\,\|F(X_{0t})\|_{2m}$$

Preuve : Soit $\nu > 1$. D'après (18), $[p(s\,1\,x\,y)]^{\nu}$ et $|(1-s)^{1/2}\,\partial_x p(s\,1\,x\,y)|^{\nu}$ sont majorées par $c^{\nu}(1-s)^{-m\,\nu/2}\exp(-\mu\nu\frac{|x-y|^2}{1-s})$; la majoration $p \leq G$ donne a fortiori $p(0\,s\,0\,x) \leq c\,s^{-m/2}\exp(-\mu\nu\frac{|x|^2}{s})$ d'où

$$E\exp(-\mu\nu\frac{|X_s-y|^2}{1-s}) \leq c\,s^{-\frac{m}{2}}\int_{\mathbb{R}^m}\exp[-u\nu(\frac{|x|^2}{s}+\frac{|x-y|^2}{1-s})]\,dx$$

$$= (\frac{2\pi}{\mu\nu})^{\frac{m}{2}}\,c(1-s)^{\frac{m}{2}}\exp(-\mu\nu|y|^2)$$

et par suite la majoration

(21) $$\|p(s\,1\,X_s\,y)\|_{\nu} + \|(1-s)^{\frac{1}{2}}\,\partial_x p(s\,1\,X_s\,y)\|_{\nu} \leq c_1(1-s)^{\frac{m(1-\nu)}{2\nu}}\exp(-\mu|y|^2)$$

avec c_1 robuste globale. Prenons $\nu = 1+\frac{1}{2m-1}$ pour avoir $\frac{m(1-\nu)}{2\nu} = -\frac{1}{4}$. La définition (16) donne alors pour $r > 0$, $0 \leq s < 1$,

(22) $$\|h_r(s,X_s)\|_{\nu} \leq \frac{1}{\chi r^m}\int\|p(s\,1\,X_s\,y)\|_{\nu}\,dy \leq c_1(1-s)^{-1/4}$$

(23) $$\|\partial_x h_r(s,X_s)\|_{\nu} \leq \frac{1}{\chi r^m}\int\|\partial_x p(s\,1\,X_s\,y)\|_{\nu}\,dy \leq c_1(1-s)^{-3/4}$$

relations vraies aussi pour $r=0$ d'après (18)(17)

D'après (10)(17) on a

$$h_r(0,0)\;E[|F(Y^r_{0t})|\;\;|V_t(Y^r_t)|] = E[|F(X_{0t})|\;\;|V^r_t(X_t)|h_r(t,X_t)]$$
$$\leq \|A\|_{\infty}\;E[|F(X_{0t})|\;\;|\partial_x h_r(t,X_t)]$$

On majore le 2[nd] membre par l'inégalité de Hölder car $\frac{1}{\nu}+\frac{1}{2m} = 1$ et on utilise (23) ainsi que la minoration évidente $h_r(0,0) \geq c_o$ pour $0 \leq r \leq 1$, pour obtenir (19). De même par (10)(22) on obtient pour $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq t < 1$,

$$E[|F(Y^r_{0t})|] \leq \frac{1}{h_r(0,0)}\,\|h_r(t,X_t)\|_{\nu}\;\|F(X_{0t})\|_{2m} \leq \frac{c_1}{c_o}(1-t)^{-\frac{1}{4}}\,\|F(X_{0t})\|_{2m}$$

5.8. Moments exponentiels du pont : Lemme : Soit X une diffusion comme en 5.6 et Z le pont de X. Alors il existe des constantes c_2, $\mu_1 > 0$ resp^{t} robuste et ultra-robuste globales en S,B telles que, avec c_0 comme en 5.6,

$$E\left[\exp\left(\mu_1 \frac{|Z_t|^2}{1-t}\right)\right] \leq \frac{c_2}{c_0} \qquad 0 \leq t < 1 \tag{24}$$

En particulier on a

$$E|Z_t|^{2n} \leq \frac{n!}{\mu_1^n} \frac{c_2}{c_0} (1-t)^n \qquad \text{pour } 0 \leq t < 1,\ n \geq 0 \tag{25}$$

Preuve : La densité $q(0\,t\,0\,z)$ de la v.a. Z_t, explicitée par (9) admet grâce à (18) la majoration

$$q(0\,t\,0\,z) = \frac{p(0\,t\,0\,z)\ p(t\,1\,z\,0)}{p(0\,1\,0\,0)} \leq \frac{c^2}{c_0} (1-t)^{-\frac{m}{2}}\, t^{-\frac{m}{2}} \exp\left(-\mu \frac{|z|^2}{t(1-t)}\right) \tag{26}$$

D'où la validité de (24) pour $\mu_1 = \frac{1}{2}\mu$.

5.9. Convergence des ponts approchés : Théorème : Soit X une diffusion sur $\mathbb{R}^m$ comme en 5.6. Soient $Z \equiv Y^0$ le pont de X et Y^r, $r>0$, les ponts approchés de X. Alors P-p.s. les limites $Z_1 = \lim\limits_{t\to 1} Z_t$ et $Y_1^r = \lim\limits_{t\to 1} Y_t^r$ existent, et on a $Z_1 = 0$. De plus quand $r \to 0$ les lois des Y^r convergent étroitement sur $C(01, \mathbb{R}^m)$ vers la loi de $Y^0 \equiv Z$.

Preuve : D'après (19) le drift complémentaire V^r de Y^r vérifie $E\,|V_t^r(Y_t^r)| \leq \frac{c_1}{c_0} (1-t)^{-3/4}$, d'où par l'inégalité de Hölder, pour $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq s \leq t \leq 1$,

$$E\left[\int_s^t |V_u^r(Y_u^r)|\,du\right] \leq \frac{8c_1}{c_0} (t-s)^{1/7} \tag{27}$$

Puisque

$$dY^r = S(Y^r)dw + [B(Y^r) + V^r(Y^r)]dt \tag{28}$$

avec S,B *bornés*, (27) implique que les limites $Y_1^r = \lim\limits_{t\to 1} Y_t^r$ existent P-p.s. pour tout $r \geq 0$ et que tous les Y^r, $r \geq 0$, ont un même "module de continuité en probabilité". Ainsi les lois Q^r des Y^r forment sur $C(01, \mathbb{R}^m)$ une famille relativement compacte pour la convergence étroite.

Quand $r \to 0$ les coefficients de dY^r convergent vers ceux de dY^0, uniformément sur les compacts de $[01[\times \mathbb{R}^m$; ceci suffit classiquement à identifier toute loi limite des Q^r avec la loi Q^0. D'où la convergence étroite de Q^r vers Q^0. Enfin (25) implique que $Z_1 = 0$, P-p.s.

5.10. Moments exponentiels des ponts : Théorème : Soit X une diffusion comme en 5.6 ; soient $Z \equiv Y^0$ le pont de X et Y^r, $r>0$ les ponts approchés. Alors il existe des constantes c_3, $\tau>0$ robustes globales en S,B telles que pour tout $r \in [0\,1]$, Y^r vérifie, avec c_0 comme en 5.6,

$$(29) \qquad E\left[\exp \tau \int_0^1 |Y_t^r|^2 dt\right] \leq \frac{c_3}{c_0}$$

et quelle que soit la fonction φ borélienne sur $[01] \times \mathbb{R}^m$ à valeurs matricielles $(1,m)$

$$(30) \qquad \begin{cases} E\left[\exp \tau \left|\int_0^1 \varphi_t(Y_t^r) dY_t^r\right|\right] \leq \dfrac{c_3}{c_0} & \text{pourvu que } \varphi_t(z) \leq z \text{ partout} \\ E\left[\exp \tau \left|\int_0^1 \varphi_t(Y_t^r) dY_t^r\right|^2\right] \leq \dfrac{c_3}{c_0} & \text{pourvu que } \varphi_t(z) \leq 1 \text{ partout} \end{cases}$$

Preuve : Pour alléger l'écriture, fixons $r \in [01]$, $Y \equiv Y^r$, et $h \equiv h_r$. *Toutes les constantes ci-dessous sont indépendantes de* r. De (20) on tire pour $0<\alpha\leq\mu/4m$,

$$(31) \qquad E\,(\exp \alpha\, |Y_t|^2) \leq \frac{c_1}{c_0}\,(1-t)^{-1/4}\, \|\exp\alpha |X_t|^2\|_{2m} \leq \frac{c_4}{c_0}\,(1-t)^{-1/4}$$

avec c_4 robuste globale, car la densité de X_t est majorée par $G(0\,t\,0\,x)$ d'après (18). D'où

$$E\left[\exp \int_0^1 \alpha\, |Y_t|^2 dt\right] \leq E\left[\int_0^1 (\exp \alpha\, |Y_t|^2) dt\right] \leq \frac{c_4}{c_0} \int_0^1 (1-t)^{-1/4} dt \leq \frac{2c_4}{c_0}$$

ce qui prouve (29).

Le lemme 5.7, l'existence pour Y_t de moments de tous ordres intégrables en t d'après (31), et l'expression (28) de dY montrent que $\int_0^t \varphi(Y)\, dY$ est bien définie, p.s. convergente quand $t \to 1$, et admet des moments de tous ordres pour $0\leq t\leq 1$ lorsque $\varphi_s(z)$ reste majoré par un polynôme fixe en $|z|$, à coefficients constants.

Pour ϕ,ψ semi-martingales vectorielles notons $\int \psi\, d\phi$ le processus $t \to \int_0^t \psi_u\, d\phi_u$ et $|\psi|_\infty$ la v.a. $\sup\limits_{0\leq t\leq} |\psi_t|$. Classiquement il existe une constante universelle $c_6 > 0$ telle que

(32) $$P\left(\left|\int \psi\, dw\right|_\infty \geq R\right) \leq \frac{1}{c_6} \exp(-c_6 R^2)$$

pour tout $R \geq 0$ et toute ψ telle que $|\psi|_\infty$, P-p.s. Les coefficients de X étant bornés, il existe (cf. § 2.6) c_7 robuste globale en S,B telle que

(33) $$P\left(|X|_\infty \geq R\right) \leq \frac{1}{c_7} \exp(-c_7 R^2) \qquad \text{pour tout } R \geq 0$$

Soit ψ tel que $|\psi_t| \leq |X_t|$. Pour $R \geq 0$ notons $\bar{\psi}$ le processus tronqué $\bar{\psi}_t = \psi_t 1_{\{\sup_{0\leq s\leq t} |X_s| \leq \sqrt{R}\}}$; alors $P\left(\left|\int \psi\, dw\right|_\infty \geq R\right)$ est majoré par

$$P(|X|_\infty \geq \sqrt{R}) + P\left(\int\left|\int \bar{\psi}\, dw\right|_\infty \geq R\right)$$

et donc au vu de (32)(33) par $\frac{1}{c_8}\exp(-c_8 R)$ avec $c_8 > 0$ robuste globale. Comme $\psi dX = \psi S\, dw + \psi B\, dt$ avec S,B bornés, on obtient $c_9 > 0$ robuste globale telle que

$$P\left[\left|\int \psi\, dX\right|_\infty \geq R\right] \leq \frac{1}{c_9}\exp(-c_9 R)$$

pour tout $R \geq 0$ et tout ψ tel que $|\psi| \leq |X|$. Ceci garantit bien sûr l'existence de c_{10}, $\tau > 0$ robustes globales telles que

(34) $$\begin{cases} \left\|\exp \tau \left|\int \psi\, dX\right|_\infty\right\|_{4m} \leq c_{10} & \text{pour } |\psi| \leq X \\ \left\|\exp \tau \left|\int \psi\, dX\right|^2_\infty\right\|_{4m} \leq c_{10} & \text{pour } |\psi| \leq 1 \end{cases}$$

Traitons d'abord le cas de $\int \varphi_s(Y_s)dY_s$ avec $|\varphi_s(x)| \leq |x|$ partout.

Posons $W(Y_{0t}) = \exp \tau \int_0^t \varphi(Y)dY$, d'où

$$dW(Y_{0t}) = \tau W(Y_{0t})[\varphi\, S\, dw + (\varphi B + \varphi V + \tfrac{\tau}{2}|\varphi S|^2)dt]$$

où $\varphi\, S\, B\, V$ sont calculés en t, Y_t. Puisque $|\varphi_s(x)| \leq |x|$ on en tire c_{11} tel que pour $t < 1$

$$E\, W(Y_{0t}) - 1 \leq c_{11}\, E \int_0^t |W(Y_{0s})|(1+|Y_s|^2)(1+|V_s(Y_s)|)ds$$

d'où par (19) (20) et le lemme de Fatou pour atteindre $t=1$,

$$E\, W(Y_{01}) - 1 \leq \frac{c_{12}}{c_0}\, E \int_0^1 \|W(X_{0s})(1+|X_s|^2)\|_{2m}(1-s)^{-3/4}ds$$

La $\|\ldots\|_{2m}$ est ici majorée par l'expression

$$\left\|\exp \tau \left|\int \varphi(X)dX\right|_\infty\right\|_{4m} \times \|1+|X_s|^2\|_{4m}$$

qui (cf. (34)(33)) est bornée par une constante robuste globale. D'où $E\,W(Y_{01}) \leq \frac{c_{13}}{c_o}$ avec c_{13} robuste. Le même résultat s'applique à $-\varphi_t(z)$ et puisque $e^{|v|} \leq e^v + e^{-v}$, la première partie de l'assertion (30) est prouvée. La seconde partie (cas où $|\varphi_s(x)| \leq 1$) se démontre de même.

5.11. Corollaire : Soit X une diffusion sur $\mathbb{R}^m$ comme en 5.6 ; soient Y^r les ponts approchés de X, et $Z \equiv Y^o$ le pont de X. Définissons des semi-martingales locales M_t^r $0 \leq t < 1$ par $dM^r = \alpha(Y^r)\, dY^r + \beta(Y^r)dt$, où $\alpha_t(x)$ et $\beta_t(x)$ sont des champs de matrices et vecteurs sur $[01] \times \mathbb{R}^m$, de classe C^∞, uniformément bornés. Alors $M_1^r = \lim_{t\to 1} M_t^r$ existe P-p.s., et quand $r \to 0$ les processus $\mathscr{Y}^r = (Y^r, M^r)$ convergent étroitement vers $\mathscr{Y}^o$ sur $C(01, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$. De plus pour toute fonction continue bornée $\psi : C(01, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ on a

$$(35) \qquad \lim_{r\to 0} E\,[\psi(Y^r) \exp M^r] = E\,[\psi(Z) \exp M^o]$$

Preuve : La convergence p.s. de M_t^r quand $t \to 1$ résulte d'une remarque faite au milieu de la preuve 5.10. Par construction $\mathscr{Y}_t^r$ est alors une diffusion en t, $0 \leq t < 1$ sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, et les $\mathscr{Y}_t^r$, $0 \leq t \leq 1$, ont leurs trajectoires dans $C(01, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$. Quand $r \to 0$ les coefficients de $\mathscr{Y}^r$ convergent clairement vers ceux de $\mathscr{Y}^o$, uniformément sur les compacts de $[01[\times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$. Ceci garantit que tout point limite de la famille des lois des $\mathscr{Y}^r$ quand $r \to 0$ coïncide avec la loi de $\mathscr{Y}^o$. Les majorations (30) et (27) contrôlent évidemment le "module" de continuité en probabilité des $\mathscr{Y}^r$, uniformément pour $0 \leq r \leq 1$ et assurent donc la compacité relative des lois des $\mathscr{Y}^r$. D'où la convergence étroite de $\mathscr{Y}^r$ vers $\mathscr{Y}^o$ sur $C(01, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R})$.

Il existe une évidente fonction continue (*non bornée*) $\phi : C(01, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}) \quad \mathbb{R}$ telle que

$$\phi(\mathscr{Y}^r) = \psi(Y^r) \exp M^r$$

si ψ est comme dans l'énoncé 5.11. Pour prouver (35) il suffit donc d'établir un résultat d'intégrabilité uniforme du type

$$E\,[\phi(\mathscr{Y}^r)^2] \text{ uniformément borné quand } r \to 0.$$

Mais ψ étant bornée, ceci résulte de (30) et de la définition de M^r .

5.12. Amplitude maximale du pont : Théorème : Soit X une diffusion sur $\mathbb{R}^m$ à coefficients S,B comme en 5.6, de densité p. Alors il existe une constante $c > 0$ robuste globale en S,B telle que le pont Z de X vérifie

(36) $$P\left(\sup_{0\le t\le 1} |Z_t| \ge R\right) \le \frac{1}{cp(0\,1\,0\,0)} \exp(-cR^2) \quad \text{pour tout } R \ge 0$$

Remarque : Nous verrons plus bas en 7.8 que $p(0\,1\,0\,0)$ est aussi une constante robuste globale en S,B .

Preuve: Le corollaire 4.6 fournit $c_{14} > 0$ robuste en S,B tel que pour $0<r<1$ et $R>2$ on ait

(37) $$P\left\{\sup_{0\le t\le 1} |X_t| \ge R,\ |X_1| \le r\right\} \le \frac{1}{c_{14}} r^m \exp(-c_{14}R^2)$$

La définition des Y^r donne alors pour $r<1$ et $R>2$

$$P\left(\sup_{0\le t\le 1} |Y_t^r| \ge R\right) \le \frac{r^m \exp(-c_{14}R^2)}{c_{14}\ P(|X_1|\le r)}$$

Et classiquement la convergence étroite de Y^r vers Z quand $r\to 0$ donne, en posant $p_0 = p(0\,1\,0\,0)$

(38) $$P\left(\sup_{0\le t\le 1} |Z_t| \ge 2R\right) \le \varlimsup_{r\to 0} P\left(\sup_{0\le t\le 1} |Y_t^r| \ge R\right) \le \frac{1}{p_0 c_{14}} \exp(-c_{14}R^2)$$

pour tout $R>2$. Remplaçons c_{14} par $c_{15}\le c_{14}$, robuste global et assez petit pour que $1 \le \frac{1}{p_0 c_{15}} \exp(-4\,c_{15})$; ceci est toujours possible car on sait déjà (cf.2.5) que p_0 est *majorée* par une constante robuste globale. Alors (38) entraîne

$$P\left(\sup_{0\le t\le 1} |Z_t| \ge 2R\right) \le \frac{1}{p_0 c_{15}} \exp(-c_{15}R^2) \quad \text{pour tout } R \ge 0$$

6. PARTIE PRINCIPALE DE LA DENSITE

6.1. <u>Modification standard des coefficients</u> : Sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^m$ soit (x_t) la diffusion initiale 1.1 à coefficients σ, b. Pour $\xi, \eta \in U$ appelons f la géodésique minimisante joignant ξ à η (points proches) et fixons des compacts U_0, U_1 de U avec U_1 voisinage de U_0. Il existe alors des constantes $c_1, \rho_1 > 0$ robustes en σ, b telles que les relations

$$(1) \qquad \xi, \eta \in U_0, \qquad |\xi-\eta| \leq c_1 \rho \quad , \quad \rho \leq \rho_1$$

garantissent $|\xi - f_t| \leq \rho$ pour $0 \leq t \leq 1$ et l'inclusion dans U_1 de la boule euclidienne de centre ξ et rayon 8ρ. Mais alors la relation $|x_t^\varepsilon - f_t| \leq 2\rho$ force $|x_t^\varepsilon - \xi| \leq 3\rho$, et *la partie principale* $[\pi^\varepsilon]$ *de la densité* $\pi^\varepsilon(0\,1\,\xi\,\eta)$ *associée à la troncature* (ρ, H) *(cf. 4.1) ne dépend que de la loi du processus* x^ε *tué à la sortie de la boule* W *centre* ξ *et rayon* 4ρ.

Construisons de façon *systématique* un processus $\tilde{x}^\varepsilon$ sur $\mathbb{R}^m$ ayant de meilleurs coefficients que x^ε et tel que les processus induits sur W par x^ε et $\tilde{x}^\varepsilon$ aient même loi. Fixons jusqu'à la fin de § 9 une fonction de classe C^∞ $u : \mathbb{R}^+ \to [01]$ valant 1 sur $[01]$ et 0 sur $[2, +\infty[$. Posons $\psi(x) = u(\frac{|x|}{4\rho})$ et

$$(2) \qquad \tilde{b}(t,x) = \psi(x)\, b(t,x) \; ; \; \tilde{a}(t,x) = \psi(x)\, a(t,x) + [1-\psi(x)]\, I$$

où I est la matrice identité d'ordre m. On définit les (m,k)-matrices $\tilde{\sigma}$ par la décomposition en blocs $\tilde{\sigma} = (\sqrt{\tilde{a}} \mid 0)$. Nous dirons que $(\tilde{\sigma}, \tilde{b})$ *est une modification standard de* σ, b *associée à la troncature* ρ.

Il est évident que $\tilde{\sigma}, \tilde{b}$ sont à distorsion et n-rigidité *bornées* ; de plus on a quand (1) est vraie

$$(3) \qquad \operatorname{dis}(\tilde{\sigma} | [01] \times \mathbb{R}^m) \leq 2 + \operatorname{dis}(\sigma | [01] \times U_1)$$

et pour ρ U_0 U_1 fixés il existe α constant tel que

(4) $$\mathrm{rig}_n\,(\tilde{\sigma},\tilde{b}|[01] \times \mathbb{R}^m) \leq \alpha^n\,\mathrm{rig}_n\,(\alpha,b|[01] \times U_1)$$

<u>*quels que soient* σ,b.</u>

En particulier U_0, U_1 *étant fixés et (1) étant supposée vraie, les constantes ultra-robustes globales en* $\tilde{\sigma},\tilde{b}$ *sont a fortiori ultra-robustes en* σ,b ; et d'après (4), <u>*une fois*</u> ρ <u>*choisi*</u> *les constantes robustes globales en* $\tilde{\sigma},\tilde{b}$ *deviennent robustes en* σ,b.

Une fois calculée la géodésique f et fixé le niveau de troncature ρ , *le calcul de* $[\pi^\varepsilon]$ *peut se faire après remplacement de* x^ε *par* $\tilde{x}^\varepsilon$, *c'est-à-dire après modification standard des coefficients.* Dans toute la suite *nous ne prendrons pas la peine de distinguer* $\sigma\, b\, x^\varepsilon$ et $\tilde{\sigma}\,\tilde{b}\,\tilde{x}^\varepsilon$ *par des notations différentes.*

Pour les calculs délicats des § 8 et 9, nous choisirons $\tilde{\sigma},\tilde{b}$ comme ci-dessus mais *avec la contrainte supplémentaire* suivante

(5) $$\frac{1}{1+\nu}\,\tilde{a}(t,y) \leq \tilde{a}(t,x) \leq \frac{1}{1-\nu}\,\tilde{a}(t,y) \qquad \text{pour } 0\leq t\leq 1 \ ;\ x,y \in \mathbb{R}^m \ ,$$

où ν est fixé d'avance avec $0 < \nu \leq \frac{1}{10}$. Il est évident que pour chaque tel ν , il existe $\rho_0(\nu) > 0$ robuste en σ,b tel que le choix (2) de $\tilde{\sigma},\tilde{b}$ garantisse (5).

Nous dirons alors que $(\tilde{\sigma},\tilde{b})$ *est une* ν*-modification de* (σ,b).

6.2. <u>Ecart normalisé entre trajectoire et géodésique</u> : Partons de la diffusion initiale (x_t) sur U vérifiant 1.1. Associons-lui le système perturbé x^ε donné par 3.1 et soit f la géodésique de ξ à η . Nous allons nous intéresser aux processus

(6) $$K^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\,(x^\varepsilon - f)$$

conditionnés par $K_1^\varepsilon = 0$. Fixons un niveau de troncature ρ et ξ , η vérifiant (1). Cherchons à calculer $[\pi^\varepsilon]$. <u>*Après modification standard des coefficients*</u> (cf. 5.1) une translation par $\frac{1}{\varepsilon}\,f$ dans l'espace des trajectoires ramènera (formule de Girsanov) l'étude du pont de K^ε à celle du pont de X^ε, où X^ε vérifie sur $\mathbb{R}^m$, et pour $0\leq t\leq 1$

$$(7)\qquad \begin{cases} dX^{\varepsilon} = S(\varepsilon,X^{\varepsilon})dw + B(\varepsilon,X^{\varepsilon})dt \qquad \text{avec } X_0^{\varepsilon} \equiv 0 \text{ et} \\ S_t(\varepsilon,x) = \sigma(\varepsilon^2 t,\ f_t+\varepsilon x)\ ;\ B_t(\varepsilon,x) = \varepsilon\, b(\varepsilon^2 t,\ f_t+\varepsilon x) \end{cases}$$

Appelons p^{ε} la densité de X^{ε} ; introduisons le champ de matrices $A=SS^*$ et le drif complémentaire V donnés par

$$(8)\qquad A_t(\varepsilon,x) = a(\varepsilon^2 t,\ f_t+\varepsilon x) \quad ; \quad V_t(\varepsilon,x) = A_t(\varepsilon,x)\ \partial_x \log p^{\varepsilon}(t\,1\,X\,0)$$

L'équation du pont Z^{ε} de X^{ε} s'écrit alors (cf. § 5) sur $\mathbb{R}^m$ et pour $0\leq t<1$

$$(9)\qquad dZ^{\varepsilon} = S(\varepsilon,Z^{\varepsilon}) + [B(\varepsilon,Z^{\varepsilon}) + V(\varepsilon,Z^{\varepsilon})]dt$$

La formule de Girsanov amènera à associer à toute semi-martingale brownienne adéquate Z_t sur $[01[$ et a tout $\varepsilon \geq 0$ la semi-martingale numérique $t \to J_t(\varepsilon,Z)$ vérifiant $J_0(\varepsilon,Z) \equiv 0$ et l'équation d'Ito *(indice* t *muet)*

$$(10)\qquad dJ_t(\leftarrow,Z) = f'^{*}\ \Gamma(\varepsilon,Z)\ [\tfrac{1}{2}\, f'dt + \varepsilon(dZ-B(\varepsilon,Z)dt)]$$

$$\text{avec } S_t(\varepsilon,x) = [A_t(\varepsilon,x)]^{-1}$$

Les notations (7) (8) (9) (10) permettent de donner la formule, essentielle dans la suite, exprimant la partie principale $[\pi^{\varepsilon}]$ de la densité à partir du pont Z^{ε} .

6.3. Calcul de la partie principale : Théorème : Soit (x_t) une diffusion sur $U \in \mathbb{R}^m$, vérifiant 1.1. Soit x^{ε} le système perturbé associé. Soient $\xi,\eta \in U$ et un niveau de troncature ρ vérifiant (1). Alors la partie principale $[\pi^{\varepsilon}]$ de la densité $\pi^{\varepsilon}(0\,1\,\xi\,\eta\,)$ est donnée par la formule suivante, après modification standard (cf. 6.1) des coefficients σ,b ,

$$(11)\qquad [\pi^{\varepsilon}] = \varepsilon^{-m}\, p^{\varepsilon}(0\,1\,0\,0)\ \ E\,[H(\varepsilon Z^{\varepsilon})\, \exp(-\frac{1}{\varepsilon^2}\, J_1(\varepsilon,Z^{\varepsilon}))]$$

où p^{ε} , Z^{ε} sont la densité et le pont du processus X^{ε} donné par (7), $J_1(\varepsilon,Z^{\varepsilon})$ est la v.a. numérique donnée par (10), et la fonctionnelle continue $H : C(01,\ \mathbb{R}^m) \to [01]$ vaut 1 pour $\|g\|_{\infty} \leq \rho$ et 0 pour $\|g\|_{\infty} \geq 2\,\rho$.

6.4. Commentaire : Esquissons le comportement de X^{ε}, Z^{ε}, p^{ε}, $J_1(\varepsilon,Z^{\varepsilon})$ quand $\varepsilon \to 0$. Par (7), X^{ε} *converge étroitement sur* $C(01,\mathbb{R}^m)$ *vers le processus gaussien centré* X^0 donné par (indice t muet)

(12) $$dX^o = \sigma(0,f)dw$$

La densité p^o de X^o s'écrit donc

(13) $$p^o(s\,t\,x\,y) = (2\pi)^{-m/2}\ (\det \alpha_{st})^{1/2} \exp[-\tfrac{1}{2}\,\alpha_{st}.(x-y)^2]$$

où les formes quadratiques α_{st} valent

(14) $$\alpha_{st} = \left[\int_s^t a(0,f_u)du\right]^{-1}$$

Le pont Z^ε converge étroitement sur $C(01,\ \mathbb{R}^m)$ vers le pont Z^o de X^o, donné par (indice t muet)

(15) $$dZ^o = \sigma(0,f)dw - a(0,f)\ \alpha_{t1}\ Z^o\,dt$$

et est donc aussi gaussien centré. Nous verrons plus bas que $p^\varepsilon(0\,1\,0\,0)$ est C^∞ en ε , et par (13) converge donc quand $\varepsilon \to 0$ vers

(16) $$p^o(0\,1\,0\,0) = (2\Pi)^{-m/2}\left[\det \int_0^1 a(0,f_u)du\right]^{-1/2}$$

Quand à $J_1(\varepsilon,Z^\varepsilon)$ qui est aussi C^∞ en ε , sa limite pour $\varepsilon \to 0$ vaut $\lambda(f) = \frac{1}{2}\,d^2(\xi,\eta)$. Ceci fait pressentir pour $[\pi^\varepsilon]$ un premier terme du type $p^o(0\,1\,0\,0)\ \varepsilon^{-m} \exp\left[-\frac{d^2(\xi,\eta)}{2\varepsilon^2}\right]$, ce qui sera précisé complètement plus bas.

6.5. <u>Preuve du théorème 6.3</u> : *Commençons par faire une modification standard de* σ,b. Pour $r < 2\rho$ posons

(17) $$\varphi_r = \frac{1}{\chi r^m}\,E\left[H(x^\varepsilon-f)\ 1_{|x_1^\varepsilon-\xi|\leq r}\right]$$

avec H comme en 6.3, et χ = volume de la boule unité. Il s'agit de calculer $\lim_{r\to 0} \varphi_r = [\pi^\varepsilon]$. <u>*Dans cette preuve tout le calcul se fait donc à*</u> ε <u>*fixé*</u>.

Posons $x^\varepsilon = f+\varepsilon\,K^\varepsilon$; la diffusion K^ε vérifie $K_0^\varepsilon \equiv 0$ et (notations (7))

(18) $$dK^\varepsilon = S(\varepsilon,K^\varepsilon)dw + [B(\varepsilon,K^\varepsilon) - \tfrac{1}{\varepsilon}\,f']dt$$

Soit X^ε la diffusion (7). Sur la tribu $\mathcal{F}_t$ des événements antérieurs à t, les lois P^K et P^X de $K^\varepsilon,X^\varepsilon$ vérifient pour $t < 1$

(19) $$\frac{dP^K}{dP^X}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp(-\tfrac{1}{\varepsilon^2}\,J_t(\varepsilon,X^\varepsilon)) \quad \text{avec } J_t \text{ donné par (10)}$$

Ceci entraîne, en posant $r = \varepsilon\,u$, avec $u > 0$ tendant vers 0,

$$(20)\qquad \varphi_{\varepsilon u} = \frac{1}{\chi\varepsilon^m u^m} E\left[H(\varepsilon K^\varepsilon)\ 1_{|K_1^\varepsilon|\le u}\right] = E\left[H(\varepsilon X^\varepsilon)\ 1_{|X_1^\varepsilon|\le u}\ \exp(-\varepsilon^{-2}J_1(\varepsilon,X^\varepsilon))\right]$$

$$= \varepsilon^{-m}\frac{P(|X_1^\varepsilon|\le u)}{\chi\ u^m} E[H(\varepsilon X^\varepsilon)\ \exp(-\varepsilon^{-2}J_1(\varepsilon,X^\varepsilon))\ |\{X_1^\varepsilon|\le u\}]$$

Notons Y^u la diffusion X^ε conditionnée par $\{|X_1^\varepsilon|\le u\}$; bien entendu Y^u *dépend de* ε . De (20) on tire

$$(21)\qquad \varphi_{\varepsilon u} = \varepsilon^{-m}\frac{P(|X_1^\varepsilon|\le u)}{\chi\ u^m}\ E[H(\varepsilon\ Y^u)\ \exp(-\varepsilon^{-2}J_1(\varepsilon,Y^u))]$$

La densité de X^ε étant p^ε on a

$$(22)\qquad \lim_{u\to 0}\ \frac{P(|X_1^\varepsilon|\le u)}{\chi\ u^m} = p^\varepsilon\ (0\,1\,0\,0)$$

Puisque $[\pi^\varepsilon] = \lim_{r\to 0}\ \varphi_r = \lim_{u\to 0}\ \varphi_{\varepsilon u}$ il ne reste plus qu'à démontrer (23) ci-dessous, où $Z^\varepsilon \equiv Y^o$ est le pont de X^ε ,

$$(23)\qquad \lim_{u\to 0} E[H(\varepsilon,Y^u)\ \exp(-\varepsilon^{-2}J_1(\varepsilon,Y^u))] = E[H(\varepsilon Z^\varepsilon)\ \exp(-\varepsilon^{-2}J_1(\varepsilon,Z^\varepsilon))]$$

Comme ε est *fixé* dans ce calcul, la forme (10) de la fonctionnelle $Z\to J_1(\varepsilon,Z)$ permet d'appliquer aux ponts approchés Y^u le providentiel corollaire 5.11, qui est valide ici car, grâce à la modification standard de (σ,b), b est borné et σ est de distorsion bornée. Ainsi (23) est prouvé.

6.6. <u>Robustesse et diffusions</u> X^ε : Les diffusions X^ε sur $\mathbb{R}^m$ introduites plus haut (cf. (7)) pour calculer $[\pi^\varepsilon]$ *après* modification standard des coefficients initiaux (σ,b) ont donc en fait leurs coefficients $S^\varepsilon,B^\varepsilon$ donnés par

$$(24)\qquad \begin{cases} S^\varepsilon(t,x) = S_t(\varepsilon,x) = \tilde{\sigma}(\varepsilon^2 t,\ f_t+\varepsilon x) \\ B^\varepsilon(t,x) = B_t(\varepsilon,x) = \varepsilon\tilde{b}(\varepsilon^2 t,\ f_t+\varepsilon x) \end{cases}$$

avec (cf. 6.1) $\tilde{\sigma}\tilde{b}$ modification standard de σb . Pour $0\le\varepsilon\le 1$ les distorsions globales des S^ε sont évidemment *simultanément* contrôlées par la distorsion globale de $\tilde{\sigma}$, et donc a fortiori (cf. (3)) par la distorsion de σ sur $[01]\times U_1$.

Pour n entier fixé, les n-rigidités globales des $(S^\varepsilon,B^\varepsilon)$ sont de même, avec $0\le\varepsilon\le 1$, simultanément contrôlées par la n-rigidité globale de $(\tilde{\sigma},\tilde{b})$, et donc (cf. (4)) *une fois fixé le niveau de troncature* ρ , par la n-rigidité de (σ,b)

sur $[01] \times U_1$. D'où la conclusion essentielle plus bas :

(25) *Les constantes ultra-robustes globales (resp$\underline{t}$ robustes globales) en* $S^\varepsilon, B^\varepsilon$ *peuvent être prises indépendantes de* $\varepsilon \in [01]$ *et ultra-robustes en* σ, b *(resp$\underline{t}$ robustes en* σ, b).

7. LE PREMIER TERME DE LA PARTIE PRINCIPALE

7.1. Stratégie en deux temps : Partons de la diffusion initiale (x_t) vérifiant 1.1. Pour développer la densité $\pi(0,\varepsilon^2,\xi,\eta)$ quand $\varepsilon \to 0$, on s'intéresse au système perturbé x^ε donné par 3.2,et à la partie principale $[\pi^\varepsilon]$ de sa densité $\pi^\varepsilon(0\;1\;\xi\,\eta)$ associé à une ρ-troncature. Une modification standard (cf. 6.1) des coefficients σ,b de (x_t) permet d'exprimer $[\pi^\varepsilon]$ par $E[\phi(\varepsilon,Z^\varepsilon)]$ où ϕ est une fonctionnelle numérique et Z^ε le pont d'une diffusion explicite X^ε (cf. § 6).

Techniquement il est efficace de développer d'abord $\phi(\varepsilon,Z)$ à l'ordre 2 en ε, quelle que soit la semi-martingale Z, et ensuite seulement (cf. § 8, 10) d'utiliser le développement de Taylor stochastique de Z^ε en ε.

Une expansion brutale de $\phi(\varepsilon,Z^\varepsilon)$ *en puissance de* ε *aboutirait au même résultat formel à condition de mener le calcul formel avec un certain doigté ;* mais pour démontrer la validité des développements obtenus la tactique à deux stages est utile.

7.2. Les différentielles de l'action : Rappelons que $C'_\xi(0\,1\,,U)$ est l'espace des $f : [0\,1] \to U$ telles que $f' \in L_2[0\,1]$. L'espace $C'_0(0\,1\,,\mathbb{R}^m)$ *qui sera noté désormais* C'_0, est muni du produit scalaire hilbertien $\langle\varphi,\psi\rangle = \int_0^1 \varphi'^*\psi'dt$ et $C'_\xi(0\,1\,,U)$ est muni de la structure de variété hilbertienne évidente pour laquelle l'espace tangent en tout point s'identifie à C'_0.

A partir des coefficients initiaux σ,b, on définit *les champs de matrices carrées* $a=\sigma\sigma^*$ *et* $\gamma=a^{-1}$ sur $[0\,1] \times U$, et (cf. § 3.2) la fonctionnelle d'action $\lambda : C'_\xi(0\,1\,,U) \to [0,+\infty]$ donnée par

(1) $$\lambda(f) = \frac{1}{2}\int_0^1 f_t'^*\,\gamma(0,f_t)\,f_t'dt$$

Sur la variété hilbertienne $C'_\xi\,(0\,1\,,U)$, λ *est clairement de classe* C^∞ puisque $\gamma(0,x)$ est C^∞ en $x \in U$.

Donnons nous $f \in C'_\xi(0\,1\,,U)$, qui sera bientôt assujettie à être la géodésique minimisante de ξ à η, et posons

(2) $$\tilde{\lambda}_j = \frac{1}{j!}\,\lambda^{(j)}(f) \quad \text{et} \quad \gamma_s^{ij} = \frac{1}{i!j!}\;\partial_t^i\,\partial_x^j\,\gamma(0,f_s)$$

Un calcul élémentaire à partir de (1) donne pour tout $g \in C'_0$

(3) $$\lambda_1 g = \int_0^1 f'^*\,[\gamma^{00}dg + \tfrac{1}{2}\,\gamma^{01}g.f'dt]$$

(4) $$\lambda_2 g^2 = \tfrac{1}{2}\int_0^1 g'^*\gamma^{00}g'dt + \tilde{\lambda}_2 g^2$$

avec la définition

(5) $$\tilde{\lambda}_2 g^2 = \int_0^1 f'^*\,[\gamma^{01}g.dg + \tfrac{1}{2}\,\gamma^{02}g^2.f'dt]$$

Soit Z_t, $0\leq t\leq 1$ un processus aléatoire continu quelconque à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, vérifiant les conditions (6) avec α,β processus quelconques adaptés à la filtration brownienne :

(6) $$\begin{cases} dZ = \alpha dw + \beta dt & \text{pour } 0 \leq t < 1 \\ \int_0^1 dt\,(E\,|\beta|+ E\,|\alpha|^2) < \infty & \text{P-p.s.} \\ Z_0 = Z_1 = 0 \end{cases}$$

Les formules (3) (5) gardent un sens évident quand on remplace g *par* Z *et définissent des v.a. numériques* $\lambda_1 Z$ et $\tilde{\lambda}_2 Z^2$.

Prenons maintenant pour f la déodésique minimisante de ξ à η pour la métrique d associée au champ de formes quadratiques $\gamma(0,.)$. Puisque (cf. 3.2) f minimise $\lambda(\varphi)$ sur l'ensemble des $\varphi \in C'_\xi(0\,1\,,U)$ tels que $\varphi_0 = \xi$, $\varphi_1 = \eta$, on a alors

(7) $$\lambda_1 g \equiv 0 \quad \text{pour} \quad g \in C'_0 \quad \text{et} \quad g_0 = g_1 = 0$$

Puisque f'_t et $\gamma_t^{00} \equiv (0,f_t)$ sont à dérivées bornées en $t \in [0\,1]$, une intégration par parties montre à partir de (3) que $\lambda_1 : C'_0(0\,1\,,\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ se prolonge de façon unique en une fonctionnelle continue sur $C_0(0\,1\,,\mathbb{R}^m)$ définie par une mesure à densité bornée sur $[0 1]$. En particulier si $g_n \in C_0(0\,1\,,\mathbb{R}^m)$ converge simplement vers $g \in C_0(0\,1\,,\mathbb{R}^m)$, avec $\|g_n\|_\infty$ borné, alors $\lambda_1 g_n$ tend vers $\lambda_1 g$.

Soit maintenant Z un processus vérifiant (6). Il existe alors une suite $g_n \in C_0'$ d'approximations polygonales de Z avec $g_n(0) = g_n(1) = 0$ et $\sup_n \|g_n\|_{\alpha'}$ fini P-p.s. On alors P-p.s. $\lambda_1 Z = \lim_{n\to\infty} \lambda_1 g_n$ et donc d'après (7)

(8) $$\lambda_1 Z \equiv 0 \text{ , P-p.s., pour tout } Z \text{ vérifiant (6).}$$

Enfin remarquons que pour ξ , $\eta \in U_0$ compact fixe de U, il existe une constante $c = c(U_0)$ robuste en σ, b telle que la géodésique f de ξ à η vérifie

(9) $$\|f'\|_\infty \leq c\, d(\xi,\eta)$$

En effet, f étant géodésique minimisante on a classiquement $f_t'^* \gamma(0,f_t)\, f_t' \equiv d^2(\xi,\eta)$ pour $0 \leq t \leq 1$.

7.3. Développement à l'ordre 2 pour $J_t(\varepsilon,Z)$: Lemme : Partons de coefficients initiaux σ,b vérifiant 1.1. Après modification standard de σ,b considérons la fonctionnelle aléatoire $Z \to J_t(\varepsilon,Z)$, $0 \leq \varepsilon, t \leq 1$ définie par 6.(10), où Z vérifie (6). Alors on a :

(10) $$J_1(\varepsilon,Z) = I_0 + \varepsilon^2 I_2(Z) + \varepsilon^3 \hat{I}_3(\varepsilon,Z)$$

avec (cf. (2) (3) (5))

(11) $$\begin{cases} I_0 = \lambda(f) = \frac{1}{2} d^2(\xi,\eta) \\ I_2(Z) = \tilde{\lambda}_2 Z^2 + u_2, \text{ où } u_2 \text{ est } \textit{déterministe} \text{ donné par} \\ u_2 = \int_0^1 dt\, f'^* \;\; [t\, \gamma^{10} f' - \gamma(0,f)\, b(0,f)] \end{cases}$$

et où le reste $\hat{I}_3$ est contrôlé comme suit ; pour tout entier $M \geq 1$ donné, tout compact U_0 de U , il existe des constantes $c_1, c > 0$ robustes en σ,b telles que les conditions

(12) $$\xi,\eta \in U_0, \quad |\xi-\eta| \leq c_1, \quad 0 \leq \varepsilon < \rho \leq c_1$$

impliquent

(13) $$\begin{cases} \|H(\varepsilon Z^\varepsilon) \exp |\varepsilon \hat{I}_3(\varepsilon,Z^\varepsilon)|\;\|_M \leq \dfrac{c}{p^\varepsilon(0\,1\,0\,0)} \\ \|\exp\;|\tilde{\lambda}_2(Z^\varepsilon,Z^\varepsilon)|\;\|_M \leq \dfrac{c}{p^\varepsilon(0\,1\,0\,0)} \end{cases}$$

Comme plus haut $H : C_0(0\,1, \mathbb{R}^m) \to [0\,1]$ sert à tronquer au niveau ρ , Z^ε est le pont de X^ε introduit en 6.2, et p^ε est la densité de X^ε .

<u>Preuve</u> : Si $\mathcal{V}_t$, $\mathcal{W}_t$ $0\leq t\leq 1$ sont des processus à valeurs dans des espaces euclidiens, dépendant des paramètres ε,ξ,η, *nous dirons que*

(14) $\mathcal{V} = 0(\mathcal{W})$ quand $|\mathcal{V}_t| \leq |\mathcal{W}_t|$ pour $0\leq t\leq 1$, et tout $0\leq\varepsilon\leq 1$, $\xi,\eta \in U_0$.

Après modification standard de σ,b la formule de Taylor usuelle fournit c robuste tel que pour tout Z vérifiant (6) on ait, avec $\Gamma(\varepsilon,x)=\gamma(\varepsilon^2 t, f_t+\varepsilon x)$ et les notations de 6.2

$$\Gamma(\varepsilon,Z) = \gamma(0,f) + \varepsilon\gamma^{01}Z + \varepsilon^2(t\gamma^{10} + \gamma^{02}Z^2) + c\varepsilon^3\, 0(1+|Z|^3)$$

$$B(\varepsilon,Z) = \varepsilon b(0,f) + c\varepsilon^2\, 0(1+|Z|)$$

pour $0\leq\varepsilon,\ t\leq 1$, $\xi,\eta\in U_0$; rappelons que l'*indice* t est muet (= absent) le plus souvent possible. Par substitution dans 6.(10) on obtient directement

(15) $$J_1(\varepsilon,Z) = I_0 + \varepsilon I_1(Z) + \varepsilon^2 I_2(Z) + \varepsilon^3 \hat{I}_3(\varepsilon,Z)$$

avec, grâce aux formules (2) (3) (5), le nombre I_0 et la fonctionnelle $I_2(Z)$ donnés par (11), et

(16) $$I_1(Z) \equiv \lambda_1 Z \equiv 0 \quad \text{grâce à (8)}$$

(17) $$\hat{I}_3(\varepsilon,Z) \equiv c \int_0^1 [0(1+|Z|^3)ds + 0(1+|Z|^2)dZ]$$

où c est une constante robuste en σ,b .

La fonctionnelle de troncature H (cf. 4.1) est nulle hors de la boule de rayon 2ρ . *Sur l'événement* $\{H(\varepsilon Z) \neq 0\}$ on a donc $\|\varepsilon Z\|_\infty \leq 2\rho$, d'où $\varepsilon\, 0(|Z|^k) \leq 2\rho\quad 0(|Z|^{k-1})$, et par (17) dès que $\varepsilon \leq 2\rho$

(18) $$|\varepsilon\hat{I}_3(\varepsilon,Z)| \leq 2c\rho \int_0^1 [0(1+|Z|^2)dt + 0(1+|Z|)dZ]$$

D'autre part pour $d(\xi,\eta) \leq 1$ et $\xi,\eta \in U_0$, les formules (9) (5) fournissent c robuste tel que

(19) $$\tilde{\lambda}_2(Z^2) = c\ d(\xi,\eta) \int_0^1 [0(|Z|)dZ + 0(|Z|^2)dt]$$

Appliquons au cas $Z = Z^\varepsilon$, pont de la diffusion X^ε, introduit en 6.2. D'après le théorème 5.10 il existe des constantes $c,\tau > 0$ robustes en $S^\varepsilon, B^\varepsilon$ (coefficients de X^ε), et donc a fortiori *indépendantes de* $\varepsilon\in[0,1]$ *et robustes en* σ,b *grâce à 6.6*, telles que pour $0\leq\varepsilon\leq 1$,

$$E\left[\exp \tau \int_0^1 O(|Z^\varepsilon|^2)dt\right] + E\left[\exp \tau \left|\int_0^1 O(|Z^\varepsilon|)dZ^\varepsilon\right|\right] \leq \frac{c}{p^\varepsilon(0\,1\,0\,0)}$$

où p^ε est la densité de X^ε. De (18) (19) on conclut alors immédiatement que pour tout $M \geq 1$ donné, on peut trouver $c_1, c > 0$ robustes en σ,b tels que (12) implique (13).

7.4. Premier terme de la partie principale : Lemme : Soit (x_t) la diffusion initiale de coefficients σ,b vérifiant 1.1. Associons-lui, après modification standard de σ,b, la diffusion X^ε et son pont Z^ε définis en 6.2. Soit p^ε la densité de X^ε. Alors pour tout compact U_0 de U, il existe des constantes $c,c_1,c_2 > 0$ robustes en σ,b telles que les conditions

(20) $$\xi,\eta\in U_0 \quad ; \quad |\xi-\eta| \leq c_1\rho \quad ; \quad 0\leq\varepsilon<\rho\leq c_1$$

(21) $$\frac{\rho}{\varepsilon} \geq \frac{c_2}{p^\varepsilon(0\,1\,0\,0)}$$

garantissent pour la partie principale $[\pi^\varepsilon]$ de $\pi(0,\varepsilon^2,\xi,\eta)$ l'expression

(22) $$[\pi^\varepsilon] = \varepsilon^{-m}\left[\exp - \frac{d^2(\xi,\eta)}{2\varepsilon^2}\right] \alpha(\varepsilon,\xi,\eta) \quad \text{avec}$$

(23) $$c[p^\varepsilon(0\,1\,0\,0)]^2 \leq \alpha(\varepsilon,\xi,\eta) \leq 1/c$$

Remarque : Bien entendu, nous verrons plus bas (cf. 7.8) que $p^\varepsilon(0\,1\,0\,0)$ est minorée par une constante *robuste* > 0 ; mais pour le démonter nous aurons besoin de 7.4 et 7.5 qui n'utilisent pas ce fait ; ceci justifie le soin avec lequel nous manipulons pour le moment $p^\varepsilon(0\,1\,0\,0)$ alors que le lemme classique 7.6 fournit directement $\lim_{\varepsilon\to 0} p^\varepsilon(0\,1\,0\,0) = p^0(0\,1\,0\,0) > 0$. Le but de ce détour est donc de *garantir la robustesse* en σ,b du minorant de $p^\varepsilon(0\,1\,0\,0)$.

Preuve : Donnons-nous $M \geq 1$ et U_0. Les conditions (12) et 6.(1) regroupées sont certainement impliquées par (20) avec un choix convenable de c_1 robuste. Imposons donc (20) ; on a alors d'une part la formule 6.(11)

(24) $$[\pi^\varepsilon] = \varepsilon^{-m}\, p^\varepsilon(0\,1\,0\,0)\ E\,[H(\varepsilon Z^\varepsilon)\ \exp - \frac{1}{\varepsilon^2} J_1(\varepsilon,Z^\varepsilon)]$$

et d'autre part le développement (10) de $J_1(\varepsilon,Z^\varepsilon)$, avec les estimations de moments (13). Substituons (10 dans (24) pour obtenir

(25) $$\begin{cases} [\pi^\varepsilon] = \varepsilon^{-m}\, p^\varepsilon(0\,1\,0\,0)\, e^{-u_2} \exp(- \frac{d^2(\xi,\eta)}{2\varepsilon^2})\ E[H(\varepsilon Z^\varepsilon)\ e^Q] \\ Q = - \tilde{\lambda}_2\ (Z^\varepsilon,Z^\varepsilon) - \varepsilon \hat{I}_3(\varepsilon,Z^\varepsilon) \end{cases}$$

L'inégalité de Schwarz donne en *écrivant* H *au lieu de* $H(\varepsilon Z^\varepsilon)$

$$P(\ \|\varepsilon Z^\varepsilon\|_\infty \le \rho) \le E[H(\varepsilon Z^\varepsilon)] \le [E(He^Q)]^{1/2}\ [E(He^{-Q})]^{1/2}$$

d'où par (13) l'encadrement

(26) $$\frac{1}{c}\, p^\varepsilon(0\,1\,0\,0)\ \ [P\ \|\varepsilon Z^\varepsilon\|_\infty \le \rho]^2 \le E(He^Q) \le \frac{c}{p^\varepsilon(0\,1\,0\,0)}$$

Le théorème 5.12 appliqué à X^ε et son pont Z^ε, et la remarque 6.(25) fournissent $c_2 > 0$ robuste en σ, b tel que

$$P(\ \|Z^\varepsilon\|_\infty \ge R) \le \frac{1}{c_2 p^\varepsilon(0\,1\,0\,0)} \exp(-c_2\ R^2) \quad \text{pour tout } R \ge 0, \text{ et } 0 \le \varepsilon \le 1$$

D'après (12) qui garantit $\frac{\rho}{\varepsilon} \ge 1$, on en tire $c_3 > 0$ robuste tel que

$$P(\ \|\varepsilon Z^\varepsilon\|_\infty \ge \rho) \le \frac{c_3}{p^\varepsilon(0\,1\,0\,0)}$$

Puisque $\frac{1}{c_2} \exp(-c_2 R^2) \le \frac{c_3}{R}$ avec c_3 robuste, R quelconque ≥ 0, on voit que $P(\ \|\varepsilon Z^\varepsilon\|_\infty \ge \rho) \le \frac{c_3 \varepsilon}{\rho p^\varepsilon(0\,1\,0\,0)}$. Imposons alors

$$\frac{\rho}{\varepsilon} \ge \frac{2c_3}{p^\varepsilon(0\,1\,0\,0)}$$

pour garantir $P(\ \|\varepsilon Z^\varepsilon\|_\infty \ge \rho) \le \frac{1}{2}$ et donc par (26)

(27) $$\frac{1}{4c}\, p^\varepsilon(0\,1\,0\,0) \le E(He^Q) \le \frac{c}{p^\varepsilon(0\,1\,0\,0)}$$

D'autre part l'expression (11) de $|u_2|$ montre que u_2 est majoré par une constante robuste, de sorte que (26) (27) entraînent immédiatement les assertions (22) (23).

7.5. Equivalent de la densité : Théorème : Soit (x_t) une diffusion non homogène sur $U \in \mathbb{R}^m$, à coefficients σ, b localement elliptiques et C^∞ sur $[01] \times U$. Pour chaque $u \in [01]$ soit $d_u(.,.)$ la distance Riemannienne définie par la métrique $x \to a(u,x)^{-1}$ avec $a = \sigma\sigma^*$. Notons ψ le noyau

(28) $$\psi(u\, v\, \xi\, \eta) = (v-u)^{-m/2} \exp\left[- \frac{d_u^2(\xi,\eta)}{2(v-u)}\right]$$

Alors pour tout compact U_0 de U il existe des nombres $c, \tau > 0$ telles que lorsque

(29) $$\xi, \eta \in U_0, \quad 0 \leq u < v \leq 1, \quad |v-u| \leq \tau, \quad |\xi - \eta| \leq \tau$$

la densité π de (x_t) vérifie

(30) $$c\psi(u\, v\, \xi\, \eta) \leq \pi(u\, v\, \xi\, \eta) \leq \frac{1}{c}\, \psi(u\, v\, \xi\, \eta)$$

Remarque : A ce stade on ne peut pas encore garantir la robustesse de c, τ en σ, b; *ce point sera une conséquence de 7.8.*

Preuve : Pour $u \in [01[$ considérons les coefficients

$$\sigma_u(t,x) = \sigma(u+t,x) \qquad b_u(t,x) = b(u+t,x)$$

et les diffusions associées $x_{u,t}$, $u \leq t \leq 1$. Les densités π et π_u des diffusions (x_t), $(x_{u,t})$ vérifient $\pi(u\, v\, \xi\, \eta) \equiv \pi_u(0, v-u, \xi, \eta)$.

Pour chaque u, on considère les systèmes ε-perturbés $x^\varepsilon_{u,t}$ comme en 3.2 de densités π^ε_u vérifiant évidemment

$$\pi(u, u+\varepsilon^2, \xi, \eta) = \pi^\varepsilon_u(0\, 1\, \xi\, \eta)$$

Le processus X^ε de 6.2. dépend maintenant du paramètre supplémentaire u ; on le note $X^{u,\varepsilon}$; soit $p^{u,\varepsilon}$ sa densité. Soit f^u la géodésique minimisante de ξ à η pour la métrique d_u ; les coefficients de $X^{u,\varepsilon}$ s'écrivent

$$S^{u,\varepsilon}(t,x) = \sigma(u+\varepsilon^2 t,\ f^u_t + \varepsilon x)$$

$$B^{u,\varepsilon}(t,x) = \varepsilon b(u+\varepsilon^2 t,\ f^u_t + \varepsilon x)$$

La métrique d_u est à coefficients C^∞ en u et variable d'espace ; classiquement $d_u(\xi,\eta)$ est donc continue en u, et pour U_0 compact fixé il existe $\tau > 0$ robuste en σ, b tel que pour $\xi, \eta \in U_0$ et $|\xi - \eta| \leq \tau$, la géodésique f^u_t soit

C^∞ en u,t. Les coefficients $S^{u,\varepsilon}$, $B^{u,\varepsilon}$ sont donc C^∞ en $(u,\varepsilon) \in [01]^2$. D'après le classique lemme 7.6 ci-dessous, ceci implique que la densité $p^{u,\varepsilon}$ est aussi C^∞ en u,ε. Par suite, il existe un nombre $\theta > 0$ (pas question de robustesse cette fois) tel que

(31) $$\theta \leq p^{u,\varepsilon}(0\,1\,0\,0) \leq \frac{1}{\theta}$$

pour $0 \leq u$, $\varepsilon \leq 1$, $\xi,\eta \in U_0$, $|\xi-\eta| \leq \tau$.

Fixons $u \in [01[$; appliquons 7.4 et 4.2 à π_u^ε. Les constantes qui interviennent dans 7.4 et 4.2 dépendent alors a priori du paramètre u ; mais elles sont par construction robustes en (σ_u,b_u) ; comme la distorsion et la rigidité des (σ_u,b_u), $0 \leq u \leq 1$, sont simultanément contrôlées par celles de (σ,b), *toute constante liée à* u *mais robuste en* (σ_u,b_u) *peut être remplacée par une constante indépendante de* u *et robuste en* σ,b.

Les conditions de validité de (31), 7.4 et 4.2 regroupées, sont donc certainement satisfaites quel que soit $u \in [01[$ pourvu que, avec c_1. c_2 robustes en σ,b

(32) $$\xi,\eta \in U_0, \quad |\xi-\eta| < c_1\rho \;.\; 0<\varepsilon< \frac{1}{8}\rho \leq c_1$$

(33) $$\frac{\rho}{\varepsilon} \geq \frac{c_2}{p^{u,\varepsilon}(0\,1\,0\,0)} \quad \text{pour tout } u \in [01[$$

D'après (31), la condition (33) est sûrement vérifiée si $\varepsilon \leq \frac{\theta}{c_2}\rho$. Les estimations (22) (23) pour $[\pi_u^\varepsilon]$ et 4.(3) pour la partie évanescente $\pi_u^\varepsilon-[\pi_u^\varepsilon]$, le changement de notation $\varepsilon^2 = v-u$, et l'encadrement (31) de $p^{u,\varepsilon}$ démontrent alors l'assertion (30). Reste à prouver le lemme bien connu 7.6, utilisé plus haut.

7.6. Lemme : Soit X une diffusion sur $\mathbb{R}^m$ dont les coefficients $S(t,x)$, $B(t,x)$ sont localement elliptiques, et C^∞ en (t,x,α), avec $\alpha \in \mathbb{R}^\ell$ paramètre supplémentaire. Alors pour chaque $(s\,t\,x\,y)$ fixé, la densité $p(s\,t\,x\,y)$ de X est C^∞ en α.

Preuve (classique) ; On sait que $p(s\,t\,x\,y)$ vérifie $L_{sx}p=0$ où L_{sx} est l'opérateur parabolique 5.(2), à coefficients C^∞. *Au sens des distributions*, $\partial_\alpha p$ vérifie donc trivialement l'équation hypo-elliptique $L_{sx}\partial_\alpha p = q$ où q est combinaison linéaire des $\partial_x p$, $\partial_x^2 p$, $\partial_s p$ à coefficients C^∞. Puisque L_{sx} vérifie la condition d'Hormander, et comme q est C^∞, on en déduit (cf. [12] [17]) que $\partial_\alpha p$ est C^∞ en s,x. Même argument itéré pour $\partial_\alpha^k p$.

7.7. Minoration robuste de la densité : Corollaire : Soit X une diffusion non homogène sur $\mathbb{R}^m$, à coefficients S,B de classe C^∞ sur $[01] \times \mathbb{R}^m$, de distorsion et 2-rigidité bornées. Alors il existe des constantes $c,\mu > 0$ resp^t robuste globale et ultrarobuste globale en S,B telles que pour tout x, $y \in \mathbb{R}^m$, $0 \leq s < t \leq 1$ la densité p de X vérifie

$$p(s\,t\,x\,y) \geq c(t-s)^{-m/2} \exp(-\mu \frac{|x-y|^2}{t-s})$$

Preuve : Ce résultat est une conséquence du théorème A.2.3. donné en appendice, et dont la démonstration utilise de façon cruciale le théorème 7.5.

7.8. Conséquence : Robustesse de certaines constantes : Grâce à 7.7, 2.4 on voit que *la constante* $c_0 = \inf\limits_{|x| \leq 1} p(0\,1\,0\,x)$ *introduite au § 5 est robuste globale en* S,B, ainsi que *la constante* $p(0\,1\,0\,0)$. En particulier 6.(25) implique alors que, p^ε étant la densité de X^ε, diffusion donnée par 6.(7) après modification standard de (σ,b), *les nombres* $p^\varepsilon(0\,1\,0\,0)$ *restent, pour* $0 \leq \varepsilon \leq 1$, *majorés et minorés par des constantes* > 0, *robustes en* σ,b.

De même, dans la preuve de 7.5, les $p^{u,\varepsilon}(0\,1\,0\,0)$ sont pour $0 \leq \varepsilon \leq 1$ majorés et minorés par des constantes liées à u, mais robustes en σ_u,b_u, et donc a fortiori par des constantes indépendantes de u et robustes en σ,b ; le nombre θ dans (31) peut donc être remplacé par une constante robuste en σ,b, et finalement *le théorème 7.5 fournit un équivalent robuste de la densité, avec des constantes* $c,\tau > 0$ *robustes en* σ,b.

8. DEVELOPPEMENTS DE TAYLOR STOCHASTIQUES DE Z^ε ET $J(\varepsilon,Z^\varepsilon)$

8.1. Equations d'Ito en cascade pour les dérivées de Z^ε et $J(\varepsilon,Z^\varepsilon)$

Partons de la diffusion initiale (x_t) sur $U\subset\mathbb{R}^m$, à coefficients σ,b vérifiant 1.1. Après modification standard de (σ,b), le calcul de la partie principale $[\pi^\varepsilon]$ utilise une diffusion X^ε, sa densité p^ε et son pont Z^ε, vérifiant (cf. 6.2) avec $a = \sigma\sigma^*$

$$(0)\qquad \begin{cases} dX^\varepsilon = S(\varepsilon,X^\varepsilon)\ dw + B(\varepsilon,X^\varepsilon)dt \\ S_t(\varepsilon,x) = \sigma(\varepsilon^2 t,f_t+\varepsilon x) \quad ; \quad B_t(\varepsilon,x) = \varepsilon b(\varepsilon^2 t,f_t+\varepsilon x) \end{cases}$$

$$(1)\qquad dZ^\varepsilon = S(\varepsilon,Z^\varepsilon)\ dw + W(\varepsilon,Z^\varepsilon)dt \quad \text{avec}$$

$$(2)\quad W_t(\varepsilon,x) = B_t(\varepsilon,x) + V_t(\varepsilon,x) = \varepsilon b(\varepsilon^2 t,f_t+\varepsilon x) + a(\varepsilon^2 t,f_t+\varepsilon x)\ \partial_x \log p^\varepsilon(t\ 1\ x\ 0)$$

D'autre part 6.(10) définit la semi-martingale locale $M_t^\varepsilon = J_t(\varepsilon,Z^\varepsilon)$, qui vérifie $M_0^\varepsilon \equiv 0$ et

$$(3)\qquad dM^\varepsilon = f'^*\ \Gamma(\varepsilon,Z^\varepsilon)\ [\tfrac{1}{2}\ f'dt + \varepsilon(dZ^\varepsilon - B(Z^\varepsilon)dt)] \qquad \text{avec}$$

$$\Gamma_t(\varepsilon,x) = \gamma(\varepsilon^2 t,\ f_t+\varepsilon x) \qquad \text{et} \qquad \gamma = a^{-1}$$

ce qui donne

$$(4)\qquad dM^\varepsilon = K(\varepsilon,Z^\varepsilon)\ dw + \Theta(\varepsilon,Z^\varepsilon)\ dt \qquad \text{avec}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} K_t(\varepsilon,x) = \varepsilon f_t'^*\ \gamma(\varepsilon^2 t,f_t+\varepsilon x)\ \sigma(\varepsilon^2 t,f_t+\varepsilon x) \\ \Theta_t(\varepsilon,x) = \frac{1}{2}\ f_t'^*\ \gamma(\varepsilon^2 t,f_t+\varepsilon x)\ f'_t + \varepsilon f_t'^*\ \partial_x \log p^\varepsilon(t\ 1\ x\ 0) \end{cases}$$

Le couple $(Z^\varepsilon,M^\varepsilon)$ est donc une diffusion sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ à coefficients C^∞ en t,ε, et variables d'espace. Par suite (cf. [15] [7] [2]) les trajectoires de $(Z^\varepsilon,M^\varepsilon)$ sont presque sûrement C^∞ en ε et les processus

$$(6)\qquad z_i(t) = \frac{1}{i!}\ (\partial_\varepsilon^i\ Z_t^\varepsilon)_{\varepsilon=0} \quad ; \quad m_i(t) = \frac{1}{i!}\ (\partial_\varepsilon^i\ M_t^\varepsilon)_{\varepsilon=0}$$

sont pour $0\le t<1$ des semi-martingales locales qui vérifient les équations d'Ito obtenues par dérivations formelles en ε, à partir de (2) (3). Pour manipuler ces équations, introduisons quelques conventions.

Conventions : A toute fonction différentiable $\phi_t(\varepsilon,x)$ à valeurs vectorielles, on associe *les fonctions* $\phi_t^{ij}(\varepsilon,x)$ *et les semi-martingales vectorielles* φ_t^{ij} *définies par*

$$(7) \qquad \phi_t^{ij} = \frac{1}{i!j!}\partial_\varepsilon^i \partial_x^j \phi_t \quad \text{et} \quad \varphi_t^{ij} = \phi_t^{ij}(0,Z_t^o)$$

où Z^o est le pont gaussien limite des Z^ε quand $\varepsilon \to 0$ (cf. 6.4). *Le code utilisé ici est d'associer à la lettre majuscule* Φ *la minuscule* φ *correspondante.*

Les φ_t^{ij} sont des fonctionnelles multilinéaires symétriques (aléatoires) sur $(\mathbb{R}^m)^j$ dont la valeur sera notée de façon monomiale évidente. Définissons les semi-martingales vectorielles $\mathscr{S}^j(\phi,Z)$ par

$$(8) \quad \text{pour } j=1 \; ; \qquad \mathscr{S}^1(\phi,Z) \equiv \varphi^{10}$$

$$(9) \quad \text{pour } j \geq 2 \; ; \qquad \mathscr{S}^j(\phi,Z) = \varphi^{jo} + \sum_{\{\dots\}_j} \varphi^{j-r,r}.z_{i_1}\dots z_{i_r}$$

où la somme est étendue à l'ensemble d'indices

$$(10) \qquad \{\dots\}_j = \{1 \leq r \leq j \; ; \; 1 \leq i_1,\dots,i_r \leq j-1 \; ; \; i_1+\dots+i_r = r\}$$

Quand ϕ est donnée, $\mathscr{S}^j(\phi,Z)$ *ne dépend que de* $z_o = Z^o$ *et* $z_1 \dots z_{j-1}$

Par dérivation formelle de (2) (3) (cf. appendice A.1.8. et [2]) on obtient le système en cascade suivant, *à lire avec les strictes conventions (7) (8) (9),*

$$(11) \qquad dz_j = [\mathscr{S}^j(S,Z) + s^{01}z_j]\,dw + [\mathscr{S}^j(W,Z) + w^{01}z_j]\,dt$$

$$(12) \qquad dm_j = [\mathscr{S}^j(K,Z) + k^{01}\, z_j]\,dw + [\mathscr{S}^j(\Theta,Z) + \theta^{01}z_j]\,dt$$

Notons bien (cf. [2]) que *les* z_j *et* m_j *ne sont a priori* définis et continus que sur $[01[$ puisque, en tant que diffusion au sens littéral du terme, Z^o est de temps de vie 1. Mais on verra plus bas que les $z_j(t)$, $m_j(t)$ convergent p.s. quand $t \to 1$. Les équations (11) (12) se résolvent par une suite finie d'intégrations stochastiques browniennes explicites (cf. [2]). Clairement, les coefficients de dw et dt dans (11) (12) sont des polynômes en $z_1 \dots z_j$, de degré j si on pose $d^o z_i = i$, à coefficients déterministes dépendant du temps. De plus grâce à (0) (2) (5), *ces coefficients ne dépendent que des dérivées en* t,x *de* $\sigma(t,x)$, $b(t,x)$ *calculées aux points* $(0,f_t)$ *où* f *est la géodésique de* ξ *à* η .

8.2. Moments des polynômes de Taylor stochastiques de $Z^\varepsilon, J(\varepsilon,Z^\varepsilon)$:

Théorème : Soit (x_t) la diffusion initiale 1.1, à coefficients σ,b localement elliptiques lisses. Imposons $\xi,\eta \in U_0$ compact de U. Il existe alors des constantes robustes en (σ,b), notées τ et $c_{j\alpha}$, $j\geq 0$, $\alpha \geq 1$ ayant les propriétés suivantes :

Considérons après modification standard de (σ,b) le pont Z^ε et la semi-martingale $M_t^\varepsilon = J_t(\varepsilon,Z^\varepsilon)$ solutions de (1) (3), soient z_j, m_j les coefficients des polynômes de Taylor stochastiques de $Z^\varepsilon, M^\varepsilon$ en $\varepsilon = 0$, donnés par (11) (12) ; alors pour $|\xi-\eta|\leq \tau$, on a presque sûrement convergence de $z_j(t)$, $m_j(t)$ quand $t\to 1$, et $\lim_{t\to 1} z_j(t) = 0$; de plus on a les majorations de moments

$$(13) \qquad \|z_j(t)\|_\alpha \leq c_{j\alpha}\sqrt{1-t} \quad \text{et} \quad \|m_j(t)\|_\alpha \leq c_{j\alpha}$$

pour $0\leq t\leq 1$, $j\geq 0$, $\alpha\geq 1$.

Preuve : Montrons d'abord par récurrence sur $i\geq 1$ que

$$(14) \qquad \begin{cases} \|z_i(t)\|_\alpha \leq c_i \sqrt{1-t} & \text{pour } 0\leq t\leq 1,\ \alpha\geq 1 \\ \lim_{t\to 1} z_i(t) = 0 & \text{P.p.s.} \end{cases}$$

Ceci est vrai pour $i=0$ car $z_0=Z^0$ est un pont gaussien explicite (cf. 6.4). Soit donc $j\geq 1$ et supposons (14) vraie pour $0\leq 1\leq j-1$. Donnons-nous $q\geq 1$. Les calculs de moments menés plus bas au § 8.5 dans le cadre $\varepsilon\geq 0$, (cf. (41) (45) (49)) donnent en particulier quand $\varepsilon=0$ des constantes robustes en (σ,b), notées ici c et $c_1=c_1(j,q)$ telles que *pour* $0\leq t<1$ *on ait, avec les conventions (7) (8) (9) et l'indice* t *muet partout,*

$$(15) \qquad \begin{cases} |s^{01}| \leq c \\ v^* w^{01} v \leq -\frac{1}{1-t} + c & \text{pour tout } v\in \mathbb{R}^m \text{ de norme } 1 \end{cases}$$

$$(16)\qquad \begin{cases} \|s^{ir}\|_\alpha + \|k^{ir}\|_\alpha \le c_1 & \text{pour } i+r\le j,\quad \alpha\le (j+1)q \\ \|w^{ir}\|_\alpha + \|\theta^{ir}\|_\alpha \le c_1(1-t)^{-\frac{1+r}{2}} & \text{pour } i+r\le j,\quad \alpha\le (j+1)q \end{cases}$$

Pour un monôme typique de $\mathscr{P}^j(W,Z)$ on a en chaque instant $t\in[0 1[$ l'inégalité de Hölder, avec $1\le r\le j$, $1\le i_1,\dots,i_r\le j-1$,

$$\|w^{j-r,r}.z_{i_1}\dots z_{i_r}\|_q \le \|w^{j-r,r}\|_{q(r+1)}\ \|z_{i_1}\|_{q(r+1)}\dots\ \|z_{i_r}\|_{q(r+1)}$$

Mais l'hypothèse de récurrence $\{(14)$ vraie pour $0\le i\le j-1\}$ et la majoration de $\|w^{j-r,r}\|_{q(r+1)}$ tirée de (16) fournissent alors $c_2=c_2(j,q)$ robuste en (σ,b) tel que

$$\|w^{j-r,r}.z_{i_1}\dots z_{i_r}\|_q \le c_2(1-t)^{-\frac{1}{2}},\quad 0\le t<1$$

(indice t muet). Le terme de degré 0 dans $\mathscr{P}^j(W,Z)$ s'écrit w^{jo} et a donc une majoration identique par (16), d'où $c_3=c_3(j,q)$ robuste tel que

$$(17)\qquad \|\mathscr{P}^j(W,Z)\|_q \le c_3(1-t)^{-\frac{1}{2}}\qquad 0\le t<1$$

Un calcul analogue basé sur (16) et l'hypothèse de récurrence fournit $c_4=c_4(j,q)$ robuste tel que

$$(18)\qquad \|\mathscr{P}^j(S,Z)\|_q \le c_4$$

Grâce à (15) (17) (18) qui contrôlent tous les coefficients de l'équation d'Ito (11) de z_j, on peut appliquer *le lemme 8.3 ci-dessous* pour obtenir $c_5=c_5(j,q)$ robuste tel que $\|z_j(t)\|_q \le c_5(1-t)^{1/2}$, $0\le t\le 1$, et la convergence p.s. de $z_j(t)$ vers 0 quand $t\to 1$.

Ainsi (14) est prouvée pour tout $i\ge 0$ $\alpha\ge 1$. A l'aide de (14)(16) on peut maintenant reprendre un calcul analogue à (17)(18) pour obtenir $c_6=c_6(j,q)$ robuste tel que

$$(19)\qquad \begin{cases} \|\mathscr{P}^j(\Theta,Z)\|_q \le c_6(1-t)^{-1/2} & \text{pour } 0\le t<1 \\ \|\mathscr{P}^j(K,Z)\|_q \le c_6 \end{cases}$$

De (12) (16) (14) (19) on tire alors $dm_j = \alpha\, dw + \beta\, dt$, avec

$$\|\alpha_t\|_q \le c_7 \quad \text{et} \quad \|\beta_t\|_q \le c_7(1-t)^{-1/2} \quad \text{pour } 0\le t<1$$

avec $c_7 = c_7(j,q)$ robuste. D'où la finitude de $\int_0^1 (\|\alpha_t\|_q + \|\beta_t\|_q)dt$, ce qui entraîne classiquement la convergence p.s. de $m_j(t)$ quand $t \to 1$.

D'autre part on sait que

$$\left\|\int_0^t \alpha\, dw\right\|_q \leq \delta \sup_{[0\,t]} \|\alpha_\cdot\|_q \qquad \underline{0 \leq t \leq 1}$$

où $\delta = \delta(q)$ est une constante universelle ; ceci montre que les $\|m_j(t)\|_q$ restent bornés par une constante robuste $c_8(j,q)$ pour $\underline{0 \leq t \leq 1}$.

Il ne reste plus qu'à prouver le lemme technique crucial utilisé dans la démonstration ci-dessus.

8.3. Lemme technique : Considérons pour $0 \leq t < 1$ une semi-martingale locale X sur $\mathbb{R}^m$ vérifiant $X_0 \equiv 0$ et

$$dX = (R+U)dw + (T+M)dt$$

où R,T,U,M sont des semi-martingales locales à valeur matricielles définies sur $[0 1[$. Supposons l'existence de $r \geq 2$ et $c > 1$ tels que pour $0 \leq t < 1$ on ait

$$(20) \qquad \begin{aligned} & |U_t| \leq c\, |X_t| \\ & X_t^* M_t \leq \left[- \frac{1}{1-t} + c\right] |X_t|^2 \\ & \|R_t\|_{2r} \leq c \qquad , \qquad \|T_t\|_{2r} \leq \frac{c}{\sqrt{1-t}} \\ & M_t = N_t + W_t X_t \quad \text{avec} \quad |N_t| \leq c\, |X_t| \quad \text{et} \quad \|W_t\|_{2r} \leq \frac{c}{1-t} \end{aligned}$$

Alors le nombre $K = e^{16\, k^2 r^2 c^2}$, où k = dimension du brownien w, vérifie

$$\|X_t\|_{2r} \leq K \sqrt{1-t} \qquad \text{pour } 0 \leq t < 1$$

En particulier X_t tend presque sûrement vers 0 quand $t \to 1$.

Preuve : Soit $D > 0$ quelconque et soit τ le premier instant où $|X_t|^2$ atteint la valeur D. Posons $Y = X_{t \wedge \tau}$. La formule d'Ito donne d'abord

$$d|Y|^2 = 2(Y^*R + Y^*U)dw + \{2(Y^*T + Y^*M) + \text{trace}\,[(R+U)^*(R+U)]\}dt$$

puis en posant $H = |Y|^{2r}$

$$(21) \qquad dH = 2r|Y|^{2r-2}\,[(Y^*R + Y^*U)dw + Y^*M\, dt] + 2r|Y|^{2r-4}\beta dt$$

avec

(22) $\beta = |Y|^2\, Y^*T + |Y|^2 \text{ trace } [(R+U)^*(R+U)] + (r-1) \text{ trace } [(R+U)^*YY^*(R+U)]$

Par intégration de (21) et passage à l'espérance $E(.)$ on tire

(23) $$E(H_t) - E(H_s) = 2r \int_s^t E[|Y|^{2r-2}\, Y^*M + |Y|^{2r-4}\beta]\, du$$

La fonction $\varphi_t = E(H_t)$ est donc différentiable et vérifie

(24) $$\varphi' = 2r\, E[|Y|^{2r-2}\, Y^*M + |Y|^{2r-4}\beta] \qquad 0\leq t\leq 1$$

D'autre part (20) donne pour $0\leq t<1$,

(25) $$E\,[|Y|^{2r-2}\, Y^*M] \leq (-\frac{1}{1-t} + c)\,\varphi_t$$

Puisque $|\text{trace } A^*A| \leq k\, |A|^2$ pour toute matrice A d'ordre (m,k) on majore facilement $|\beta|$ par (22) (20) pour obtenir

$$|Y|^{2r-4}|\beta| \leq rkc^2|Y|^{2r} + (|T|+2rkc|R|)|Y|^{2r-1} + rk|R|^2|Y|^{2r-2}$$

D'où par l'inégalité de Hölder et (20), pour $0\leq t<1$,

(26) $$E[|Y|^{2r-4}|\beta|] \leq rkc^2\varphi + (\frac{c}{\sqrt{1-t}} + 2rkc^2)\varphi^{1-1/2r} + rkc^2\varphi^{1-1/r}$$
$$\leq 4\, rkc^2\, [\varphi + \frac{c}{\sqrt{1-t}}\,\varphi^{1-1/2r} + \varphi^{1-1/r}]$$

De (24) (25) (26) on déduit en posant $\chi = 8\, r^2k^2c^2$

(27) $$\varphi_t' \leq (-\frac{2r}{1-t} + \chi)\varphi_t + \frac{\chi}{\sqrt{1-t}}\,\varphi_t^{1-1/2r} + \chi\,\varphi_t^{1-1/r}$$

Posons $\varphi_t = (1-t)^r\, \theta_t\psi_t$ avec $\theta_t = e^{\chi t}$ d'où par substitution dans (27)

$$(1-t)^r\, \theta_t\psi_t' \leq -\frac{r}{1-t}\,\varphi_t + \frac{\chi}{\sqrt{1-t}}\,(1-t)^{r-1/2}\, \theta_t^{1-1/2r}\, \psi_t^{1-1/2r} + \chi(1-t)^{r-1}\theta_t^{1-1/r}\psi_t^{1-1/r}$$

Puisque $\theta_t \geq 1$ on en tire a fortiori,

$$\psi_t' \leq \frac{\chi}{1-t}\, [\psi_t^{1-1/2r} + \psi_t^{1-1/r} - r\psi_t]$$

Pour $\psi_t > 1$ le crochet est toujours < 0, car $r \geq 2$. Mais les propriétés $\psi_0 = 0$ et $\{\psi_t' < 0$ dès que $\psi_t > 1\}$ impliquent évidemment $\sup_{[01]}\psi \leq 1$ d'où finalement

$$\varphi_t \leq (1-t)^r\, e^{\chi t} \qquad \text{pour } 0\leq t<1$$

et donc

$$\|X_{t\wedge\tau}\|_{2r} = \varphi_t^{1/2r} \leq e^{\chi/2r}\sqrt{1-t} \qquad \text{pour } 0\leq t<1$$

On fait tendre le niveau de troncature D vers $+\infty$ et donc τ vers 1 pour obtenir

$$(28) \qquad \|X_t\|_{2r} < e^{\chi/2r}\sqrt{1-t} \qquad 0\leq t<1$$

D'après (20) (28) on a

$$\|R+U\|_r \leq c(1+e^{\chi/2r}) \qquad 0\leq t<1$$

$$\|T+M\|_r \leq \frac{c}{\sqrt{1-t}}(1+2\,e^{\chi/2r}) \qquad 0\leq t<1$$

d'où la convergence de $\int_0^1 (\|R+U\|_r + \|T+M\|_r)dt$ ce qui classiquement implique la convergence p.s. de $X_t = \int_0^t [(R+U)dw + (T+M)dt]$ quand $t\to 1$. La limite X_1 des X_t quand $t\to 1$ vérifie d'après (28) et le lemme de Fatou $\|X_1\|_{2r} = 0$ d'où $X_1=0$ p.s.

8.4. Robustesse et ν-modifications : Pour étudier les moments de $z_i = (\partial_\varepsilon^i Z^\varepsilon)_{\varepsilon=0}$ nous avons eu besoin d'estimer ceux de l'équation d'Ito vérifiée par z_i ; le même problème se pose plus bas pour étudier les restes de Taylor de Z^ε. Ces estimations reposent sur des calculs substantiels concernant les dérivées $\partial_\varepsilon^i\partial_x^j \log p^\varepsilon(t\,1\,X\,0)$ où p^ε est la densité de X^ε. Nous donnons ces calculs en appendice (cf. A.2.4) lorsque le coefficient de dw dans dX^ε est comparable à un coefficient matriciel indépendant de ε et de la variable d'espace. Pour garantir cette propriété, *la modification standard* $\tilde{\sigma},\tilde{b}$ *des coefficients initiaux* σ,b *(cf. 6.1) va désormais être astreinte à être une* ν*-modification* (cf. 6.1), pour un certain ν fixé $0<\nu\leq\frac{1}{10}$. Ceci est toujours possible (cf. 6.1) pourvu que le niveau de troncature ρ vérifie $\rho\leq\rho_0(\nu)$ avec $\rho_0(\nu)$ robuste en σ,b quand ν est fixé.

Rappelons (cf. 6.1) que les constantes ultrarobustes globales en $(\tilde{\sigma},\tilde{b})$ peuvent être prises indépendantes de ν,ρ et ultrarobustes en (σ,b) ; et que *une fois* ν *et* $\rho\leq\rho_0(\nu)$ *fixés* les constantes robustes globales en $(\tilde{\sigma},\tilde{b})$ sont en fait robustes en (σ,b). Comme en 6.6, en notant S^ε, B^ε les coefficient de la diffusion

X^ε vérifiant (0), on en conclut que *toute constante a priori liée à* ε *et aux choix de* $\nu,\rho,\tilde{\sigma},\tilde{b}$, *mais ultrarobuste globale en* $(S^\varepsilon,B^\varepsilon)$, *peut en fait être prise indépendante de* ε,ν,ρ *et ultrarobuste en* σ,b ; de même *une fois* ν,ρ *fixés avec* $\rho \leq \rho_0(\nu)$, *les constantes robustes globales en* $(S^\varepsilon,B^\varepsilon)$ *peuvent être prises indépendantes de* ε *et robustes en* σ,b.

En principe ν et ρ sont fixés dans tous les calculs ci-dessous, mais le bon choix de ν ne sera précisé qu'en fin de § et ne dépendra que de la dimension m, de l'ordre N des développement asymptotiques, et de constantes ultrarobustes globales en $(S^\varepsilon,B^\varepsilon)$. D'après ce qui précède, le choix de ν sera donc ultrarobuste en (σ,b), indépendant de ε, et toutes les constantes robustes globales en $S^\varepsilon,B^\varepsilon$ introduites en cours de calcul "deviendront" dont indépendantes de ε et robustes en (σ,b).

Comme auparavant, il sera donc inutile de distinguer $\tilde{\sigma},\tilde{b}$ de σ,b par des notations différentes. Tous ces arguments ont bien sûr comme prémisse minimale la restriction (1) de 6.1 que nous rappelons ici

(29) $$\xi,\eta \in U_0 \text{ compact de } U \ ; \quad |\xi-\eta| \leq c_1\rho \ ; \quad \rho \leq \rho_1$$

avec c_1,ρ_1 robustes en σ,b.

8.5. <u>Moments des coefficients du pont Z^ε et de leurs dérivées</u> :

Fixons un entier M qui ne dépendra que de l'ordre N des développements asymptotiques cherchés. Fixons $\nu > 0$ très petit et (cf. 6.1, 8.4) une ν-modification de σ,b. *Après* cette ν-modification, $a = \sigma\sigma^*$ vérifie d'après 6.(5)

(30) $$\frac{1}{1+\nu}\, a(t,y) \leq a(t,x) \leq \frac{1}{1-\nu}\, a(t,y) \quad \text{pour } 0\leq t\leq 1 \ ; \ x,y \in \mathbb{R}^m$$

On en déduit élémentairement l'existence de $\varepsilon_1 >$ robuste en σ,b tel que le coefficient $A_\cdot(\varepsilon,.)$ donné par

(31) $$A_t(\varepsilon,x) = S_t S_t^*(\varepsilon,x) = a(\varepsilon^2 t,\ f_t+\varepsilon x)$$

vérifie pour $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, $0\leq t\leq 1$, $x \in \mathbb{R}^m$

(32) $$\frac{1}{1+2\nu}\, a(0,f_t) \leq A_t(\varepsilon,x) \leq \frac{1}{1-2\nu}\, a(0,f_t)$$

Notons L_{ij} l'opérateur différentiel $L_{ij} = \partial_\varepsilon^i \partial_x^j$. Grâce à l'encadrement (32), et au fait qu'après modification standard de σ,b les coefficients $S^\varepsilon, B^\varepsilon$ de dX^ε sont à n-rigidité bornée pour chaque n, on peut appliquer le théorème A.2.5 (donné en appendice) au drift complémentaire $V_t(\varepsilon,x) = A_t(\varepsilon,x)\, \partial_x \log p^\varepsilon(t\,1\,x\,0)$ du pont Z^ε. D'après les théorèmes A.2.4 et A.2.5 ci-dessous, on a donc pour $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$, $0 \leq t < 1$, $x \in \mathbb{R}^m$, $i+j \leq N+3$

$$(33) \qquad \begin{cases} |L_{ij}\, V_t(\varepsilon,x)| \leq c(1-t)^{-\frac{j+1}{2}} \exp(\nu N\mu \frac{|x|^2}{1-t}) \\ |L_{ij}\, \partial_x \log p^\varepsilon(t\,1\,x\,0)| \leq c(1-t)^{-\frac{j+1}{2}} \exp(\nu N\mu \frac{|x|^2}{1-t}) \end{cases}$$

avec des constantes $\mu > 0$ et c resp^t ultrarobuste globale et robuste globale en $(S^\varepsilon, B^\varepsilon)$. D'après 8.4, on peut donc prendre μ indépendante de ε,ν,ρ et ultrarobuste en (σ,b), tandis que une fois ν,ρ fixés c peut être prise indépendante de ε et robuste en σ,b. *Cet argument ne sera plus répété explicitement* jusqu'à la fin du paragraphe, nous nous contenterons des qualificatifs "ultrarobuste" et "robuste" sans précision

Avec les conventions (7), on écrit $\phi_t^{ij} = L_{ij}\, \phi_t$ pour toute fonction $\phi_t(\varepsilon,x)$. Les formules (0) (5) et la construction des modifications standard (cf. 6.1) montrent élémentairement que pour $i+j \leq N+3$, $0 \leq \varepsilon, t \leq 1$, $x \in \mathbb{R}^m$,

$$(34) \qquad |S_t^{ij}(\varepsilon,x)| + |B_t^{ij}(\varepsilon,x)| + |K_t^{ij}(\varepsilon,x)| \leq c_1(1+|x|^i)$$

avec c_1 robuste. Puisque $W=B+V$, (33) et (34) donnent

$$(35) \qquad |W_t^{ij}(\varepsilon,x)| \leq c_2(1-t)^{-\frac{j+1}{2}} \exp(\nu N\mu \frac{|x|^2}{1-t})$$

avec c_2 robuste, dans les mêmes conditions. Enfin (5) (33) donnent directement, dans les mêmes conditions, c_3 robuste tel que

$$(36) \qquad |\Theta_t^{ij}(\varepsilon,x)| \leq c_3(1-t)^{-\frac{j+1}{2}} \exp(\nu N\mu \frac{|x|^2}{1-t})$$

On a vu (cf. § 5.8 et 7.8) que le pont Z^ε de X^ε vérifie, avec des constantes $\mu_4 > 0$ ultrarobustes et c_4 robuste

$$(37) \qquad E\left[\exp(\mu_4 \frac{|Z_t^\varepsilon|^2}{1-t})\right] \leq c_4 \qquad \text{pour } 0 \leq t < 1,\ 0 \leq \varepsilon \leq 1$$

Imposons donc désormais

$$(38) \qquad \nu \leq \mu_4/2MN\mu$$

Alors (33) (35) (36) (37) garantissent, avec c_5 robuste

$$(39) \qquad \|V_t^{ij}(\varepsilon,Z_t^\varepsilon)\|_M + \|W_t^{ij}(\varepsilon,Z_t^\varepsilon)\|_M + \|\Theta_t^{ij}(\varepsilon,Z_t^\varepsilon)\|_M \leq c_5(1-t)^{-\frac{j+1}{2}}$$

pour $i+j \leq N+3$, $0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_1$, $0\leq t<1$. De plus (cf. 5.8) les $E|Z_t^\varepsilon|^j$ restent bornés par une constante robuste quand $0\leq\varepsilon$, $t\leq 1$ et $j \leq (N+3)M$; de (34) on tire alors

$$(40) \qquad \|S_t^{ij}(\varepsilon,Z_t^\varepsilon)\|_M + \|B_t^{ij}(\varepsilon,Z_t^\varepsilon)\|_M + \|K_t^{ij}(\varepsilon,Z_t^\varepsilon)\|_M \leq c_6$$

pour $0\leq\varepsilon$, $t<1$, $i+j\leq N+3$, avec c_6 robuste.

Faisons maintenant $\varepsilon=0$ dans (39) (40). Remarquons que le pont gaussien Z^0 de X^0 est bien sûr complètement indépendant de ν et du choix de ν-modification, car $dX^0 = \sigma(0,f_t)dw_t$. Par suite *lorsque* $\varepsilon=0$ (39) (40) s'appliquent quels que soient M,N à condition de remplacer c_5,c_6 par $c_5(M,i,j)$, $c_6(M,i,j)$ constantes robustes. Avec la convention (7) où $\phi_t^{ij}(0,Z_t^0) = \varphi_t^{ij}$ *appliqué à la lettre*, on a donc

$$(41) \qquad \begin{cases} \|w_t^{ij}\|_M + \|\theta_t^{ij}\|_M \leq c_{ijM}(1-t)^{-\frac{j+1}{2}} \\ \|s_t^{ij}\|_M + \|k_t^{ij}\|_M \leq c_{ijM} \end{cases}$$

pour $0\leq t\leq 1$ et tout i,j,M, avec c_{ijM} robuste en σ,b. Ceci peut se voir plus directement bien sûr, mais reste non trivial pour les w^{ij},θ^{ij} .

L'évaluation des restes de Taylor stochastiques (cf. 8.6) nécessite l'estimation de moments pour des enveloppes convexes de dérivées. Adoptons la convention

$$(42) \begin{cases} \text{pour toute fonction } \phi_t(\varepsilon,x) \text{ à valeurs vectorielles on pose } \phi_t^{ij} = \frac{1}{i!j!}\partial_\varepsilon^i\partial_x^j\phi_t \\ \text{et} \\ \hat{\phi}_t^{ij}(\varepsilon,y,x) = \sup\limits_{0\leq u\leq 1} |\phi_t^{ij}(u\varepsilon,uy+(1-u)x)| \\ \hat{\varphi}_t^{ij} = \hat{\phi}_t^{ij}(\varepsilon,Z_t^\varepsilon,Z_t^0) \end{cases}$$

de sorte que les fonctions $\hat{\phi}_t^{ij}$ et les processus $\hat{\varphi}_t^{ij}$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Par convexité en x de leurs 2^{nds} membres, les inégalités (34) (35) (36) impliquent d'après (42)

$$(43)\quad \begin{cases} \hat{S}_t^{ij}(\varepsilon,y,x) + \hat{B}_t^{ij}(\varepsilon,y,x) + \hat{K}_t^{ij}(\varepsilon,y,x) \leq c_1(1+|x|^i + |y|^i) \\ \hat{W}_t^{ij}(\varepsilon,y,x) + \hat{\Theta}_t^{ij}(\varepsilon,y,x) \leq c_8(1-t)^{-\frac{j+1}{2}} \left[\exp(\nu N\mu \frac{|y|^2}{1-t}) + \exp(\nu N\mu \frac{|x|^2}{1-t})\right] \end{cases}$$

pour $i+j \leq N+3$, $0\leq t<1$, $0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_1$, $x,y \in \mathbb{R}^m$,avec c_8 robuste. De (37) (38) (42) (43) on tire *avec le code rigoureux {majuscule* ϕ *donne minuscule* φ} .

$$(44)\quad \begin{cases} \|\hat{s}_t^{ij}\|_M + \|\hat{b}_t^{ij}\|_M + \|\hat{k}_t^{ij}\|_M \leq c_9 \\ \|\hat{w}_t^{ij}\|_M + \|\hat{\theta}_t^{ij}\|_M \leq c_9(1-t)^{-\frac{j+1}{2}} \end{cases}$$

pour $0\leq t<1$, $0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_1$, $i+j \leq N+3$, avec c_9 robuste.

Précisons le cas *crucial* de $s_t^{01} = S_t^{01}(0,Z_t^o)$ et $w_t^{01} = W_t^{01}(0,Z_t^o)$. D'après (0) et la définition 6.1 des modifications standard, $|S_t(\varepsilon,x)|$ est majoré par c_{10} robuste quand $0\leq t, \varepsilon\leq 1$, $x \in \mathbb{R}^m$, d'où

$$(45)\qquad |s_t^{01}| \leq c_{10} \qquad \text{pour } 0\leq t\leq 1.$$

D'autre part la densité p^o du processus gaussien X^o a été calculée en 6.4; d'où immédiatement

$$(46)\quad \begin{cases} \partial_x \log p^o(t\ 1\ x\ 0) = -\alpha_{t1}x \quad \text{avec} \quad \alpha_{t1} = \left[\int_t^1 a(0,f_s)ds\right]^{-1} \\ V_t(0,x) = -\, a(0,f_t)\,\alpha_{t1}x \\ V_t^{01}(0,x) = \partial_x V_t(0,x) = -\, a(0,f_t)\,\alpha_{t1} \end{cases}$$

et par un calcul élémentaire l'existence de c_{11} robuste tel que, I étant la matrice identité d'ordre (m,m),

$$(47\qquad |V_t^{01}(0,x) + \frac{1}{1-t} I| \leq c_{11} \qquad \text{pour } 0\leq t<1,\ x \in \mathbb{R}^m$$

Puisque $|B_t^{01}(\varepsilon,x)|$ est, d'après (0) et la définition 6.1 des modifications standard, borné par une constante robuste, le champ $W=B+V$ vérifie avec c_{12} robuste

$$(48)\qquad |W_t^{01}(0,x) + \frac{1}{1-t} I| \leq c_{12} \qquad \text{pour } 0\leq t<1,\ x \in \mathbb{R}^m$$

et donc, *pour tout vecteur* $v \in \mathbb{R}^m$ *avec* $|v| = 1$

$$(49)\qquad v^* w_t^{01} v \leq -\frac{1}{1-t} + c_{12} \qquad \text{pour } 0\leq t<1$$

Enfin de (43) (37) (38) on tire immédiatement

$$\|\hat{S}_t^{10}(\varepsilon, Z_t^\varepsilon, Z_t^\varepsilon)\|_M + \|\hat{W}_t^{10}(\varepsilon, Z_t^\varepsilon, Z_t^\varepsilon)\|_M \leq c_{13} \tag{50}$$

pour $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$, $0 \leq t < 1$, avec c_{13} robuste.

9. MOMENTS DES RESTES DE TAYLOR STOCHASTIQUES POUR Z^{ε} et $J(\varepsilon,Z^{\varepsilon})$

9.1. Choix d'une technique : Pour la diffusion $(Z^{\varepsilon},M^{\varepsilon})$ considérée en 8.1, écrivons $z_j(t) = \frac{1}{j!}(\partial_{\varepsilon}^j Z_t^{\varepsilon})_{\varepsilon=0}$, $m_j(t) = \frac{1}{j!}(\partial_{\varepsilon}^j M_t^{\varepsilon})_{\varepsilon=0}$ et les formules de Taylor stochastiques

$$(1)\qquad \begin{cases} Z^{\varepsilon} = z_0 + \varepsilon z_1 + \ldots + \varepsilon^j z_j + \varepsilon^{j+1}\hat{z}_{j+1} \\ M^{\varepsilon} = m_0 + \varepsilon m_1 + \ldots + \varepsilon^j m_j + \varepsilon^{j+1}\hat{m}_{j+1} \end{cases}$$

Les restes $\hat{z}_{j+1}(\varepsilon,t)$ et $\hat{m}_{j+1}(\varepsilon,t)$ peuvent être estimés à l'aide de $\partial^{j+1}Z^{\varepsilon}$, $\partial^{j+1}M^{\varepsilon}$ par des formules classiques ; mais ces expressions font intervenir les dérivées de $Z^{\varepsilon},M^{\varepsilon}$ en des points $\delta\varepsilon$ avec $\delta\in[01]$ aléatoire et se révèlent ici plutôt inutilisables vues les estimations (35) (36) du § 8.

Comme nous l'avons déjà constaté dans [2], *il est bien plus efficace d'étudier directement les* $\hat{z}_{j+1}(\varepsilon,t)$ *et* $\hat{m}_{j+1}(\varepsilon,t)$ *comme semi-martingales en* t .

9.2. Système en cascade pour les restes de Taylor stochastiques : Les équations d'Ito (cf. 8.1) à coefficients C^{∞}

$$(2)\qquad \begin{cases} dZ^{\varepsilon} = S(\varepsilon,Z^{\varepsilon})dw + W(\varepsilon,Z^{\varepsilon})dt \\ dM^{\varepsilon} = K(\varepsilon,Z^{\varepsilon})dw + \Theta(\varepsilon,Z^{\varepsilon})dt \end{cases}$$

fournissent pour $Z^{\varepsilon},M^{\varepsilon}$ les développements de Taylor stochastiques (1) d'ordre j quelconques. D'après le théorème A.1.8 donné en appendice, les restes de Taylor $\hat{z}_{j+1}(\varepsilon,t)$, $\hat{m}_{j+1}(\varepsilon,t)$ sont *pour* $0\leq t<1$ des semi-martingales locales en t, nulles en $t=0$, solutions du système en cascade suivant, pour $j\geq 0$,

$$(3)\qquad d\hat{z}_{j+1} = \mathcal{M}_{j+1}(S\,z\,\hat{z})\,dw + \mathcal{M}_{j+1}(W\,z\,\hat{z})\,dt$$

$$(4)\qquad d\hat{m}_{j+1} = \mathcal{M}_{j+1}(K\,z\,\hat{z}) \quad + \mathcal{M}_{j+1}(K\,z\,\hat{z})\,dt$$

dans lequel *pour toute fonction* $\phi_t(\varepsilon,x)$ *lisse en* ε,x *la notation* $\mathcal{M}_{j+1}(\phi\,z\,\hat{z})$

désigne une semi-martingale locale en t, dont la valeur en t se calcule de façon universelle explicite à partir de ε, de la fonction $\phi_t(.,.)$, de $z_o(t)\dots z_j(t)$ et de $\hat{z}_1(\varepsilon,t)\dots\hat{z}_{j+1}(\varepsilon,t)$.

Pour décrire $\mathscr{M}_{j+1}(\phi\ z\ \hat{z})$, rappelons que $\phi_t^{ij} = \frac{1}{i!j!}\partial_\varepsilon^i\partial_x^j\phi_t$; les polynômes de Taylor d'ordre j usuels de $\phi_t(\varepsilon,y)$ calculés en $(0,x)$ *définissent par simple différence des restes* $\mathrm{TAY}_{j+1}\ \phi_t(\varepsilon\ y\ x)$ *tels que*

(5) $$\phi_t(\varepsilon,y) = \sum_{0\le i+\ell\le j} \varepsilon^i\phi_t^{i\ell}(0,x).(y-x)^\ell + \varepsilon^{j+1}\ \mathrm{TAY}_{j+1}\ \phi_t(\varepsilon\ y\ x)$$

Avec le code rigoureux {*majuscule* $\phi\to$ *minuscule* φ} *associons à* ϕ *les semi-martingales locales* φ^{ij} *indépendantes de* ε

(6) $$\varphi_t^{ij} = \phi_t^{ij}(0,Z_t^o)$$

et les semi-martingales locales $[\mathrm{tay}_{j+1}\phi]$, *liées à* ε,

(7) $$\mathrm{tay}_{j+1}\ \phi_t = \mathrm{TAY}_{j+1}\ \phi_t(\varepsilon,Z_t^\varepsilon,Z_t^o)$$

D'après le théorème A.1.8. en appendice, on a alors à chaque instant $t<1$, *(indice* t *muet partout)*

(8) $$\mathscr{M}_1(\phi\ z\ z) = \mathrm{tay}_1\phi \qquad \text{pour } j+1=1$$

et pour $j+1\ge 2$

(9) $$\mathscr{M}_{j+1}(\phi\ z\ \hat{z}) = \varphi^{01}\ \hat{z}_{j+1} + \mathrm{tay}_{j+1}\phi + \mathscr{R}_{j+1}(\phi\ \ \hat{z})$$

où la valeur en t *de la semi-martingale locale* $\mathscr{R}_{j+1}(\phi\ z\ \hat{z})$ *est un polynôme universel (à coefficients entiers constants) en les variables*

(10) $$\{z_1(t)\dots z_j(t)\ ;\ \hat{z}_1(t)\dots z_j(t)\ ;\ \varphi_t^{i\ell}\ ,\ i+\ell\le j+1\}$$

Pour écrire $\mathscr{R}_{j+1}$, posons pour tout multi-indice $\alpha=(i_1\dots i_q)$

(11) $$|\alpha| = i_1+\dots+i_q,\ \dim\alpha = q,\ \max\alpha = \max\{i_1,\dots,i_q\}$$

Pour les φ_t^i qui sont des formes ℓ-multilinéaires symétriques (aléatoires) sur $(\mathbb{R}^m)^\ell$ posons (*indice* t *muet)*

(12) $$\varphi^{i\ell}z^\alpha\hat{z}^\beta = \varphi^{i\ell}(z_{i_1}\dots z_{i_q},\ \hat{z}_{j_1}\dots\hat{z}_{j_r})$$

quand $\alpha=(i_1\dots i_q)$, $\beta=(j_1\dots j_r)$, $\dim\alpha+\dim\beta=\ell$, avec des conventions triviales si $\alpha=\emptyset$ ou $\beta=\emptyset$.

Alors (cf. théorème A.1.8) pour $j+1 \geq 2$ on a à chaque instant t (temps t omis systématiquement en indice)

(13) $$\mathscr{R}_{j+1}(\phi\, z\, \hat{z}) = \sum_{\{\dots\}_{j+1}} r_{i\ell\alpha\beta}\, \varphi^{i\ell} z^{\alpha} \hat{z}^{\beta}$$

où la somme Σ est étendue aux $(i\,\ell\,\alpha\,\beta)$ appartenant à

(14) $$\{\dots\}_{j+1} = \{i+\ell \leq j;\ \dim\alpha + \dim\beta = \ell\ ;\ \max\alpha \leq j\ ;\ \max\beta \leq j\}$$

et les $r_{ij\alpha\beta}$ sont des entiers universels *déterminés par* j *seulement.*

Estimons les moments des $\mathscr{R}_{j+1}$ et $\mathscr{M}_{j+1}$. Rappelons qu'à toute fonction $\phi_t(\varepsilon,x)$ on a associé des fonctions numériques positives $\hat{\phi}_t^{ij}(\varepsilon\, y\, x)$ et des processus numériques positifs $\hat{\varphi}_t^{ij}$ liés à ε :

(15) $$\hat{\phi}_t^{ij}(\varepsilon\, y\, x) = \sup_{0 \leq u \leq 1} |\phi_t^{ij}(u\varepsilon, uy+(1-u)x)|$$

(16) $$\hat{\varphi}_t^{ij} = \hat{\phi}_t^{ij}(\varepsilon, Z_t^{\varepsilon}, Z_t^{o})$$

Les définitions (5) (6) donnent (formule de Taylor déterministe)

(17) $$|\mathrm{TAY}_{j+1}\, \phi_t(\varepsilon\, y\, x)| \leq \sum_{i+\ell=j+1} \hat{\phi}_t^{i\ell}(\varepsilon\, y\, x).\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)^{\ell}$$

d'où par (7) (16) (17) et l'identité $\hat{z}_1 \equiv \dfrac{Z^{\varepsilon}-Z^{o}}{\varepsilon}$

(18) $$|\mathrm{tay}_{j+1}\phi| \leq \sum_{i+\ell=j+1} \hat{\varphi}^{i\ell} |\hat{z}_1|^{\ell}, \text{ à chaque instant } t<1.$$

D'autre part (13) fournit une constante universelle $\chi(j)$ telle que, à chaque instant $t<1$

(19) $$|\mathscr{R}_{j+1}(\phi\, z\, \hat{z})| \leq \chi(j) \sum_{\{\dots\}_{j+1}} |\varphi^{i\ell}|\ |z|^{\alpha} |\hat{z}|^{\beta}$$

où la somme Σ est étendue aux $(i\,\alpha\,\beta)$ $\{\dots\}_{j+1}$, ensemble décrit par (14), avec la convention naturelle

$$|\hat{z}|^{\alpha} = |\hat{z}_{i_1}| \dots |\hat{z}_{i_q}| \quad \text{et} \quad |z|^{\alpha} = |z_{i_1}| \dots |z_{i_q}| \quad \text{pour } \alpha = (i_1 \dots i_q)$$

9.3. <u>Moments des restes de Taylor stochastiques</u> : <u>Théorème</u> : Soit (x_t) la diffusion initiale 1.1 sur $U \in \mathbb{R}^m$, à coefficients σ,b.

Imposons $\xi,\eta \in U_o$ compact de U. Soient q, N deux entiers donnés. Posons

$M = 4q(N+5)!$ et $\nu = \inf\left(\frac{1}{10}, \frac{\mu_4}{2MN\mu}\right)$ où μ,μ_4 sont des constantes ultrarobustes en σ,b introduites par 8.(38). Il existe alors des constantes $\varepsilon_0,\tau,c,c_1>0$ robustes en σ,b ayant les propriétés suivantes :

Si on fixe un niveau de troncature $\rho \leq \tau$, si on impose $|\xi-\eta| \leq c\tau$, et si on choisit une ν-modification de σ,b quelconque, alors le pont Z_t^ε et la semi-martingale locale $M_t^\varepsilon = J_t(\varepsilon,Z^\varepsilon)$ ont des restes de Taylor stochastiques $\hat{z}_{N+3}$ et $\hat{m}_{N+3}$ vérifiant

(20) $$\|\hat{z}_{N+3}(\varepsilon,t)\|_{4q} \leq c_1\sqrt{1-t} \quad \text{et} \quad \|\hat{m}_{N+3}(\varepsilon,t)\|_{4q} \leq c_1$$

pour $0\leq\varepsilon\leq \varepsilon_0$, $0\leq t\leq 1$.

<u>Preuve</u> : Pour M donné rappelons (théorème 8.2) qu'il existe des constantes τ,c_1 robustes telles que pour $\xi,\eta\in U_0$, $|\xi-\eta| \leq \tau$, $0\leq t\leq 1$, $0\leq i\leq N+3$, on ait

(21) $$\|z_i(t)\|_M \leq c_1\sqrt{1-t} \quad \text{et} \quad \|m_i(t)\|_M \leq c_1$$

Procédons par récurrence. Soit $j \in [1,N+2]$. *Supposons déjà prouvée* l'existence de constantes robustes $c = c(j) \geq 1$, $\varepsilon_1 > 0$ et d'un nombre $R_j\in[2,M]$ tels que

(22) $$\begin{cases} \|\hat{z}_i(\varepsilon,t)\|_r \leq c\sqrt{1-t} \quad \text{pour} \\ 0\leq t\leq 1, \quad 0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_1, \quad 1\leq i\leq j, \quad 1\leq r\leq R_j \end{cases}$$

Lorsque $r(j+2) \leq R_j$, les relations (18) (22) entraînent pour toute fonction lisse $\phi_t(\varepsilon,x)$, à tout instant $t\leq 1$

(23) $$\begin{aligned} \|\mathrm{tay}_{j+1}\phi\|_r &\leq \sum_{i+\ell=j+1} \|\hat{\varphi}^i\|_{r(j+2)} \|\hat{z}_1\|^\ell_{r(j+2)} \\ &\leq c^{j+1} \sum_{i+\ell=j+1} \|\hat{\varphi}^{i\ell}\|_{r(j+2)} (1-t)^{\ell/2} \end{aligned}$$

Pour majorer le terme générique de $\mathscr{R}_{j+1}(\phi\, z\, \hat{z})$, prenons $i\ell\alpha\beta$ dans l'ensemble $\{\ldots\}_{j+1}$ défini par (14) ; d'après (21) (22) et l'inégalité de Hölder on a pour $0\leq t\leq 1$

(24) $$\left\| |\varphi^{i\ell}|\,|z|^\alpha|\hat{z}|^\beta \right\|_r \leq \|\varphi^{i\ell}\|_{r(j+1)} (c+c_1)^\ell (1-t)^{\ell/2}$$

pourvu que $r(j+1) \leq R_j \leq M$.

Les estimations 8.(44) et (23) entraînent

$$\|\mathrm{tay}_{j+1}S_t\|_r \le c_2 \quad \text{et} \quad \|\mathrm{tay}_{j+1}W_t\|_r \le \frac{c_2}{\sqrt{1-t}} \tag{25}$$

pour $0\le t<1$, $0\le\varepsilon\le\varepsilon_1$, $r(j+2)\le R_j\le M$, avec c_2 robuste. Les estimations 8.(41) et (24) donnent pour $(i\,\ell\,\alpha\,\beta) \in \{\ldots\}_{j+1}$, $0\le t<1$, $0\le\varepsilon\le\varepsilon_1$, $r(j+1)\le R_j\le M$

$$\left\| |s^{i\ell} z^{\alpha}\hat{z}^{\beta}| \right\|_r \le c_3 \; ; \quad \left\| |w^{i\ell} z^{\alpha}\hat{z}^{\beta}| \right\|_r \le \frac{c_3}{\sqrt{1-t}} \tag{26}$$

avec c_3 robuste. De (19) (26) (25) on déduit

$$\begin{cases} \|\mathrm{tay}_{j+1}S + \mathscr{R}_{j+1}\,(S\,z\,\hat{z})\|_r \le c_4 \\[2mm] \|\mathrm{tay}_{j+1}W + \mathscr{R}_{j+1}\,(W\,z\,\hat{z})\|_r \le c_4(1-t)^{-1/2} \end{cases} \tag{27}$$

pour $0\le t<1$, $0\le\varepsilon\le\varepsilon_1$, $r(j+2)\le R_j\le M$, avec c_4 robuste. D'après (4) (9) (27) on a donc

$$d\hat{z}_{j+1} = (s^{01}\;\hat{z}_{j+1}+\alpha)dw + (w^{01}\;\hat{z}_{j+1}+\beta)dt \tag{28}$$

avec $\|\alpha_t\|_r \le c_4$, $\|\beta_t\|_r \le c_4(1-t)^{-1/2}$ lorsque $r(j+2) \le R_j\le M$, $0\le t<1$, $0\le\varepsilon\le\varepsilon_1$. Les majorations 8.(45) et 8.(49) de s^{01} et $v^* w^{01} v$ permettent alors d'appliquer le lemme 8.3 à l'équation d'Ito (28) pour obtenir c_5 robuste en σ, b tel que $\|\hat{z}_{j+1}(\varepsilon,t)\|_r \le c_5\sqrt{1-t}$ pour $0\le t\le 1$, $0\le\varepsilon\le\varepsilon_1$ pourvu que $4 \le r \le \frac{1}{j+2} R_j$. Ainsi (22) est maintenant valide pour $1\le i\le j+1$, à condition de prendre $4 \le R_{j+1} = \frac{R_j}{j+2}$, ce qui suggère le choix $R_j = 4q\,\frac{(N+5)!}{(j+1)!}$ et $M = 4q(N+5)!$. *Une fois (22) établie pour* $j=1$, l'argument précédent propagera donc la validité de (22) jusqu'à $j=N+3$ avec une constante robuste adéquate $c=c(N)$ et $r \le R_{N+3} = 4q(N+5)$.

Ainsi il ne reste plus qu'à étudier $\|\hat{z}_1\|_r$ pour $r \le R_1 = 2q(N+5)!$. D'après (3) (8) on a

$$d\hat{z}_1 = (\mathrm{tay}_1 S)dw + (\mathrm{tay}_1 W)dt \tag{29}$$

et il n'est pas possible d'utiliser ici l'assertion (25) dont la validité était liée à celle supposée vraie de (22). Les définitions (5) (7) de $\mathrm{tay}_1\phi$ donnent à tout instant $t < 1$

(30) $$\begin{cases} \mathrm{tay}_1\phi = \alpha(\phi) + \beta(\phi) \quad \text{avec} \\ \alpha(\phi) = \frac{1}{\varepsilon}\,[\phi(\varepsilon,Z^\varepsilon)-\phi(0,Z^\varepsilon)];\ \beta(\phi)= \frac{1}{\varepsilon}\,[\phi(0,Z^\varepsilon)-\phi(0,Z^0)] \end{cases}$$

Clairement pour $0\leq\varepsilon,\ t<1$ on a

(31) $$\begin{cases} |\alpha(\phi)| \leq \hat{\phi}^{10}(\varepsilon,Z^\varepsilon,Z^\varepsilon) \\ |\beta(\phi)| \leq \hat{\phi}^{01}(0,Z^\varepsilon,Z^0)\ |\hat{z}_1| \end{cases}$$

En particulier 8.(50) et 8.(43) fournissent c_6 robuste tel que

(32) $$\begin{cases} \|\alpha(S)\|_M + \|\alpha(W)\|_M \leq c_6 \\ |\beta(S)| + |\beta(B)| \leq c_6\ |\hat{z}_1| \end{cases}$$

pour $0\leq t<1$, $0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_1$.

D'autre part (30) et l'identité $W \equiv B+V$ donnent

(33) $$\beta(W) = \beta(B) + \beta(V)$$

Comme $V_t(0,x)$ est (cf. 8.46)) linéaire la fonction linéaire en x suivante

(34) $$V_t(0,x) = -a(0,f_t)\ \alpha_{t1}x \quad \text{avec} \quad \alpha_{t1} = \left[\int_t^1 a(0,f_s)ds\right]^{-1}$$

on a évidemment

(35) $$[\beta(V)]_t = \frac{1}{\varepsilon}\,[V_t(0,Z_t^\varepsilon)-V_t(0,Z_t^0)] = -a(0,f_t)\ \alpha_{t1}\ \hat{z}_1(\varepsilon,t)$$

c'est-à-dire $[\beta(V)]_t = F_t\ \hat{z}_1(\varepsilon,t)$ avec (cf. 8.(47))

(36) $$|F_t + \frac{1}{1-t}\,I| \leq c_7 \qquad \text{pour } 0\leq t<1$$

où c_7 est une constante robuste.

D'après (29) (30) (33) (35) on a (indice t muet)

$$d\hat{z}_1 = [\alpha(S) + \beta(S)]dw + [\alpha(W) + \beta(B) + F\ \hat{z}_1]dt$$

Les majorations (36) (32) permettent d'appliquer le lemme 8.3 à cette équation d'Ito, et d'en tirer une constante robuste c_8 telle que

$$\|\hat{z}_1(\varepsilon,t)\|_M \leq c_8\ \sqrt{1-t} \qquad \text{pour } 0\leq t\leq 1,\ 0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_1 .$$

Comme on l'a déjà vu, ceci suffit à démarrer la récurrence (22) et à prouver finalement que

(37) $$\|\hat{z}_j(\varepsilon,t)\|_{4q(N+5)} \leq c_9 \sqrt{1-t}$$

pour $0\leq t\leq 1$, $0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_1$, $1\leq j\leq N+3$, avec c_9,ε_1 robustes en σ,b.

Les mêmes calculs qu'en (23) (24) (25) (26) (27) fournissent maintenant *grâce à (37)*, et à l'aide de (21), 8.(44), 8.(41) les majorations suivantes, avec c_{10} robuste

$$\|tay_{N+3}K + \mathscr{R}_{N+3}(K\,z\,\hat{z})\|_r \leq c_{10}$$

$$\|tay_{N+3}\Theta + \mathscr{R}_{N+3}(\Theta\,z\,\hat{z})\|_r \leq c_{10}(1-t)^{-1/2}$$

pour $0\leq t<1$, $0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_1$, pourvu que $r\leq 4q$. D'autre part 8.(41) et (37) donnent c_{11} robuste tel que

$$\|k^{01}\hat{z}_{N+3}\|_r \leq c_{11} \quad \text{et} \quad \|\theta^{01}\hat{z}_{N+3}\|_r \leq c_{11}(1-t)^{-1/2}$$

pour $0\leq t<1$, $0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_1$, $2r\leq 4q(N+5)$. Finalement on voit que, avec c_{12} robuste,

(38) $$\|\mathscr{M}_{N+3}(K\,z\,\hat{z})\|_r \leq c_{12}$$

$$\|\mathscr{M}_{N+3}(\Theta\,z\,\hat{z})\|_r \leq c_{12}(1-t)^{-1/2}$$

pour $0\leq t<1$, $0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_1$, $r\leq 4q$. Ces dernières majorations contrôlent donc (cf.(4)) les deux coefficients de l'équation d'Ito vérifiée par $d\hat{m}_{N+3}$; on en déduit comme en fin de preuve 8.2 une constante robuste c_{13} telle que $\|\hat{m}_{N+3}(\varepsilon,t)\|_{4q} \leq c_{13}$ pour $0\leq t\leq 1$, $0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_1$.

10. DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA DENSITE.

10.1. Comparaison des deux développements de $J_t(\varepsilon,Z^\varepsilon)$: Donnons-nous q,N entiers. Les théorèmes 8.2 et 9.3 fournissent, pour U_o compact fixé de U, des constantes $\tau\ \varepsilon_1\ c_1\ \nu > 0$ robustes en (σ,b) telles que pour

(1) $$|\xi-\eta| \leq c_1\rho \quad ; \quad \xi,\eta \in U_o \quad ; \quad \rho\leq\tau \quad ; \quad 0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_1$$

et pour toute ν-modification de (σ,b) , la semi-martingale $M_t^\varepsilon = J_t(\varepsilon,Z^\varepsilon)$ donnée par 6.(10) admette le développement de Taylor stochastique

(2) $$J_t(\varepsilon,Z^\varepsilon) = m_o(t) + \varepsilon m_1(t)+\ldots+ \varepsilon^{N+2}\, m_{N+2}(t) + \varepsilon^{N+3}\, \hat{m}_{N+3}(\varepsilon,t)$$

valable pour $0\leq t\leq 1$; de plus on a alors pour $0\leq j\leq N+2$, $0\leq t\leq 1$

(3) $$\|m_j(t)\|_{4q} + \|\hat{m}_{N+3}(\varepsilon,t)\|_{4q} \leq c_2(\rho)$$

avec $c_2(\rho)$ robuste en σ,b une fois ρ fixé.

D'autre part sous les conditions supplémentaires

(4) $$|\xi-\eta| \leq c_3 \qquad 0\leq\varepsilon<\rho\leq c_3$$

avec c_3 robuste, on a obtenu au § 7.3 le développement

(5) $$J_1(\varepsilon,Z^\varepsilon) = I_o + \varepsilon^2\, I_2(Z^\varepsilon) + \varepsilon^3\, \hat{I}_3(\varepsilon,Z^\varepsilon)$$

avec c_4 robuste tel que

(6) $$\Big\|\exp|I_2(Z^\varepsilon)|\,\Big\|_{4q} + \Big\|H(\varepsilon Z^\varepsilon)\,\exp|\varepsilon\hat{I}_3(\varepsilon,Z^\varepsilon)|\,\Big\|_{4q} \leq c_4$$

Définissons des v.a.numériques J_j et $\hat{J}_{N+3} = \hat{J}_{N+3}(\varepsilon)$ par

(7) $$J_j = m_j(1) \ \text{ pour } \ 0\leq j\leq N+2 \quad ; \quad \hat{J}_{N+3} = \hat{m}_{N+3}(\varepsilon,1)$$

De (2) (3) (5) (6) (7) et de l'expression 7.(11) de $I_2(Z)$, on déduit élémentairement les identités

(8) $$J_o \equiv I_o \quad ; \quad J_1 \equiv 0 \quad ; \quad J_2 \equiv I_2(Z^o) \equiv \tilde{\lambda}_2(Z^o,Z^o) + u_2$$

avec les notations du § 7, et ensuite

$$I_2(Z^\varepsilon) + \varepsilon\hat{I}_3(\varepsilon,Z^\varepsilon) \equiv J_2 + \varepsilon J_3 + \dots + \varepsilon^N J_{N+2} + \varepsilon^{N+1} \hat{J}_{N+3} \tag{9}$$

Posons

$$\begin{cases} Q = \tilde{\lambda}_2(Z^\varepsilon,Z^\varepsilon) + \varepsilon\hat{I}_3(\varepsilon,Z^\varepsilon) \\ R = I_2(Z^\varepsilon) + \varepsilon\hat{I}_3(\varepsilon,Z^\varepsilon) \end{cases} \tag{10}$$

de sorte que par (9) et 7.(11),

$$R \equiv u_2 + Q \equiv J_2 + \dots + \varepsilon^N J_{N+2} + \varepsilon^{N+1} \hat{J}_{N+3} \tag{11}$$

10.2. <u>Calcul du développement de</u> $[\pi^\varepsilon]$: D'après 7.(25) et l'identité (11), la partie principale $[\pi^\varepsilon]$ de la densité $\pi^\varepsilon(0\,1\,\xi\,\eta)$ s'écrit

$$[\pi^\varepsilon] = \varepsilon^{-m}\, p^\varepsilon(0\,1\,0\,0)\, \exp\left(-\frac{d^2(\xi,\eta)}{2\varepsilon^2}\right) E(H(\varepsilon Z^\varepsilon)e^{-R}) \tag{12}$$

Le développement standard de l'exponentielle s'écrit

$$e^{-R} = e^{-J_2}\left[\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(J_2-R)^k + \frac{(J_2-R)^{N+1}}{(N+1)!}\, e^{\delta(J_2-R)}\right]$$

avec $0\leq\delta\leq 1$, et donc par (11)

$$e^{-R} = e^{-J_2}\left[1 + \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^k q_k + \varepsilon^{N+1}\hat{q}_{N+1}\right] \quad \text{avec} \tag{13}$$

$$\hat{q}_{N+1} = \phi + \psi\, e^{\delta(J_2-R)} \tag{14}$$

où ϕ , ψ sont des polynômes universels en $\varepsilon, J_3 \dots J_{N+2}, \hat{J}_{N+3}$, de degrés $\leq N+1$ en chacune de leurs variables, et où chaque q_k est un polynôme universel $\pi_k(J_3 \dots J_{k+2})$, de degré $\leq k$ en chaque variable. D'après (3) (7) on en déduit c_5 robuste tel que

$$\begin{cases} \|\phi\|_{4q/(N+1)^2} + \|\psi\|_{4q/(N+1)^2} \leq c_5 \\ \|q_k\|_{4q/k^2} \leq c_5 \quad \text{pour} \quad 1\leq k\leq N \end{cases} \tag{15}$$

D'autre part les expressions (8) (10) de J_2, R, la majoration $e^{\delta(J_2-R)} \leq e^{|J_2|+|R|}$, et (6) donnent

$$||H(\varepsilon Z^{\varepsilon})\ e^{\delta(J_2-R)}||_{2q} \leq (c_4)^2$$

et de (14)(15) on tire alors c_6 robuste tel que

(16) $$||H(\varepsilon Z^{\varepsilon})\ \hat{q}_{N+1}||_{2q/(N+1)^2} \leq c_6$$

pourvu que $2q \geq (N+1)^2$. *On choisira donc au départ du calcul* $q=(N+1)^2$, et (16) (13) impliqueront

(17) $$\begin{cases} E\ [H(\varepsilon Z^{\varepsilon})\ e^{-R}] = E\ [e^{-J_2}\ (1 + \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^k q_k)\ H(\varepsilon Z^{\varepsilon})] + 0(\varepsilon^{N+1}) \\ \text{avec } |0(\varepsilon^{N+1})| \leq c_7\ \varepsilon^{N+1} \end{cases}$$

et c_7 robuste en σ,b.

Les conditions de validité de (17) sont d'après ce qui précède la conjonction de (1) (4) et des conditions de validité du développement 7.(25) pour $[\pi^{\varepsilon}]$, c'est-à-dire de 7.(20). Il est facile de voir que $\{(1), (4), 7.(20)\}$ *ainsi que les conditions de validité du théorème 4.2* sont sûrement vraies si on a

(18) $$\xi,\eta \in U_0 \quad ; \quad |\xi-\eta| \leq c_8\rho \quad ; \quad 0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{8}\rho \leq c_8$$

avec c_8 robuste.

D'autre part, (15) (8) (6) donnent pour $1 \leq k \leq N+2$

(19) $$||e^{-J_2}\ q_k||_{2q/N^2} \leq c_9$$

avec c_9 robuste ; comme $H(.)$ est à support dans la boule de centre 0 et rayon 2ρ, l'inégalité de Hölder et (19) donnent

(20) $$|E(e^{-J_2} q_k) - E(e^{-J_2} q_k\ H(\varepsilon Z^{\varepsilon}))| \leq c_9\ P\ [\ ||Z_{01}^{\varepsilon}||_{\infty} \geq \frac{2\rho}{\varepsilon}]^{\alpha}$$

avec $\frac{1}{\alpha} + \frac{N^2}{2q} = 1$. Le théorème 5.12 et 7.8 fournissent c_{10} robuste tel que

(21) $$P\ [\ ||Z_{01}^{\varepsilon}||_{\infty} \geq \frac{2\rho}{\varepsilon}] \leq \frac{1}{c_{10}} \exp(-c_{10}\ \frac{\rho^2}{\varepsilon^2})$$

Fixons désormais $\rho = c_8$, au vu de (18). Alors (21) montre que le 2nd membre de (20) est majoré par $c_{11}\ \varepsilon^{N+1}$ avec c_{11} robuste, d'où finalement par (17) (20)

$$(22)\qquad \begin{cases} E\,[H(\varepsilon Z^{\varepsilon})\,e^{-R}] = \sum\limits_{k=0}^{N} \mu_k\,\varepsilon^k + O(\varepsilon^{N+1}) \quad \text{avec} \\ |O(\varepsilon^{N+1})| \leq c_{12}\,\varepsilon^{N+1} \quad \text{et} \quad c_{12} \quad \text{robuste en} \quad \sigma,b \\ \mu_o = E(e^{-J_2}) \;,\; \mu_k = E(e^{-J_2} q_k) \end{cases}$$

On sait déjà (lemme 7.6) que $p^{\varepsilon}(0\,1\,0\,0)$ est C^{∞} en ε, et donc admet un bon développement de Taylor déterministe

$$(23)\qquad p^{\varepsilon}(0\,1\,0\,0) = p_o + \varepsilon p_1 + \ldots + \varepsilon^N p_N + O(\varepsilon^{N+1})$$

Le théorème A.2.2 donné en appendice, fournit c_{13} robuste par rapport aux coefficients $S^{\varepsilon}, B^{\varepsilon}$ de X^{ε} (cf. 6.2) et donc robuste en σ,b d'après 6.6, tel que

$$(24)\qquad |\partial_{\varepsilon}^{j} p^{\varepsilon}(0\,1\,0\,0)| \leq c_{13} \qquad \text{pour } 0\leq\varepsilon\leq 1;\ 0\leq j\leq N+3$$

d'où a fortiori dans (23)

$$(25)\qquad |p_j| \leq c_{13} \quad , \quad 0\leq j\leq N+2$$

et une majoration du reste $|O(\varepsilon^{N+1})|$ de (23) par $c_{13}\varepsilon^{N+1}$. De (22) (23) (25) et (12) on tire élémentairement

$$(26)\qquad \begin{cases} [\pi^{\varepsilon}] = [\varepsilon^{-m} \exp(-\dfrac{d^2(\xi,\eta)}{2\varepsilon^2})]\,[v_o + \varepsilon v_1 + \ldots + \varepsilon^N v_N + O(\varepsilon^{N+1})] \\ \text{avec } |O(\varepsilon^{N+1})| \leq c_{14}\,\varepsilon^{N+1}, \quad \text{et } |v_j| \leq c_{14} \quad \text{pour} \quad 0\leq j\leq N \end{cases}$$

où c_{14} est une constante robuste en σ,b. L'estimation 4.2 de la partie évanescente $\pi^{\varepsilon}-[\pi^{\varepsilon}]$, donne évidemment, puisque ρ est maintenant fixé, c_{15} robuste tel que

$$(27)\qquad 0\leq\pi^{\varepsilon}-[\pi^{\varepsilon}] \leq [\varepsilon^{-m} \exp(-\frac{d^2(\xi,\eta)}{2\varepsilon^2})]\,(c_{15}\varepsilon^{N+1})$$

Finalement (18) et le choix $\rho = c_8$ garantissent

$$(28)\qquad \begin{cases} \pi(0,\varepsilon^2,\xi,\eta) = [\varepsilon^{-m} \exp(-\dfrac{d^2(\xi,\eta)}{2\varepsilon^2})]\,[v_o + \varepsilon v_1 + \ldots + \varepsilon^N v_N + O(\varepsilon^{N+1})] \\ \text{avec } |O(\varepsilon^{N+1})| \leq c_{16}\,\varepsilon^{N+1} \quad \text{et} \quad c_{16} \quad \text{robuste en} \quad \sigma,b\ . \end{cases}$$

Les théorèmes 1.2 et 2.4 sont à ce point pratiquement démontrés, à condition de prouver que les v_{2j+1} sont nuls, ce qui va être fait au paragraphe suivant.

10.3. Nullité des coefficients d'ordre impair : Lemme : Avec les hypothèses et notations de 10.2 on a $p_{2j+1} = \mu_{2j+1} = v_{2j+1} = 0$ pour $1 \leq 2j+1 \leq N+2$.

Preuve : Les formules 8.(0), 8.(2), 8.(5) qui regroupent les définitions de S,B,W,K,Θ à partir des coefficients initiaux σ,b ont a priori été donné pour $\varepsilon \geq 0$. *Mais elles gardent clairement un sens pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}$, après modification standard des coefficients initiaux σ,b. *Par conséquent* $X^{\varepsilon},Z^{\varepsilon},M_t^{\varepsilon}=J_t(\varepsilon,Z^{\varepsilon})$ *sont aussi définis pour* $\varepsilon \in \mathbb{R}$, *ainsi que la densité* p^{ε} *de* X^{ε}.

On a immédiatement les identités

(29) $$S_t(\varepsilon,x) \equiv S_t(-\varepsilon,-x) \qquad B_t(\varepsilon,x) \equiv -B_t(-\varepsilon,-x)$$

qui par 8.(0) entraînent, w étant la trajectoire globale du brownien, l'égalité P.presque sûre en w

(30) $$X_t^{\varepsilon}(w) \equiv -X_t^{-\varepsilon}(-w) \qquad \text{pour } 0 \leq t \leq 1$$

Donc X^{ε} *a même loi que* $-X^{-\varepsilon}$, ce qui entraîne

(31) $$p^{\varepsilon}(s\,t\,x\,y) \equiv p^{-\varepsilon}(s,t,-x,-y)$$

pour tout $0 \leq s < t \leq 1$, $x,y \in \mathbb{R}^m$. En particulier on a

(32) $$p^{\varepsilon}(0\,1\,0\,0) \equiv p^{-\varepsilon}(0\,1\,0\,0) \qquad \text{pour tout } \varepsilon \in \mathbb{R}$$

(33) $$\partial_x \log p^{\varepsilon}(t\,1\,z\,0) \equiv -\partial_x \log p^{-\varepsilon}(t,1,-z,0)$$

pour tout $0 \leq t < 1$, $z \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. De (33) (29) et 8.(2) on déduit les identités

(34) $$S_t(\varepsilon,x) \equiv S_t(-\varepsilon,-x) \quad \text{et} \quad W_t(\varepsilon,x) \equiv -W_t(-\varepsilon,-x)$$

et donc par 8.(1) l'égalité P.presque sûre en w, pour chaque $\varepsilon \in \mathbb{R}$

(35) $$Z_t^{\varepsilon}(w) \equiv -Z_t^{-\varepsilon}(-w) \qquad \text{pour } 0 \leq t \leq 1$$

De même (33) et 8.(5) donnent les identités

(36) $$K_t(\varepsilon,x) \equiv -K_t(-\varepsilon,-x) \quad \text{et} \quad \Theta_t(\varepsilon,x) \equiv \Theta_t(-\varepsilon,-x)$$

L'équation d'Ito 8.(4), et les relations (35) (36) entraînent pour chaque $\varepsilon \in \mathbb{R}$, l'égalité P.presque sûre en w

(37) $$M_t^{\varepsilon}(w) \equiv J_t(\varepsilon,Z^{\varepsilon}(w)) \equiv J_t(-\varepsilon,Z^{-\varepsilon}(-w)) \equiv M_t^{-\varepsilon}(-w)$$

pour $0 \leq t \leq 1$.

De (35) (36) et des développements de Taylor de $Z^{\varepsilon},M^{\varepsilon}$ on conclut que pour tout $j\geq 0$

(38) *le processus* $\{z_0 \ldots z_j \; ; \; m_0 \ldots m_j\}$ *a même loi que le processus* $\{-z_0, z_1, \ldots, (-1)^{j+1} z_j \; ; \; m_0 \, , \; -m_1, \ldots (-1)^j m_j\}$.

En particulier la définition (7) des J_j entraîne alors pour tout $j\geq 0$

(39) *le vecteur aléatoire* $(J_0, \ldots, J_j)$ *a même loi que le vecteur aléatoire* $(J_0, -J_1, \ldots, (-1)^j \, J_j)$

Par construction (cf. (11) (13)), les polynômes $\pi_k(J_3 \ldots J_{k+2}) \equiv q_k$ vérifient *l'identité de séries formelles*

(40)
$$\exp\Big(\sum_{j\geq 2} \varepsilon^{j-2} J_j\Big) \equiv e^{-J_2} \Big[1 + \sum_{k\geq 1} \varepsilon^k \, \pi_k(J_3, \ldots, J_{k+2})\Big]$$

De (39) (40) on conclut que pour tout $k\geq 0$, avec $q_0 \equiv 1$

(41) $e^{-J_2} q_k$ *a même loi que* $(-1)^k \, e^{-J_2} \, q_k$

et donc par (22)

(42)
$$\mu_{2k+1} = 0 \quad \text{pour } k\geq 0$$

Comme (23) (32) donnent immédiatement

(43)
$$p_{2k+1} = 0 \quad \text{pour } k\geq 0$$

l'identité formelle évidente

$$\Big(\sum_{k\geq 0} \varepsilon^k p_k\Big) \Big(\sum_{j\geq 0} \varepsilon^j \mu_j\Big) \equiv \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k v_k$$

fournit finalement

(44)
$$v_{2k+1} = 0 \quad \text{pour } k\geq 0$$

10.4. <u>Calcul explicite des</u> p_j : *Les nombres* $p_j = \frac{1}{j!} \left[\partial_\varepsilon^j \, p^{\varepsilon}(0\,1\,0\,0)\right]_{\varepsilon=0}$ *peuvent se calculer explicitement à partir d'intégrales multiples de noyaux du type* [*(polynôme)* x *(noyau gaussien)*] . En effet, on vient de voir que les p_{2j+1} sont nuls, et $p_0 = p^0(0\,1\,0\,0)$ a été calculé en 6.4. Pour les p_{2j}, $2j\geq 2$ on utilise (cf. appendice A.2.7) la représentation explicite de $p^{\varepsilon}(s\,t\,x\,y)$ obtenue par la méthode de la paramétrix

$$p^{\varepsilon} = \gamma + \gamma^{*}(\sum_{r\geq 1} \eta^{*r})$$

où γ, η sont explicites (cf. A.2.7). Les estimations du § A.2.16 montrent que $\eta = \varepsilon\phi$ où le noyau ϕ vérifie $\sum_{r\geq 1} |\phi|^{*r} < \infty$, ce qui donne (cf. A.2.16)

$$\partial_{\varepsilon}^{j} p^{\varepsilon} = \partial_{\varepsilon}^{j} [\gamma + \gamma * \sum_{1\leq r\leq j} \eta^{*r}] \quad \underline{\textit{en } \varepsilon = 0}$$

Comme (cf. A.2.15) γ et η vérifient l'identité naturelle

$$\partial_{\varepsilon}(\gamma * \eta^{*r}) = \partial_{\varepsilon}\gamma * \eta^{*r} + \gamma * \partial_{\varepsilon}\eta * \eta^{*(r-1)} + \ldots + \gamma * \eta^{*(r-1)}\, \partial_{\varepsilon}\eta$$

on voit que p_j est somme finie de convolutions du type $\psi_1 * \ldots * \psi_k$ où chaque noyau ψ_k est soit de la forme $(\partial_{\varepsilon}^{i}\gamma)_{\varepsilon=0}$ avec $i \leq j$, soit de la forme $(\partial_{\varepsilon}^{i}\eta)_{\varepsilon=0}$ avec $i \leq j$; ces deux derniers noyaux (cf. A.2.7, A.2.9, A.2.16) sont de la forme [(polynôme) x (noyau gaussien)] et s'explicitent élémentairement.

APPENDICE

A.1. Calcul polynomial formel et restes de Taylor :

Nous exposons ici *une identité polynômiale élémentaire*, ingrédient essentiel pour décrire efficacement le système en cascade vérifié par les *restes de Taylor stochastiques* associés à la solution d'une équation d'Ito paramétrée.

A.1.1. Une identité polynômiale :

Théorème : Considérons des *variables formelles* $\{\varepsilon\ ;\ Z\ ;\ Y_i,\ i \geq 1\ ;\ \hat{Y}_j,\ j \geq 1\}$. Soit $\mathcal{P}$ l'anneau des polynômes en ces variables, à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Alors pour tout couple d'entiers j, n avec $1 \leq j \leq n$ il existe dans $\mathcal{P}$ des polynômes universels $\phi_{n,j}(\varepsilon, Y)$ et $R_{n+1,j}(Y,\hat{Y})$ donnés par (6) (7) tels que les $(n+1)$ relations polynômiales

$$\text{(1)}\qquad \begin{cases} Z = \varepsilon\, \hat{Y}_1 & \text{pour } i = 1 \\ Z = \varepsilon\, Y_1 + \ldots + \varepsilon^{i-1}\, Y_{i-1} + \varepsilon^i\, \hat{Y}_i & \text{pour } 2 \leq i \leq n+1 \end{cases}$$

impliquent l'identité dans $\mathcal{P}$

$$\text{(2)}\qquad Z^j \equiv \phi_{n,j}(\varepsilon, Y) + \varepsilon^{n+1}\, R_{n+1,j}\,(Y,\hat{Y}).$$

Remarque : La formulation puriste du résultat précédent devrait se faire en termes d'idéaux, mais nous préférons un langage plus terre-à-terre.

Preuve : Introduisons quelques notations. Le multi-indice vide est noté $\emptyset$; les multi-indices $\alpha \neq \emptyset$ sont du type $\alpha = (i_1 \ldots i_k)$ avec $k, i_1, \ldots, i_k \geq 1$; on pose alors

$$\text{(3)}\qquad \begin{cases} |\alpha| = i_1 + \ldots + i_k\ ;\ \dim \alpha = k\ ;\ \max \alpha = \max\{i_1, \ldots, i_k\} \\ Y^\alpha = Y_{i_1} \ldots Y_{i_k}\ ;\ \hat{Y}^\alpha = \hat{Y}_{i_1} \ldots \hat{Y}_{i_k} \\ |\emptyset| = \dim \emptyset = \max \emptyset = 0, \quad \text{et} \quad Y^\emptyset = \hat{Y}^\emptyset = 1. \end{cases}$$

Pour $1 \leq j \leq n$ considérons l'ensemble de paires de multi-indices

$$\text{(4)}\qquad E(n+1,j) = \{(\alpha,\beta) \mid |\alpha| + |\beta| = n+1\ ;\ \dim \alpha + \dim \beta = j;\ \dim \beta \geq 1\ ;\ \max \alpha \leq n-1\}$$

et remarquons que l'on a toujours l'implication

(5) $$(\alpha,\beta) \in E(n+1,j) \implies \max \alpha,\ \max \beta \leq n+2-j.$$

Vérifions par récurrence que (2) est vraie avec les formules suivantes où $1 \leq j \leq n$

(6) $$\phi_{n\,j}(\varepsilon,Y) = \sum_{\{|\alpha| \leq n, \dim \alpha = j\}} \varepsilon^{|\alpha|}\, Y^{\alpha}$$

(7) $$R_{n+1,j}(Y,\hat{Y}) = \sum_{(\alpha,\beta)\in E(n+1,j)} c_{\alpha\,\beta\,n\,j}\ Y^{\alpha}\,\hat{Y}^{\beta}$$

où les entiers $c_{\alpha\,\beta\,n\,j}$ sont des constantes universelles valant 0 ou 1.

Pour $j=1$, l'assertion $\{(1) \implies (2)\}$ et (6) (7) sont trivialement vraies avec

(8) $$\phi_{n\,1} \equiv \varepsilon\, Y_1 + \ldots + \varepsilon^n Y_n \;;\; R_{n+1,1} \equiv \hat{Y}_{n+1}$$

Le passage de j à $(j+1)$ se réduit à écrire $Z^{j+1} = Z^j Z$ et à remplacer Z^j par $(\phi_{n-1,j} + \varepsilon^n R_{n\,j})$ d'où

$$Z^{j+1} = \phi_{n-1,j}\, Z + \varepsilon^n R_{n\,j}\, Z\,.$$

Dans $R_{n\,j}Z$ on remplace Z par $\varepsilon\,\hat{Y}_1$; dans un monôme typique $\varepsilon^{|\alpha|}\,Y^{\alpha}\,Z$ de $\phi_{n-1,j}$ on remplace Z par $(\varepsilon\,Y_1 + \ldots + \varepsilon^{n-|\alpha|}\,Y_{n-|\alpha|} + \varepsilon^{n+1-|\alpha|}\,\hat{Y}_{n+1-|\alpha|})$ d'où la bonne valeur (6) de $\phi_{n,j+1}$ et la formule de récurrence

(9) $$R_{n+1,j+1} = R_{n,j}\,\hat{Y}_1 + \sum_{\{|\alpha| \leq n-1, \dim \alpha = j\}} Y^{\alpha}\,\hat{Y}_{n+1-|\alpha|}$$

qui permet de vérifier la stabilité de (7).

A.1.2. <u>Formes multilinéaires symétriques</u> : Soit F un espace euclidien ; *supposons les variables* Z, Y_i, $\hat{Y}_j$ *à valeurs dans* F, *et* ε *a valeurs dans* $\mathbb{R}$. *Soit* Q *une forme* j-*multilinéaire symétrique sur* F^j, *à valeurs dans un espace euclidien* G.

Pour tout i,r,α,β *avec* $r + \dim \alpha + \dim \beta = j$ posons, quand $\alpha = (i_1 \ldots i_k)$, $\beta = (j_1 \ldots j_\ell)$

(10) $$Q\,\varepsilon^i\,Z^r\,Y^{\alpha}\,\hat{Y}^{\beta} = \varepsilon^i\,Q(Z\,\ldots\,Z\ \ Y_{i_1}\ldots Y_{i_k}\ \ \hat{Y}_{j_1}\ldots\hat{Y}_{j_\ell}).$$

Il est clair que l'opération Q ainsi définie se prolonge $\mathbb{Z}$-linéairement aux polynômes de $\mathscr{P}$ qui sont combinaisons linéaires de monômes du type ci-dessus, et est à valeurs dans G. Le th. A.1.1 implique donc immédiatement le corollaire suivant.

A.1.3. Identité polynômiale pour formes multilinéaires symétriques :

Théorème : Dans la situation A.1.2, les (n+1) relations polynômiales (1) entre $Z, Y, \hat{Y}, \varepsilon$ impliquent pour toute forme j-multilinéaire symétrique $Q : F^{\otimes j} \to G$ l'identité

(11) $$QZ^j = \sum_{\{|\alpha|\leq n, \dim \alpha = j\}} \varepsilon^{|\alpha|} Q\, Y^\alpha + \varepsilon^{n+1} Q\, R_{n+1,j}(Y,\hat{Y})$$

avec les conventions (3) (10).

A.1.4. Composition des polynômes de Taylor : Pour $n \geq 1$ considérons le polynôme "de Taylor" typique

(12) $$\psi(\varepsilon,Z) = \sum_{0\leq i+j\leq n} \varepsilon^i \psi^{ij} Z^j$$

où les ψ^{ij} sont des fonctionnelles j-multilinéaires symétriques sur F^j à valeurs dans G, arbitraires pour le moment. *Supposons les* (n+1) *relations polynômiales* (1) *vérifiées par* $Z\,Y\,\hat{Y}\,\varepsilon$. Développons $\psi^{ij}Z^j$ par (11) en remplaçant n par (n-i). On obtient immédiatement l'identité en $\varepsilon\, Z\, Y\, \hat{Y}$

(13) $$\psi(\varepsilon,Z) = \sum_{0\leq k\leq n} \varepsilon^k \mathscr{D}_k(\psi,Y) + \varepsilon^{n+1} \hat{\psi}_{n+1}(Y,\hat{Y}) \qquad \text{avec}$$

(14) $\mathscr{D}_k(\psi,Y) = \sum_{i,j,\alpha} \psi^{ij} Y^\alpha$ où Σ est restreinte à l'ensemble $\{\dim \alpha = j,\ i+|\alpha| = k,\ i+j\leq n\}$

et dans laquelle le polynôme $\hat{\psi}_{n+1}$ s'écrit

(15) $$\hat{\psi}_{n+1}(Y,\hat{Y}) = \psi^{01}\, \hat{Y}_{n+1} + \mathscr{R}_{n+1}(\psi\, Y\, \hat{Y}) \qquad \text{avec}$$

(16) $$\mathscr{R}_2(\psi\, Y\, \hat{Y}) \equiv 0 \quad \textit{pour} \quad n+1 = 2$$

(17) $$\mathscr{R}_{n+1}(\psi\, Y\, \hat{Y}) = \sum_{\left\{\substack{2\leq i+j\leq n \\ 1\leq j;\, 0\leq i}\right\}} \psi^{ij} R_{n+1-i,j}(Y,\hat{Y}) \quad \textit{pour} \quad n+1 \geq 3.$$

D'après (4) (5) (7) (17) le polynôme universel $\mathscr{R}_{n+1}$ s'écrit encore *pour* $n+1 \geq 3$:

(18) $$\mathscr{R}_{n+1}(\psi\, Y\, \hat{Y}) = \sum_{(i\, j\, \alpha\, \beta) \in \mathscr{E}(n+1)} r_{i\, j\, \alpha\, \beta}(n)\, \psi^{ij}\, Y^\alpha \hat{Y}^\beta$$

où les $r_{ij\alpha\beta}(n)$ sont des constantes entières universelles et l'ensemble d'indices $\mathscr{E}(n+1)$ est défini par

$$(19)\qquad \begin{cases} 2 \le i+j \le n \ ; \quad i + |\alpha| + |\beta| = n+1 \ ; \quad \dim\alpha + \dim\beta = j \ ; \quad 1 \le \dim\beta \ ; \\ \max\alpha \le n-1-i \ ; \quad \max\alpha,\ \max\beta \le n+2-i-j. \end{cases}$$

En particulier *le polynôme* $\mathscr{R}_{N+1}(\psi\, Y\, \hat{Y})$ *ne dépend que de* $Y_1 \ldots Y_{n-1}$, $\hat{Y}_1 \ldots \hat{Y}_n$ *et des* ψ^{ij}, $2 \le i+j \le n$; *le polynôme* $\mathscr{D}_k(\psi, Y)$ *ne dépend que de* $Y_1 \ldots Y_k$ *et des* ψ^{ij}, $0 \le i+j \le k$.

A.1.5. <u>Notations liées à la formule de Taylor</u> : Soient F, G deux espaces euclidiens, $\phi : \mathbb{R} \times F \to G$ une fonction de (ε, x), de classe finie assez grande pour que toutes les dérivées en vue existent. On définit ϕ^{ij}, et $TAY_{j+1}\phi : \mathbb{R} \times F \times F \to G$ par

$$(20)\qquad \phi^{ij} = \frac{1}{i!j!}\, \partial_\varepsilon^i \partial_x^j\, \phi$$

$$(21)\qquad \phi(\varepsilon, y) \equiv \sum_{0 \le i+\ell \le j} \varepsilon^i\, \phi^{i\ell}(0,x)(y-x)^\ell + \varepsilon^{j+1}\, TAY_{j+1}\phi(\varepsilon\, y\, x).$$

Avec ces notations, les résultats de A.1.4 fournissent immédiatement le théorème qui suit.

A.1.6. <u>Restes de Taylor polynômiaux explicites</u> :

<u>Théorème</u> : Pour tout $n \ge 1$, les polynômes universels $\mathscr{D}_k$, $0 \le k \le n$, et $\mathscr{R}_{n+1}$ définis par (14) (16) (18) (19) ont la propriété suivante : quelle que soit la fonction $\phi(\varepsilon, x)$ de classe n, avec $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $x \in F$ espace euclidien, à valeurs vectorielles, quels que soient les vecteurs Z, Z^0, $z_1 \ldots z_n$, $\hat{z}_1 \ldots \hat{z}_n$, de F liés à ε par les relations

$$(22)\qquad Z = Z^0 + \varepsilon z_1 + \ldots + \varepsilon^j z_j + \varepsilon^{j+1}\, \hat{z}_{j+1} \qquad 0 \le j \le n$$

on a, en posant $\varphi^{ij} = \phi^{ij}(0, Z^0)$ et $\varphi = \{\varphi^{ij},\ 0 \le i,\ j \le n\}$, l'identité

$$(23)\quad \phi(\varepsilon, Z) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k\, \mathscr{D}_k(\varphi, z) + \varepsilon^{n+1}[\varphi^{01}\, \hat{z}_{n+1} + \mathscr{R}_{n+1}(\varphi, z, \hat{z}) + TAY_{n+1}\, \phi(\varepsilon, Z, Z^0)]$$

où $z = (z_1 \ldots z_n)$, $\hat{z} = (\hat{z}_1 \ldots \hat{z}_n)$.

A.1.7. <u>Application aux restes de Taylor stochastiques</u> : Considérons maintenant une équation d'Ito $dZ^{\varepsilon} = S^{\varepsilon}\, dw + W^{\varepsilon}\, dt$ où les coefficients dépendent du paramètre ε . Le développement de Taylor précis de S^{ε}, W^{ε} par la formule (23) ci-dessus *explicite* immédiatement, comme dans [2] le système en cascade vérifié par les coefficients et les restes des développements de Taylor stochastiques de Z^{ε} . D'où le théorème suivant, qui précise utilement [15] [7] [2].

A.1.8. <u>Système en cascade pour restes de Taylor stochastiques</u> :

<u>Théorème</u> : Soit Z_t^{ε} une diffusion, non homogène dans le temps, sur un ouvert U de $\mathbf{R}^m$, vérifiant $Z_0^{\varepsilon} \equiv x_0 \in U$, paramétrée par $\varepsilon \geq 0$, et solution pour $0 \leq t < 1$ de

(24) $$dZ_t^{\varepsilon} = S_t(\varepsilon, Z_t^{\varepsilon})dw_t + W_t(\varepsilon, Z_t^{\varepsilon})dt$$

où les coefficients $S_t(\varepsilon,x)$, $W_t(\varepsilon,x)$ sont de classe $N+1$ en ε, z, $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $z \in U$, avec toutes leurs dérivées continues en $t \in [0\ 1[$. Alors pour tout $0 \leq j \leq N$, Z^{ε} admet en $\varepsilon = 0$ les développements de Taylor stochastiques

(25) $$Z^{\varepsilon} = Z^0 + \varepsilon z_1 + \ldots + \varepsilon^j z_j + \varepsilon^{j+1}\, \hat{z}_{j+1}$$

où les $z_j = \frac{1}{j!}\, (\partial_{\varepsilon}^j\, Z^{\varepsilon})_{\varepsilon=0}$ sont des semi-martingales locales de temps de vie égal à celui de Z^0, données (cf. [15] [7] [2]) par le système en cascade formellement déduit de (25) par dérivations successives en $\varepsilon = 0$; de plus (cf. [2]) les restes $\hat{z}_{j+1}(\varepsilon,t)$ sont des semi-martingales (locales) en t, de temps de vie égal à celui de Z^0, qui vérifient pour $j+1 \geq 1$ le système en cascade suivant

(26) $$d\hat{z}_{j+1} = \mathfrak{M}_{j+1}(S\ z\ \hat{z})dw + \mathfrak{M}_{j+1}(W\ z\ \hat{z})\ dt$$

où pour toute fonction différentiable $\phi_t(\varepsilon,x)$, la notation $\mathfrak{M}_{j+1}(\phi\ z\ \hat{z})$ désigne une semi-martingale ne dépendant que de $z_1 \ldots z_j$, $\hat{z}_1 \ldots \hat{z}_{j+1}$, Z^0, Z^{ε} et calculée par *(indice de temps* t *sous entendu partout)*

(27) $$\mathfrak{M}_1(\phi\ z\ \hat{z}) = TAY_1\ \phi(\varepsilon, Z^{\varepsilon}, Z^0), \quad \text{et pour} \quad j+1 \geq 2$$

(28) $$\mathfrak{M}_{j+1}(\phi\ z\ \hat{z}) = TAY_{j+1}\phi(\varepsilon, Z^{\varepsilon}, Z^0) + \varphi^{0\,1}\, \hat{z}_{j+1} + \mathscr{R}_{j+1}(\varphi\ z\ \hat{z})$$

avec $\varphi = \{\varphi^{ij}\ ;\ i+j \geq 0\}$, et $\varphi_t^{ij} = \phi_t^{ij}(0, Z_t^0)$, et toutes les notations introduites dans le paragraphe A.1.

A.2. Diffusions dépendant d'un paramètre.

A.2.1. Le modèle : Considérons sur $\mathbb{R}^m$ une famille de diffusions non homogènes dans le temps X_t^ε, $0 \leq t \leq 1$, paramètrées par $\varepsilon \in [0\,1]$, solution de

$$(1) \qquad dX^\varepsilon = S(\varepsilon,X^\varepsilon)dw + B(\varepsilon,X^\varepsilon)dt$$

où w est le brownien k-dimensionnel, et les champs $S_t(\varepsilon,x)$ et $B_t(\varepsilon,x)$ sont de classe 1 en $(t,\varepsilon\, x)$, et de classe $N \geq 3$ en (ε,x). Posons $A_t = S_t S_t^*$ et notons $L_{ij} = \partial_\varepsilon^i\, \partial_x^j$. On suppose l'existence de constantes $c_o\ \nu_1\ \nu_2$ avec $c_o > 0$ et $0 < \nu_1 \leq \nu_2$, et d'une fonction continue $t \to a(t)$, à valeurs dans les matrices symétriques *définies positives* d'ordre m, vérifiant pour tout $0 \leq \varepsilon,\ t \leq 1$, $x \in \mathbb{R}^m$

$$(2) \qquad |\partial_t A_t(\varepsilon,x)| + |\partial_t\, B_t(\varepsilon,x)| \leq c_o$$

$$(3) \qquad |L_{ij}A_t(\varepsilon,x)| + |L_{ij}B_t(\varepsilon,x)| \leq c_o(1 + |x|^i) \quad \text{pour} \quad 0 \leq i,\ j \leq N$$

$$(4) \qquad \frac{1}{\nu_2}\, a(t) \leq A_t(\varepsilon,x) \leq \frac{1}{\nu_1}\, a(t).$$

On posera $\operatorname{dist}(a) = \|a\|_\infty + \|a^{-1}\|_\infty$.

Remarque : *Par exemple*, lorsque $\tilde{\sigma}(t,x)$, $\tilde{b}(t,x)$ sont des coefficients matriciels à distorsion et N-rigidité bornées, les coefficients

$$S_t(\varepsilon,x) = \tilde{\sigma}(\varepsilon^2 t,\ f_t + \varepsilon x) \qquad B_t(\varepsilon,x) = \varepsilon\tilde{b}(\varepsilon^2 t,\ f_t + \varepsilon x)$$

avec f_t de classe 1 en t, vérifient (2) (3) (4). Si de plus $\tilde{\sigma}$, $\tilde{b}$ sont déduits de σ, b par modification standard (cf. § 6.1), les constantes c_o et ν_1,ν_2, $\operatorname{dist}(a)$ qui interviennent alors dans (2) (3) (4) sont respectivement robuste et ultra-robuste en σ, b.

Revenons au cas général (1) (2) (3) (4) et notons $p^\varepsilon(s\,t\,x\,y)$ la densité de X^ε. Les estimations de p^ε, $\log p^\varepsilon$, et de leurs dérivées introduisent *les noyaux gaussiens* G_μ, $\mu > 0$ définis par

$$(5) \qquad G_\mu(s\,t\,x\,y) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}}\, \mu^{\frac{m}{2}} (\det \alpha_{st})^{\frac{1}{2}} \exp[-\tfrac{\mu}{2}\, \alpha_{st}\, (y-x)^2] \quad \text{avec} \quad \alpha_{st} = [\int_s^t a(u)du]^{-1}.$$

Le noyau G_μ est la densité du processus gaussien centré W^μ défini par $dW_t^\mu = \frac{1}{\mu}\sqrt{a(t)}\, d\tilde{w}_t$ où $\tilde{w}$ est un brownien m-dimensionnel. *En particulier* G_μ *vérifie l'équation de Chapman-Kolmogorov.*

A.2.2. Majoration des dérivées de la densité :

Théorème : Considérons sur $\mathbb{R}^m$ une famille X^ε de diffusions paramètrées vérifiant (1) (2) (3) (4). Pour tout μ_1 tel que $0 < \mu_1 < \nu_1$ il existe alors une constante c, ne dépendant que de m, N, ν_1, ν_2, μ_1, c_0, dist(a), telle que la densité p^ε de X^ε vérifie

(6) $$|\partial_\varepsilon^i \partial_x^j p^\varepsilon(s\,t\,x\,y)| \leq c(t-s)^{-\frac{j}{2}} G_\mu(s\,t\,x\,y)$$

pour $0 \leq i, j \leq N$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $0 \leq s \leq t \leq 1$, $x, y \in \mathbb{R}^m$.

Preuve : Elle est basée sur la méthode de la paramétrix. Les longs calculs occupent les § A.2.7 à A.2.14.

A.2.3. Minoration de la densité :

Théorème : Considérons sur $\mathbb{R}^m$ les diffusions X^ε vérifiant (1) (2) (3) (4). Pour tous μ_1, μ_2 vérifiant $0 < \mu_1 < \nu_1 \leq \nu_2 < \mu_2$, il existe une constante $c > 0$, ne dépendant que de m, N, ν_1, ν_2, μ_1, μ_2, c_0, dist(a), telle que la densité p^ε de X^ε vérifie en tout point $(s\,t\,x\,y)$ et pour tout $\varepsilon \in [0\,1]$

$$\frac{1}{c} G_{\mu_2}(s\,t\,x\,y) \leq p^\varepsilon(s\,t\,x\,y) \leq c\, G_{\mu_1}(s\,t\,x\,y) .$$

Preuve : Elle utilise le th. A.2.2 et la minoration locale 7.7 de p^ε, qui comme nous l'avons signalé au passage a été prouvée sans faire appel au résultat A.2.3. La démonstration complète, basée sur le principe du maximum, est donnée en A.2.15.

A.2.4. Majoration des dérivées du logarithme de la densité :

Théorème : Considérons sur $\mathbb{R}^m$ les diffusions X^ε paramètrées par $\varepsilon \geq 0$ vérifiant (1) (2) (3) (4). Alors pour tout $\nu > \nu_2 - \nu_1 \geq 0$ il existe des constantes $c, n > 0$ ne dépendant que de m, N, ν_1, ν_2, ν, c_0, dist(a) telles que la densité p^ε de X^ε vérifie pour $1 \leq i, j \leq N$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $0 \leq s < t \leq 1$, $x, y \in \mathbb{R}^m$,

$$|\partial_\varepsilon^i \partial_x^j \log p^\varepsilon(s\,t\,x\,y)| \leq c(t-s)^{-\frac{j}{2}} (1+|y|^n) \exp[\nu N \alpha_{st}(x-y)^2] \quad \text{avec} \quad \alpha_{st} = [\int_s^t a(u)du]^{-1}.$$

Preuve : Posons $L_{ij} = \partial_\varepsilon^i \partial_x^j$; *pour* $i+j \geq 1$ une récurrence élémentaire prouve l'existence d'un polynôme universel R_{ij} à ceofficients entiers, tel que toute fonction différentiable $F(\varepsilon,x) > 0$ vérifie l'identité

$L_{ij}(\log F) \equiv R_{ij}\{\ldots,H_{k\ell},\ldots\}$ où $0 \leq k \leq i$, $0 \leq \ell \leq j$, $1 \leq k+\ell$ et $H_{k\ell} = \frac{1}{F} L_{k\ell} F$. De plus les monômes de R_{ij} sont de la forme $(H_{k_1\ell_1})^{\alpha_1} \times \ldots \times (H_{k_q\ell_q})^{\alpha_q}$ avec $\alpha_1 k_1 + \ldots + \alpha_q k_q = i$, $\alpha_1 \ell_1 + \ldots + \alpha_q \ell_q = j$.

Soit $\nu_3 > \nu_2 - \nu_1 \geq 0$. On peut alors *fixer* μ_1, μ_2 tels que $\nu_3 \geq \mu_2 - \mu_1$ et $0 < \mu_1 < \nu_1 \leq \nu_2 < \mu_2$. Posons $\nu = \mu_2 - \mu_1$ et remarquons que (5) fournit c tel que

$$\frac{G_{\mu_1}}{G_{\mu_2}}(s\,t\,x\,y) \leq c \exp[\tfrac{\nu}{2}\,\alpha_{st}.(x-y)^2]$$

pour $0 \leq s < t \leq 1$, $x, y \in \mathbb{R}^m$. Mais la majoration A.2.2 de $L_{k\ell}\, p^\varepsilon$ et la minoration A.2.3 de p^ε donnent alors des constantes c, $n > 0$ telles que

$$\frac{|L_{k\ell} p^\varepsilon(s\,t\,x\,y)|}{p^\varepsilon(s\,t\,x\,y)} \leq c(t-s)^{-\frac{\ell}{2}}\,(1+|y|^n)\, \exp[\tfrac{\nu}{2}\,\alpha_{st}.(x-y)^2]$$

pour $0 \leq k, \ell \leq N$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $0 \leq s < t \leq 1$, $x, y \in \mathbb{R}^m$.

La substitution $F(\varepsilon,x) = p^\varepsilon(s\,t\,x\,y)$ dans l'identité polynômiale ci-dessus fournit alors immédiatement des constantes c_1, $n_1 > 0$ telles que

$$|L_{ij} \log p^\varepsilon(s\,t\,x\,y)| \leq c_1(t-s)^{-\frac{j}{2}}\,(1+|y|^{n_1})\, \exp[\tfrac{\nu}{2}\,(i+j)\,\alpha_{st}.(x-y)^2]$$

A.2.5. Dérivées du drift complémentaire :

Théorème : Soient X^ε des diffusions paramètrées par $\varepsilon \geq 0$, vérifiant (1) (2) (3) (4). Soit p^ε la densité de X^ε, et soit

$$V_s(\varepsilon,x) = A_s(\varepsilon,x)\, \partial_x \log p^\varepsilon(s\,1\,x\,0)$$

le drift complémentaire introduit par l'équation du pont de X^ε. Alors pour tout $\nu > \nu_2 - \nu_1 \geq 0$, il existe une constante c, ne dépendant que de m, N, ν_1, ν_2, ν, c_0, dist(a), telle que

$$|\partial_\varepsilon^i\, \partial_x^j\, V_s(\varepsilon,x)| \leq c(1-s)^{-\frac{j+1}{2}} \quad \exp[\nu\, N\, \alpha_{s1}\,.\, x^2]$$

pour tout $0 \leq i, j \leq N-1$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $0 \leq s < 1$, $x, y \in \mathbb{R}^m$.

Preuve : La formule de Leibnitz fournit c constant tel que pour $0 \leq i, j \leq N-1$ et tout ε, s, x, on ait

$$|L_{ij}V_s(\varepsilon,x)| \leq c \sum_{\{\substack{i_1+i_2=i \\ j_1+j_2=j}\}} |L_{i_1j_1} A_s(\varepsilon,x)|\ |L_{i_2j_2}\, \partial_x \log p^\varepsilon(s\,1\,x\,0)\,| .$$

Fixons ν_3 tel que $\nu > \nu_3 > \nu_2-\nu_1$. De (3) et A.2.4 on tire alors c_1, $n > 0$ constants tels que dans les mêmes conditions que ci-dessus,

$$|L_{ij}V_s(\varepsilon,x)| \leq c_1(1 + |x|^n)\ (1-s)^{-\frac{j+1}{2}} \exp(\nu_3 N\ \alpha_{s1}.x^2).$$

D'après (5) on a $\alpha_{s\,1} \geq \frac{c_2}{1-s}$ avec c_2 constant. Comme $1-s \leq 1$, on a clairement une constante c_3 telle que

$$|x|^n \leq c_3 \exp[(\nu-\nu_3)N\ \alpha_{s\,1}.\ x^2] \quad \text{pour} \quad 0 \leq s < 1,\ x \in \mathbb{R}^m$$

d'où le résultat cherché.

A.2.6. <u>Constantes flottantes</u> : Fixons μ_1, μ_2 tels que $0 < \mu_1 < \nu_1 \leq \nu_2 < \mu_2$; *jusqu'à la fin de l'appendice, les "constantes" sont exclusivement des nombres positifs stricts ne dépendant (continûment) que de* μ_1, μ_2, ν_1, ν_2, c_0, dist(a), m, N. Pour endiguer le déluge de constantes, nous les traitons en *constantes flottantes ;* ainsi d'une ligne à l'autre les mêmes lettres c et n représentent des constantes distinctes.

A.2.7. <u>Densité et paramétrix</u> : La densité $p^\varepsilon(s\,t\,x\,y)$ est la solution fondamentale de l'opérateur parabolique $(\partial_s + \Delta_x^{\varepsilon,s})$ où $\Delta^{\varepsilon,s}$ agit sur la variable d'espace x par

$$(7)\qquad \Delta_x^{\varepsilon,s} = \frac{1}{2} \sum_{ij} A_s^{ij}\,(\varepsilon,x)\ \partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_i B_s^i(\varepsilon,x)\partial_{x_i} \quad \text{avec} \quad A = (A^{ij})_{1\leq i,j\leq m}\ B = (B^i)_{1\leq i\leq m}$$

D'après [9] p^ε se calcule explicitement à partir de *la paramétrix* γ

$$(8)\qquad \begin{cases} \gamma(s\,t\,x\,y) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}}\ [\det \sigma_{st}(\varepsilon,y)]^{\frac{1}{2}}\ \exp[-\frac{1}{2}\ \sigma_{st}(\varepsilon,y).(y-x)^2] \\ \text{avec} \quad \sigma_{st}(\varepsilon,y) = [\int_s^t du\ A_u(\varepsilon,y)]^{-1} \end{cases}$$

Noter que dans (8) $\sigma_{st}(\varepsilon,y)$ est considéré tantôt comme matrice carrée symétrique, tantôt comme forme quadratique sur $\mathbb{R}^m$.

Appelons *noyau* ϕ n'importe quelle fonction borélienne $\phi(s\,t\,x\,y)$ à valeurs réelles ou matricielles, définie sur $\mathscr{E} = \{0 \leq s < t \leq 1\ ;\ x,\ y \in \mathbb{R}^m\}$. Lorsque l'intégrale (9) est bien définie, on appelle *convolution* $\phi * \psi$ *de deux noyaux,* le noyau défini par

$$(9) \qquad \phi * \psi(s\,t\,x\,y) = \int_s^t du \int_{\mathbb{R}^m} dz\, \phi(s\,u\,x\,z)\ \psi(u\,t\,z\,y)$$

Appelons $R^{\varepsilon,s,y}$ *l'opérateur* $\Delta^{\varepsilon,s}$ *à coefficients gelés en* y*, qui agit sur la variable d'espace* x par

$$(10) \qquad R_x^{\varepsilon,s,y} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} A_s^{ij}(\varepsilon,y)\, \partial_{x_i} \partial_{x_j} + \sum_i B_s^i(\varepsilon,y)\, \partial_{x_i} .$$

Définissons *le noyau* η par

$$(11) \qquad \eta(s\,t\,x\,y) = (\Delta_x^{\varepsilon,s} - R_x^{\varepsilon,s,y})\ \gamma(s\,t\,x\,y).$$

Alors d'après [9] *on a la formule essentielle ici*

$$(12) \qquad p^{\varepsilon} = \gamma + \gamma * \Big(\sum_{j \geq 1} \eta^{*\,j}\Big)$$

où la série converge partout sur $\mathcal{E}$ et les convolutions sont toutes bien définies.

Les calculs délicats du § A.2.12 utilisent *les demi-convolutions* $(\phi * \psi)_-$ et $(\phi * \psi)_+$ définies comme suit : pour ψ, ϕ noyaux quelconques on pose

$$(13) \qquad [\phi \circ \psi]_u\ (s\,t\,x\,y) = \int_{\mathbb{R}^m} dz\ \phi(s\,u\,x\,z)\,\psi(u\,t\,z\,y)\ , \text{ pour } s < u < t$$

et on définit, quand (14) a en sens, les noyaux $(\phi * \psi)_-$ et $(\phi * \psi)_+$ en chaque point $(s\,t\,x\,y)$ par

$$(14) \qquad (\phi * \psi)_- = \int_s^{\frac{s+t}{2}} du [\phi \circ \psi]_u\ ; \qquad (\phi * \psi)_+ = \int_{\frac{s+t}{2}}^t du [\phi \circ \psi]_u$$

d'où l'identité triviale

$$(15) \qquad \phi * \psi = (\phi * \psi)_- + (\phi * \psi)_+ .$$

Nous allons introduire une famille de noyaux liés simplement aux noyaux gaussiens G_μ, et exhibant toute une gamme de singularités quand $(t-s) \to 0$ ou $x, y \to \infty$.

A.2.8. <u>Noyaux gaussiens singuliers</u> : Définissons les noyaux T, X, Y, V, $G_{j,\mu}$ par

$$(16)\quad \begin{cases} X(s\,t\,x\,y) \equiv x \quad ; \quad Y(s\,t\,x\,y) \equiv y \\ T(s\,t\,x\,y) \equiv t-s \leq 1 \\ V(s\,t\,x\,y) \equiv \dfrac{y-x}{\sqrt{t-s}} \\ G_{j,\mu} = T^{j/2} G_\mu \quad \text{pour } j \in \mathbb{Z},\ \mu > 0, \text{ avec } G_\mu \text{ donné par (5).} \end{cases}$$

Définissons les constantes universelles

$$(17)\quad \begin{cases} u_{jk}^- = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{\frac{j}{2}}(1-t)^{\frac{k}{2}} \quad \text{pour } j \geq -1,\ k \in \mathbb{Z} \\ u_{jk}^+ = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} t^{\frac{j}{2}}(1-t)^{\frac{k}{2}} \quad \text{pour } j \in \mathbb{Z},\ k \geq -1 \\ u_{jk} = u_{jk}^- + u_{jk}^+ = \dfrac{(\frac{j}{2})!\ (\frac{k}{2})!}{(\frac{j+k}{2}+1)!} \quad \text{pour } j,\ k \geq -1 \end{cases}$$

où $(z)!$ est la classique fonction méromorphe Gama$(z+1)$ telle que $(n)! = n!$.
Comme G_μ vérifie l'équation de Chapman-Kolmogorov, (13) (14) donnent d'abord $\left[G_\mu \circ G_\mu\right]_u (s\,t\,x\,y) \equiv G_\mu(s\,t\,x\,y)$ pour $s < u < t$, puis

$$(18)\quad \begin{cases} (G_{j,\mu} * G_{k,\mu})_- = u_{jk}^-\ G_{j+k+2,\mu} \quad \text{pour } j \geq -1,\ k \in \mathbb{Z} \\ (G_{j,\mu} * G_{k,\mu})_+ = u_{jk}^+\ G_{j+k+2,\mu} \quad \text{pour } j \in \mathbb{Z},\ k \geq -1 \\ G_{j,\mu} * G_{k,\mu} = u_{jk}\ G_{j+k+2,\mu} \quad \text{pour } j,\ k \geq -1. \end{cases}$$

Rappelons que l'on a *fixé* μ_1 avec $0 < \mu_1 < \nu_1$; posons pour $0 \leq k \leq N+10$ et tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$(19)\quad \begin{cases} \mu(k) = \nu_1 - \dfrac{k}{N+10} (\nu_1 - \mu_1) \\ \Gamma_{jk} = G_{j,\mu(k)} \end{cases}$$

ce qui par (5) donne c constant tel que

$$(20)\qquad \Gamma_{j_1 k_1} \leq c\ \Gamma_{j_2 k_2} \quad \text{pour tous } j_2 \leq j_1,\ 0 \leq k_1 \leq k_2 \leq N+10.$$

De (18) (19) (20) on tire c constant tel que, pour $0 \leq k,\ q \leq N+10$,

$$(21)\qquad \begin{cases} (\Gamma_{jk} * \Gamma_{pq})_- \leq c\, u_{jp}^{-}\, \Gamma_{j+p+2,k\vee q} & \text{pour } j \geq -1,\ p \in \mathbb{Z} \\ (\Gamma_{jk} * \Gamma_{pq})_+ \leq c\, u_{jp}^{+}\, \Gamma_{j+p+2,k\vee q} & \text{pour } j \in \mathbb{Z},\ p \geq -1 \\ (\Gamma_{jk} * \Gamma_{pq}) \leq c\, u_{jp}\, \Gamma_{j+p+2,k\vee q} & \text{pour } j,\ p \geq -1. \end{cases}$$

Par définition de α_{st} (cf. (5)) on a pour $0 \leq s < t \leq 1$,

$$(22)\qquad \frac{1}{c} \leq (t-s)\,\alpha_{st} \leq c \quad \text{et} \quad \frac{1}{c}(t-s)^{-m} \leq \det \alpha_{st} \leq c(t-s)^{-m} .$$

De (5) (16) (19) (22) on déduit pour chaque entier $r \geq 0$ l'existence d'une constante $c(r)$ telle que

$$(23)\qquad |V|^r\, \Gamma_{jk} \leq c(r)\, \Gamma_{j,k+1} \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{Z} \text{ et } 0 \leq k \leq N+9.$$

Appelons *noyau polynôme* tout noyau du type $R = \phi(X,Y)$ avec ϕ polynôme à coefficients constants sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ et X, Y comme en (16). On a alors avec c,n constants convenables

$$(24)\qquad |R| \leq c(1+|X|^n + |Y-X|^n) \quad \text{et} \quad |R| \leq c(1+|Y|^n + |X-Y|^n).$$

Puisqu'ici $|Y-X| = T^{\frac{1}{2}}|V| \leq |V|$, (23) (24) entraînent pour *chaque* noyau polynôme R l'existence de $c,n > 0$ tels que

$$(25)\qquad |R|\, \Gamma_{jk} \leq c(1+|X|^n)\, \Gamma_{j,k+1} \quad \text{et} \quad |R|\, \Gamma_{jk} \leq c(1+|Y|^n)\, \Gamma_{j,k+1}$$

pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et tout $0 \leq k \leq N+9$.

Par définition des convolutions et demi-convolutions (cf. (7) (14)), quels que soient la fonction borélienne positive $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^+$ et les noyaux positifs ϕ,ψ on a

$$(26)\qquad \begin{cases} h(X)(\phi * \psi)_- = [(h(X)\phi) * \psi]_- & \text{et} \quad h(Y)(\phi * \psi)_- = [\phi * (h(Y)\psi)]_- \\ h(X)(\phi * \psi)_+ = [(h(X)\phi) * \psi]_+ & \text{et} \quad h(Y)(\phi * \psi)_+ = [\phi * (h(Y)\psi)]_+ \\ h(X)\,(\phi * \psi) = (h(X)\phi) * \psi & \text{et} \quad h(Y)\,(\phi * \psi) = \phi * (h(Y)\psi). \end{cases}$$

Soient P, R des noyaux polynômes. Pour étudier les convolutions et demi-convolutions de $R\,\Gamma_{jk}$ par $P\,\Gamma_{pq}$, on majore d'après (25) le 1er facteur par $c(1+|X|^n)\,\Gamma_{j,k+1}$, et le 2nd facteur par $c(1+|Y|^n)\,\Gamma_{p,q+1}$, avec c, n liés à R,P seulement. De (26) (21) on déduit alors *sans autre calcul* un polynôme H ne dépendant que de R, P tel que pour $0 \leq k, q \leq N+9$ on ait

$$(27)\quad \begin{cases} (|R\,\Gamma_{jk}| * |P\,\Gamma_{pq}|)_- \leq u_{jp}^- \; |H|\; \Gamma_{j+p+2,1+k\vee q} & \text{pour } j \geq -1,\ p \in \mathbb{Z} \\ (|R\,\Gamma_{jk}| * |P\,\Gamma_{pq}|)_+ \leq u_{jp}^+ \; |H|\; \Gamma_{j+p+2,1+k\vee q} & \text{pour } j \in \mathbb{Z},\ p \geq -1 \\ |R\,\Gamma_{jk}| * |P\,\Gamma_{pq}| \leq u_{jp} \; |H|\; \Gamma_{j+p+2,1+k\vee q} & \text{pour } j, p \geq -1. \end{cases}$$

A.2.9. Majoration des dérivées de γ et η : Ajoutons à la panoplie de noyaux (16) les noyaux

$$(28)\quad \begin{cases} Q(s\,t\,x\,y) \equiv \frac{1}{2}(t-s)\ \sigma_{st}(\varepsilon,y) & \text{(cf. (8))} \\ D \equiv (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \sqrt{\det Q} \quad \text{et} \quad W \equiv T^{-\frac{m}{2}} \exp(-QV^2) & \end{cases}$$

ce qui permet (cf. (8)) d'écrire la paramétrix γ sous la forme

$$(29)\qquad \gamma \equiv DW$$

Pour tout noyau ϕ *dépendant du paramètre* ε , *on note* $L_{ij}\,\phi$ *le noyau* $\partial_\varepsilon^i\ \partial_x^j\ \phi(s\,t\,x\,y)$. De (4) (8) (26) on tire

$$(30)\qquad |L_{ij}\,Q| \leq c(1+|Y|^i) \quad \text{pour} \quad i,j \leq N.$$

Comme Q est globalement minoré (cf. (4)), on tire de (28) (30) des constantes $c,\ n > 0$ telles que

$$(31)\qquad |L_{ij}\,D| \leq c(1+|Y|^{n_i}) \ \text{pour} \quad i,j \leq N$$

tandis que (16) donne trivialement

$$(32)\qquad L_{io}\ V \equiv 0 \quad \text{pour} \quad i \geq 1, \quad \text{et} \quad L_{oj}\ V \equiv 0 \quad \text{pour} \quad j \geq 2.$$

Une récurrence banale utilisant seulement (32) donne pour tout i,j

$$(33)\quad \begin{cases} L_{ij}(\exp - QV^2) \equiv (\exp - QV^2) \times P_{ij}\{V\ ;\ \partial_x V\ ;\ L_{i_1 i_2}Q \ \text{ avec } \ i_1+i_2 \leq i+j\} \\ \text{où } P_{ij} \text{ est un polynôme universel à coefficients constants, de degré } j \text{ en } \partial_x V. \end{cases}$$

Puisque (16) donne $\partial_x V = -T^{-\frac{1}{2}}$, (30) fournit $c,\ n > 0$ constants tels que le dernier facteur de (33) vérifie $|P_{ij}\{\ldots\}| \leq cT^{-\frac{j}{2}}\ (1+|V|^n+|Y|^{n_i})$ pour $i,\ j \leq N$.

Par définition $W = T^{-\frac{m}{2}} \exp(-QV^2)$, et (33) implique alors $|L_{ij}W| \leq cT^{-\frac{j}{2}}(1+|V|^n+|Y|^{n_i})W$ pour $i,\ j \leq N$.

D'après (29) (31) la paramétrix γ vérifie donc

(34) $$|L_{ij}\,\gamma| \leq c\,T^{-\frac{j}{2}}(1 + |V|^{n} + |Y|^{n_i})W \quad \text{pour} \quad i, j \leq N.$$

Les définitions (8) (5) de σ_{st} et α_{st} donnent grâce à l'encadrement (4) de A_t

(35) $$\nu_1\,\alpha_{st} \leq \sigma_{st}(\varepsilon,y) \leq \nu_2\alpha_{st} \quad \text{pour tout} \quad \varepsilon\, s\, t\, x\, y\,.$$

Les définitions (28) (5) (19) de W, G_μ, Γ_{oo} et l'estimation (22) de $\det\ \alpha_{st}$ donnent alors $c > 0$ constant tel que

(36) $$\frac{1}{c}\, G_{\nu_2} \leq W \leq c\, G_{\nu_1} \equiv c\,\Gamma_{oo}\,.$$

Par (36) (23) (34) (16) (20) on obtient élémentairement

(37) $$|L_{ij}\,\gamma| \leq c(1 + |Y|^{n_i})\,\Gamma_{-j,1} \quad \text{pour} \quad i, j \leq N.$$

Soit $g_s(\varepsilon,x)$ l'un quelconque des coefficients $\{A_s^{r\ell}(\varepsilon,x),\ B_s^r(\varepsilon,x)\}$, $1 \leq r,\ \ell \leq m$, du générateur infinitésimal $\Delta_x^{\varepsilon,s}$ de X^ε décrit par (7). Posons

(38) $$\varphi(s\,t\,x\,y) = g_s(\varepsilon,x) - g_s(\varepsilon,y).$$

Grâce à l'hypothèse (3) on a directement

(39) $$\begin{cases} |L_{io}\,\varphi| \leq c|X-Y|(1 + |X|^{i} + |Y|^{i}) = c\,T^{\frac{1}{2}}V(1 + |X|^{i} + |Y|^{i}) & \text{pour} \quad 0 \leq i \leq N \\ |L_{ij}\,\varphi| \leq c(1 + |X|^{i}) \quad \text{pour} \quad 0 \leq i \leq N,\ 1 \leq j \leq N. & \end{cases}$$

Par la formule de Leibnitz, $L_{ij}(\varphi\,\partial_x^2\,\gamma)$ est une combinaison linéaire finie universelle des $[(L_{i_1j_1}\,\varphi)(L_{i_2j_2}\,\partial_x^2\gamma)]$ avec $i_1 + i_2 = i$, $j_1 + j_2 = j$. Par suite, (39) (37) (23) (20) fournissent c, $n > 0$ constants vérifiant

$$|L_{ij}(\varphi\,\partial_x^2\,\gamma)| \leq c(1 + |X|^{n_i} + |Y|^{n_i})\,\Gamma_{-(j+1),2} \qquad \text{pour} \quad 0 \leq i,\ j \leq N.$$

Le même calcul donne

$$|L_{ij}(\varphi\,\partial_x\,\gamma)| \leq c(1 + |X|^{n_i} + |Y|^{n_i})\,\Gamma_{-j,2} \qquad \text{pour} \quad 0 \leq i,\ j \leq N.$$

Par la définition (11), η est combinaison linéaire finie de termes du type $\varphi\,\partial_x^2\,\gamma$ et $\varphi\,\partial_x\,\gamma$. En tenant compte de (20) on en tire c, $n > 0$ tels que

(40) $$|L_{ij}\,\eta| \leq c(1 + |X|^{n_i} + |Y|^{n_i})\,\Gamma_{-(1+j),2} \quad \text{pour} \quad 0 \leq i,\ j \leq N.$$

A.2.10. <u>Dérivées des noyaux translatés de γ et η</u> : Pour tout noyau ϕ définissons *les noyaux translatés* $\tau\phi$ *et* $\tau^{-1}\phi$ par

(41) $$\tau\phi(s\,t\,x\,y) = \phi(s,t,x,y+x) \quad \text{et} \quad \tau^{-1}\phi(s\,t\,x\,y) = \phi(s,t,x,y-x)$$

Pour ϕ *quelconque la translation* τ *<u>ne commute pas</u> avec les dérivées* ∂_x^j. *Par contre il y a commutation évidente dans le cas particulier suivant*

(42) $$\begin{cases} \text{Si le noyau } \psi(s\,t\,x\,y) \text{ ne dépend pas de } x \text{ on a } L_{ij}\tau\psi = \tau L_{ij}\psi \text{ pour} \\ \text{tout } i,j. \end{cases}$$

De (42) (30) (31) on tire c, n vérifiant

(43) $$|L_{ij}\,\tau\,Q| + |L_{ij}\,\tau\,D| \leq c(1 + |\tau Y|^{n_i}) \qquad \text{pour } i,\ j \leq N.$$

Puisque $\tau V \equiv \frac{Y}{\sqrt{T}}$ on a $\partial_x \tau\, V \equiv 0$ et (33) donne

$$L_{ij}\,\tau\, W \equiv (\tau W)\; P_{ij}\{\tau V\ ;\ 0\ ;\ L_{i_1 i_2}\ \tau Q \ \text{ avec } i_1 + i_2 \leq i+j\}$$

d'où, d'après (43) et la description de P_{ij}, des constantes c, n telles que

$$|L_{ij}\,\tau\, W| \leq c(1 + |\tau V|^n + |\tau Y|^{n_i})\ (\tau W) \qquad \text{pour } i,\ j \leq N.$$

Le même calcul que pour (37) donne alors c, n tels que

(44) $$|L_{ij}\,\tau\,\gamma| \leq c(1 + |\tau V|^n + |\tau Y|^{n_i})\ (\tau W) \qquad \text{pour } i,\ j \leq N$$

et donc par (36) (23) (20)

(45) $$|\tau^{-1}\, L_{ij}\ \tau\,\gamma| \leq c(1 + |Y|^{n_i})\ \Gamma_{01} \qquad \text{pour } i,\ j \leq N.$$

Par (33), $\partial_x^2\,\gamma = RW$ où R est un polynôme universel en $\{V\ ;\ \partial_x V\ ;\ \partial_x^i\,Q,\ \partial_x^j\,D$ avec $0 \leq i,\ j \leq 2\}$, de degré 2 en $\partial_x V$. Comme $\partial_x V = -\frac{1}{\sqrt{T}}$ on voit que $\tau R = \frac{1}{T}\,R_1$, avec R_1 polynôme universel en $\{\tau\ V\ ;\ \sqrt{T}\ ;\ \tau\ \partial_x^i\,Q,\ \tau\,\partial_x^j\,D\ \ 0 \leq i,\ j \leq 2\}$. Mais $\tau V = \frac{Y}{\sqrt{T}}$ ne dépend pas de (ε, x) ; donc $L_{ij}\,R_1$ est un polynôme en $\{\tau\ V\ ;\ \sqrt{T}\ ;\ L_{i_1 j_1}\,\tau\ Q,\ L_{i_2 j_2}\,\tau\ D$ avec $j_1,\ j_2 \leq j+2$ et $i_1,\ i_2 \leq i\}$. De (43) on conclut alors que

$$|L_{ij}\,\tau\, R| = \frac{1}{T}\ |L_{ij}\ R_1| \leq \frac{c}{T}\ (1 + |\tau\, V|^n + |\tau Y|^{n_i}) \quad \text{pour } i,\ j \leq N.$$

Par (44) et la formule de Leibnitz on a alors

(46) $$|L_{ij}\,\tau\,\partial_x^2\,\gamma| = |L_{ij}[(\tau R)(\tau W)]| \leq cT^{-1}(1 + |\tau V|^n + |\tau Y|^{n_i})\ (\tau W).$$

Prenons φ comme en (38) pour obtenir

$$\varphi(s\,t\,x\,y) = g_s(\varepsilon,x) - g_s(\varepsilon,x+y)$$

d'où facilement grâce à (3) et à $|Y| \equiv \sqrt{T}\,|\tau V|$, pour $i, j \leq N$

$$|L_{ij}\,\tau\,\varphi| \leq c|Y|(1 + |X|^n + |Y|^n) \leq c\,\sqrt{T}\,\,|\tau V|\,\,(1 + |X|^n + |\tau V|^n)$$

La formule de Leibnitz et (46) donnent alors, pour $i, j \leq N$

$$|L_{ij}\,\,\tau(\varphi\,\partial_x^2\,\gamma)| \leq cT^{-\frac{1}{2}}(1 + |X|^n + |\tau V|^n + |\tau Y|^n)(\tau W)$$

d'où puisque $\tau X \equiv X$, et par (36) (23) (20) (19)

(47) $$|\tau^{-1}\,L_{ij}\,\tau(\varphi\,\partial_x^2\,\gamma)| \leq c(1 + |X|^n + |Y|^n)\,\Gamma_{-1,1}.$$

Un calcul analogue donne pour $i, j \leq N$

(48) $$|\tau^{-1}\,L_{ij}\,\tau(\varphi\,\partial_x\,\gamma)| \leq c(1 + |X|^n + |Y|^n)\,\Gamma_{0\,1}\ .$$

Par combinaison linéaire finie de termes du type $(\varphi\,\partial_x^2\,\gamma)$ et $(\varphi\,\partial_x\,\gamma)$ on conclut, grâce à (11) (47) (48) (20)

(49) $$|\tau^{-1}\,L_{ij}\,\tau\,\eta| \leq c(1 + |X|^n + |Y|^n)\,\Gamma_{-1,1} \quad \text{pour} \quad i, j \leq N.$$

A.2.11. Etalonnage des singularités : Nous dirons *qu'un noyau* $\phi(s\,t\,x\,y)$ *dépendant du paramètre* ε *est de singularité* (q,k) *avec* $q \geq -1$, $k \geq 0$ s'il existe un noyau polynôme *fixe* R tel que

(50) $$|L_{ij}\,\,\phi| \leq |R|\,\,\Gamma_{q-j,k} \quad \text{pour} \quad 0 \leq j,\ k \leq N,\ 0 \leq \varepsilon \leq 1$$

ce que nous noterons $\operatorname{sing} \phi = (q,k)$. Remarquons qu'alors (cf. (20)) *on a aussi* $\operatorname{sing} \phi = (q',k')$ pour tout $q' \leq q$, $k' \geq k$, il serait facile, avec un vocabulaire adéquat, d'éviter que $\operatorname{sing} \phi$ soit multivoque, mais ce fait ne gêne pas dans la suite.

En particulier les formules (37) et (40) donnent $\operatorname{sing} \gamma = (0,1)$ et $\operatorname{sing} \eta = (-1,2)$.

A.2.12. Aplatissement des singularités par convolution :

Théorème : Sous les hypothèses A.2.1, les convolutions par γ et η ont la propriété suivante : pour tout noyau ϕ de singularité (q,k) avec $q \geq -1$, $2 \leq k \leq N+9$ on a

(51) $$\operatorname{sing}(\gamma * \phi) = (q+2,\ k+1)$$

(52) $$\operatorname{sing}(\eta * \phi) = (q+1,\ k+1).$$

Preuve : Les démonstrations de (51) et (52) étant *identiques* traitons seulement (52). Posons $L = L_{ij} = \partial_\varepsilon^i\, \partial_x^j$ avec $i, j \leq N$. *La convolution* $|L\eta| * |\phi|$ *est en général* *divergente dès que* $j \geq 2$ *ce qui empêche de remplacer* $L(\eta * \phi)$ *par* $(L\eta) * \phi$.

Soit ϕ de singularité (q,k) avec $q \geq -1$, $2 \leq k \leq N+9$. Posons

$$H(s\,u\,t\;x\,z\,y) = \eta(s\,u\,x\,z)\;\phi(u\,t\,z\,y)\ .$$

La formule de Leibnitz donne c constant tel que pour $i, j \leq N$

(53) $$|L_{ij}H(s\,u\,t\;x\,z\,y)| \leq c \sum_{0\leq \ell \leq i} |L_{\ell j}\eta(s\,u\,x\,z)|\;\; |L_{i-\ell,0}\phi(u\,t\,z\,y)|\ .$$

Puisque $(\eta * \phi)_+ = \int_{\frac{s+t}{2}}^{t} du \int_{\mathbb{R}^m} dz\ H$, on a donc

$$|L_{ij}[(\eta * \phi)_+]| \leq \int_{\frac{s+t}{2}}^{t} du \int_{\mathbb{R}^m} dz\ |L_{ij}\ H| \leq c \sum_{0\leq \ell \leq i} (|L_{\ell j}\ \eta|\ \ |L_{i-\ell,0}\phi|)_+$$

pour $i, j \leq N$ et tout $(s\,t\,x\,y)$. Mais (40) (50) fournissent un noyau polynôme R tel que $\ell \leq i \leq N$, $j \leq N$

$$|L_{\ell j}\ \eta| \leq |R|\ \Gamma_{-(1+j),2} \quad \text{et} \quad |L_{i-\ell,0}\ \phi| \leq |R|\Gamma_{qk}$$

d'où grâce à (27) un noyau polynôme P tel que

$$|L_{ij}[(\eta * \phi)_+]| \leq |P|\ \Gamma_{q+1-j,k+1} \quad \text{pour} \quad i, j \leq N$$

ce qui s'écrit

(54) $$\operatorname{sing}(\eta * \phi)_+ = (q+1,\ k+1).$$

Rappelons que pour tout noyau ψ on a

$$\tau\psi(s\,u\,x\,z) \equiv \psi(s,u,x,x+z).$$

Associons à x, ψ les noyaux ψ_x, ψ_x^{ij} suivants

(55) $$\begin{cases} \psi_x(u\,t\,z\,y) \equiv \psi(u,t,x+z,y) \\ \psi_x^{ij}(u\,t\,z\,y) \equiv \partial_\varepsilon^i\ \partial_x^j\ \psi(u,t,x+z,y) \end{cases}$$

Le changement de variable $z \to z+x$ dans (14) donne les identités

(56) $$\begin{cases} [\psi \circ \phi]_u\ (s\,t\,x\,y) \equiv [\tau\psi \circ \phi_x]_u\ (s\,t\,x\,y) \quad s < u < t \\ (\psi * \phi)_-\ (s\,t\,x\,y) \equiv (\psi * \phi_x)_-\ (s\,t\,x\,y) \end{cases}$$

De (55) (56) on tire (formule de Leibnitz) l'inégalité vraie *en tout point* $(s\,t\,x\,y)$

pour $i, j \leq N$

(57) $$L_{ij}[(\eta * \phi)_-] \leq c \sum_{\{i_1+i_2=i, j_1+j_2=j\}} (|L_{i_1 j_1} \tau \eta| * |\phi_x^{i_2 j_2}|)_-$$

avec c constante universelle. Par (49) (55) (50) on obtient un noyau polynôme $R > 0$ tel que

$$|L_{i_1 j_1} \tau \eta| \leq \tau(R\, \Gamma_{-1,1})$$
$$|\phi_x^{i_2 j_2}| \leq [R\, \Gamma_{q-j_2,k}]_x$$

d'où par (56), en tout point $(s\,t\,x\,y)$

$$(|L_{i_1 j_1} \tau \eta| * |\phi_x^{i_2 j_2}|)_- \leq (|R\, \Gamma_{-1,1}| * |R\, \Gamma_{q-j_2,k}|)_- .$$

Le second membre est, grâce à (27) et $j_2 \leq j$ majoré par $|P|\, \Gamma_{q+1-j,k+1}$, avec P noyau polynôme fixe quand $j \leq N$, $2 \leq k \leq N+9$. Mais (57) donne alors

$$|L_{ij}[(\eta * \phi)_-]| \leq c|P|\, \Gamma_{q+1-j,k+1} \quad \text{pour } i, j \leq N$$

c'est-à-dire $\operatorname{sing}(\eta * \phi)_- = (q+1, k+1)$. D'après (54) on voit donc que $\operatorname{sing}(\eta * \phi) = (q+1, k+1)$ dès que $\operatorname{sing}(\phi) = (q,k)$ avec $q \geq -1$, $2 \leq k \leq N+9$.

A.2.13 <u>Les dérivées de $\tilde{\eta} = \Sigma\, \eta^{*r}$</u> : La relation (40) fournit c constant tel que

(58) $$|\eta| \leq c\, \Gamma_{-1,2} .$$

Définissons par récurrence des constantes v_r vérifiant

(59) $$v_1 = 1 \ ; \ v_{r+1} = u_{-1,r-2}\, v_r \quad \text{où les } u_{jk} \text{ sont donnés par (17)}$$

d'où immédiatement $v_r = \dfrac{(c_0)^r}{(\frac{r-2}{2})!}$, avec $c_0 = \text{Gama}\,(\frac{1}{2})$. Alors (21) (58) fournissent par récurrence une constante c telle que

(60) $$|\eta^{*r}| \leq c^r\, v_r\, \Gamma_{r-2,2} \quad \text{pour tout } r \geq 1.$$

D'après (25) (40) il existe un noyau polynôme $R(X) \geq 1$ tel que $|\partial_\varepsilon^i\, \eta| \leq R(X)\, \Gamma_{-1,3}$ pour $0 \leq i \leq N$. Par (25) on trouve un noyau polynôme $P(Y) \geq 1$ tel que

(61) $\qquad R(X)\ \Gamma_{jk} \leq \Gamma_{j,k+1}\ P(Y)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq k \leq N+9$.

En particulier on aura

(62) $\qquad |\partial_\varepsilon^i \eta| \leq R(X)\ \Gamma_{-1,3} \leq \Gamma_{-1,4}\ P(Y)$ pour $0 \leq i \leq N$.

Prouvons par récurrence sur (i,r) l'existence d'une constante $\chi \geq 1$ telle que pour $0 \leq i \leq N$ *et tout* $r \geq 1$ on ait

(63) $\qquad |\partial_\varepsilon^i(\eta^{*r})| \leq \chi^r\ v_r\ \Gamma_{r-2,i+4}\ P(Y)^i$.

Pour $0 \leq i \leq N$ et $r = 1$ ceci résulte de (62) (20) prouvu que χ soit assez grand. Pour $i = 0$ et $r \geq 1$. Ceci résulte de (60) (20) pourvu que χ soit assez grand. Supposons (63) vraie pour $i+r \leq \ell$ et donnons nous $i \geq 1$, $r \geq 2$ avec $i+r = \ell+1$. *Notons que les constantes* $c_0\ c_1\ c_2\ c_3$ *ci-dessous ne dépendent pas de* r. La formule de Leibnitz donne pour $0 \leq i \leq N$, $r \geq 1$

(64) $\qquad |\partial_\varepsilon^i(\eta^{*r})| \leq c_0 \sum\limits_{j+k=i} |\partial_\varepsilon^j \eta| * |\partial_\varepsilon^k(\eta^{*(r-1)})|$.

De (62) (63) on tire pour $k \leq i-1$, $j \leq N$, $r \geq 1$

$$|\partial_\varepsilon^j \eta| \quad |\partial_\varepsilon^k(\eta^{*(r-1)})| \leq \chi^{r-1}\ v_{r-1}\ [R(X)\Gamma_{-1,3}] * [\Gamma_{r-3,k+4} P(Y)^k].$$

D'après (26) (21) la dernière convolution $[\ldots] * [\ldots]$ ci-dessus est majorée par $c_1\ u_{-1,r-3} R(X)\ \Gamma_{r-2,k+4}\ P(Y)^k$; a fortiori d'après (61), elle est majorée par $c_1\ u_{-1,r-3}\ \Gamma_{r-2,k+5}\ P(Y)^{k+1}$. La définition (59) des v_3, la relation $k \leq i-1$, et (20) entraînent donc

(65) $\qquad |\partial_\varepsilon^j \eta| * |\partial_\varepsilon^k(\eta^{*(r-1)})| \leq c_0\ c_1\ c_2\ \chi^{r-1}\ v_r\ \Gamma_{r-2,i+4}\ P(Y)^i$.

Le dernier terme $(k = i)$ de (64) vaut $|\eta| * |\partial_\varepsilon^i(\eta^{*(r-1)})|$ et se majore de façon identique, grâce à (58) (63), sans intervention de $R(X)$ ni de (61), par $c_3\ \chi^{r-1}\ v_r\ \Gamma_{r-2,i+4}\ P(Y)^i$. Grâce à (64) (65) on conclut à la validité de (63) pour $i+r = \ell+1$, donc finalement pour tout i, r tels que $0 \leq i \leq N$, $r \geq 1$. Comme la série numérique $\sum\limits_{r \geq 1} v_r\ \chi^r$ converge d'après (59), la majoration (63) et (20) donnent

$$\sum_{r \geq 1} |\partial_\varepsilon^i(\eta^{*r})| \leq c\ \Gamma_{-1,i+4}\ P(Y)^i \quad \text{pour} \quad 0 \leq i \leq N.$$

Par conséquent on a construit un polynôme fixe $P(Y) \geq 1$ tel que

$$(66)\begin{cases}\text{le noyau } \tilde{\eta} = \sum_{r\geq 1} \eta^{*r} \text{ est } C^{\infty} \text{ en } \varepsilon \text{ et vérifie } |\partial_{\varepsilon}^{i} \tilde{\eta}| \leq c\, \Gamma_{-1,i+4} P(Y)^{i} \\ \text{pour } 0 \leq i \leq N.\end{cases}$$

Notons aussi que la série $\Sigma\, \eta^{*r}$ est dérivable terme à terme.

A.2.14. <u>Les dérivées de la densité</u> : <u>preuve du th. A.2.2</u> : On a vu en A.2.11 que

$$(67) \qquad \text{sing}(\gamma) = (0,1) \text{ et } \text{sing}(\eta) = (-1,2).$$

Le théorème A.2.12 entraîne alors par récurrence sur r

$$(68) \qquad \text{sing}(\eta^{*r}) = (r-2, r+1) \quad \text{pour } 1 \leq r \leq N+9$$

et donc, en appliquant encore le théorème A.2.12

$$(69) \qquad \text{sing}(\gamma * (\eta^{*r})) = (r, r+2) \quad \text{pour } 0 \leq r \leq N+8.$$

Par définition des singularités (cf. (50)) on a donc

$$(70) \qquad |L_{ij}(\gamma * (\eta^{*r}))| \leq |R|\, \Gamma_{r-j,r+2} \quad \text{pour } 0 \leq r \leq j \leq N,\ i \leq N,$$

avec R noyau polynôme fixe. Par (20) on en conclut que

$$(71) \qquad |L_{ij}(\sum_{0\leq r\leq j} \gamma * (\eta^{*r}))| \leq c |R| \Gamma_{-j,N+2} \quad \text{pour } i,j \leq N.$$

D'autre part le noyau $K = \gamma * (\eta^{*j})$ vérifie, par (70)

$$(72) \qquad |L_{ij}\, K| \leq |R|\, \Gamma_{0,j+2} \quad \text{pour } i,j \leq N.$$

Par la formule de Leibnitz, K et $\tilde{\eta} = \sum_{r\geq 1} \eta^{*r}$ vérifient

$$(73) \qquad |L_{ij}(K * \tilde{\eta})| \leq c \sum_{0\leq q\leq i} |L_{qj} K| * |L_{i-q,0}\, \tilde{\eta}| \quad \text{pour } i, j \leq N.$$

Mais (66) (72) fournissent des noyaux polynômes R, P tels que

$$|L_{qj} K| * |L_{i-q,0}\, \tilde{\eta}| \leq |R\, \Gamma_{0,J+2}| * |P\, \Gamma_{-1,i+4}| \quad \text{pour } q \leq i \leq N,\ j \leq N$$

d'où par (73) (27) (20) un noyau polynôme R_1 tel que

$$(74) \qquad |L_{ij}(K * \tilde{\eta})| \leq |R_1|\, \Gamma_{1,N+5} \quad \text{pour } i, j \leq N.$$

La formule explicite (12) donne la densité

$$p^{\varepsilon} = \sum_{r\geq 0} \gamma * (\eta^{*r}) = \sum_{0\leq r\leq j} \gamma * (\eta^{*r}) + K * \tilde{\eta}$$

d'où par (74) (71) (20) (25) un noyau polynôme fixe R_2 tel que

(75) $$|L_{ij}p^{\varepsilon}| \leq |R_2| \, \Gamma_{-j,N+5} \quad \text{pour } i, j \leq N$$

et bien sûr $0 \leq \varepsilon \leq 1$. D'après (25) le second membre de (75) est majoré par $c(1 + |Y|^n) \, \Gamma_{-j,N+6}$ *ce qui démontre enfin le théorème* A.2.2, grâce à la définition (19) des Γ_{jk}.

A.2.15. <u>Minoration de la densité</u> : <u>Preuve du th. A.2.3</u> : D'après (29) (31) (36) on a c constant tel que

(76) $$\frac{1}{c} G_{\nu_2} \leq \gamma \leq c \, G_{\nu_1} = c \, \Gamma_{oo}$$

tandis que, d'après (60) (20) et $\sum_{r \geq 1} v_r c^r < \infty$, le noyau $\tilde{\eta} = \sum_{r \geq 1} \eta^{*r}$ vérifie

(77) $$|\tilde{\eta}| \leq c \, \Gamma_{-1,2}$$

d'où par (21)

(78) $$|\gamma * \tilde{\eta}| \leq c \, \Gamma_{1,2} \leq c_1 T \, G_{\mu_1}.$$

L'expression (12) de p^{ε} donne $p^{\varepsilon} = \gamma + \gamma * \tilde{\eta}$, d'où par (76) (78) (20) (19) l'encadrement, valable pour tout $\varepsilon \in [0\,1]$,

(79) $$\frac{1}{c} G_{\nu_2} - c \, T \, G_{\mu_1} \leq p \leq c \, G_{\mu_1}.$$

L'opérateur $\Delta_x^{\varepsilon,s}$ défini en (7) vérifie

(80) $$(\partial_s + \Delta_x^{\varepsilon,s}) p^{\varepsilon}(s\,t\,x\,y) \equiv 0.$$

Classiquement la définition $\alpha_{st} = [\int_s^t a(u)du]^{-1}$ donne $\partial_s \log \det \alpha_{st} = \text{trace}[a(s)\,\alpha_{st}]$, ce qui après un calcul banal utilisant (5) (7) montre que, en un point $(s\,t\,x\,y)$ arbitraire, $\frac{1}{G_\mu} [(\partial_s + \Delta_x^{\varepsilon,s}) G_\mu]$ vaut

(81) $$\frac{\mu}{2}(x-y)^* \alpha_{st}[\mu A_s(\varepsilon,x) - a(s)]\alpha_{st}(x-y) + \frac{1}{2}\text{tr}[(a(s) - \mu A_s(\varepsilon,x))\alpha_{st}] - \mu \, B_s^*(\varepsilon,x)\alpha_{st}(x-y).$$

Mais on a $\mu_2 A_s - a(s) \geq (\frac{\mu_2}{\nu_2} - 1) a(s)$ d'après (4) et $\mu_2 > \nu_2$ fixé, tandis que B est borné et $\alpha_{st} \sim \frac{c}{t-s}$. D'où des constantes c_1, $c > 0$ telles que, lorsque $\mu = \mu_2$, (81) soit minorée par $c_1(t-s)^{-2}[|x-y|^2 - c(t-s)(1 + |x-y|)]$ pour tout $\varepsilon\,s\,t\,x\,y$. Comme $(t-s) \leq 1$ le crochet ci-dessus est sûrement positif dès que $|x-y|^2 \geq c_2(t-s)$ avec c_2 assez grand. A fortiori on a donc au vu de (22) une constante K_0 telle que

(82) $$(\partial_s + \Delta_x^{\varepsilon,s})\, G_{\mu_2}(s\,t\,x\,y) \geq 0 \quad \text{pourvu que} \quad \frac{1}{2}\,\alpha_{st}(x-y)^2 \geq K_0 \quad \text{pour tout } \varepsilon\,s\,t\,x\,y.$$

Soient $K \geq K_0$, $\chi > 0$, $\tau > 0$ trois constantes que nous préciserons plus bas. Pour $\varepsilon\,t\,y$ donnés on définit deux ensembles $U(K,\tau)$, $\hat{U}(K,\tau)$ et une fonction $\varphi(s,x)$ par

(83) $$\begin{cases} U(K,\tau) = \{(s,x) \in [0\,1] \times \mathbb{R}^m \mid t-\tau \leq s < t \ ;\ \frac{1}{2}\,\alpha_{st}(x-y)^2 > K\} \\ \hat{U}(K,\tau) = \{(s,x) \in [0\,1] \times \mathbb{R}^m \mid t-\tau \leq s < t \ ;\ \frac{1}{2}\,\alpha_{st}(x-y)^2 \leq K\} \end{cases}$$

(84) $$\varphi(s,x) = p^{\varepsilon}\,(s\,t\,x\,y) - \chi\, G_{\mu_2}\,(s\,t\,x\,y)\,.$$

De (80) (82) (83) (84) on déduit

(85) $$(\partial_s + \Delta_x^{\varepsilon,s})\,\varphi(s,x) \leq 0 \quad \text{pour} \quad (s,x) \in U(K,\tau) \quad \text{et} \quad K \geq K_0\,.$$

D'autre part (5) (79) donnent

(86) $$\begin{cases} \lim\limits_{s\to t} \varphi(s,x) = 0 \quad \text{uniformément } \textit{tant que} \ |x-y| \ \textit{minoré par un nombre} > 0, \\ \lim\limits_{x\to\infty} \varphi(s,x) = 0 \quad \text{uniformément pour} \quad s \in [0\,t\,[\,. \end{cases}$$

Montrons que pour τ, χ assez petits, on a

(87) $$\varphi(s,x) \geq 0 \quad \text{sur} \quad \hat{U}(K,\tau).$$

En effet, la minoration (79) de p donne pour tout $\varepsilon\,s\,t\,x\,y$

(88) $$\varphi \geq \frac{1}{c}\,G_{\nu_2} - c(t-s)\,G_{\mu_1} - \chi\,G_{\mu_2}\,.$$

Posons $v = \frac{1}{2}\,\alpha_{st}(x-y)^2$; lorsque $(t-s) \leq \tau$ le second membre de (88) est minoré par

(89) $$c_1(t-s)^{-\frac{m}{2}}\left(e^{-\nu_2 v} - c_2\,\tau\, e^{-\mu_1 v} - c_2\,\chi\, e^{-\mu_2 v}\right)$$

avec c_1, $c_2 > 0$ constants. Imposons maintenant $\chi \leq \frac{1}{2c_2}$ pour minorer le dernier facteur (...) de (89) par $(\frac{1}{2}\,e^{-\nu_2 v} - c_2\,\tau\, e^{-\mu_1 v})$, expression certainement positive sur $\hat{U}(K,\tau)$ pourvu que $2c_2\,\tau\, e^{(\nu_2-\mu_1)K} \leq 1$. Finalement on voit que *la relation*

(90) $$0 < \tau \leq \frac{1}{2c_2}\, e^{-(\nu_2-\mu_1)K} \quad \text{et} \quad \chi = \frac{1}{2c_2}$$

garantit la validité de (87).

<u>*Fixons*</u> provisoirement un compact U_0 de $\mathbb{R}^m$ et ε dans $[0\,1]$. D'après l'encadrement (4) de A, et le th. 7.5, il existe $\tau_1(\varepsilon) > 0$, $\chi_1(\varepsilon) > 0$ tels que

$$(91)\qquad p^{\varepsilon}(s\,t\,x\,y) \geq \chi_1(\varepsilon)(t-s)^{-\frac{m}{2}} \exp\left(-\frac{d^2_{s,\varepsilon}(x,y)}{2(t-s)}\right)$$

pour tout $y \in U_o$, $0 \leq s < t \leq 1$, $|y-x| \leq \tau_1(\varepsilon)$, $|t-s| \leq \tau_1(\varepsilon)$. Ici $d_{s,\varepsilon}(x,y)$ est la distance sur $\mathbb{R}^m$ associée à la métrique riemannienne $x \to [A_s(\varepsilon,x)]^{-1}$. L'encadrement (4) de A_s donne $d^2_{s,\varepsilon}(x,y) \leq \nu_2\, a(s)^{-1}.(x-y)^2$. Fixons ν_3 tel que $\nu_2 < \nu_3 < \mu_2$. Il existe clairement $\tau_2 > 0$ constant tel que

$$(t-s)a(s) \geq \frac{\nu_2}{\nu_3}\int_s^t a(u)du = \frac{\nu_2}{\nu_3}\,\alpha^{-1}_{st} \quad \text{pour} \quad t-s \leq \tau_2$$

d'où

$$\frac{d^2_{s,\varepsilon}(x,y)}{t-s} \leq \nu_3\, \alpha_{st}\,(x-y)^2 \quad \text{pour} \quad 0 \leq t-s \leq \tau_2,\ 0 \leq s < t \leq 1,\ 0 \leq \varepsilon \leq 1$$

et (91) devient avec $c > 0$ constant

$$(92)\qquad p^{\varepsilon}(s\,t\,x\,y) \geq c\, \chi_1(\varepsilon)\, G_{\nu_3}(s\,t\,x\,y)$$

pour $y \in U_o$, $0 \leq s < t \leq 1$, $|y-x| \leq \tau_1(\varepsilon)$, $|t-s| \leq \tau_3(\varepsilon)$. Un calcul élémentaire fournit d'après (5) (90) une constante $c_3 > 0$ telle que

$$(93)\qquad \frac{c\chi_1(\varepsilon)\, G_{\nu_3}}{\chi\, G_{\nu_2}} \geq c_3\, \chi_1(\varepsilon)\, \exp(\mu_2 - \nu_3)v$$

et le second membre de (93) est sûrement ≥ 1 sur $\{v \leq K_1(\varepsilon)\}$ pourvu que l'on *choisisse* $K_1(\varepsilon)$ tel que

$$(94)\qquad c_3\, \chi_1(\varepsilon)\, \exp[(\mu_2 - \nu_3)\, K_1(\varepsilon)] \geq 1\ ;\quad K_1(\varepsilon) \geq K_o\ .$$

Définissons maintenant

$$(95)\qquad \tau_4(\varepsilon) = \tau_3(\varepsilon) \wedge \left[\frac{1}{2c_2}\, e^{-(\nu_2-\mu_1)K_1(\varepsilon)}\right]$$

de sorte que (K_1,τ_4) vérifient (90) ; par (92) (93) (94) on voit que pour $y \in U_o$, $0 \leq s < t \leq 1$,

$$(96)\qquad \varphi(s,x) \geq 0 \quad \text{sur} \quad U(K_1(\varepsilon),\ \tau_4(\varepsilon)) \cap \{|x-y| \leq \tau_1(\varepsilon)\}$$

et (95) garantit, via $\{(90) \Rightarrow (87)\}$, que

$$(97)\qquad \varphi(s,x) \geq 0 \quad \text{sur} \quad \hat{U}(K_1(\varepsilon),\tau_4(\varepsilon)).$$

Pour $\varepsilon\, t\, y$ provisoirement fixés, les relations (96) (97) (86) (85) permettent d'appliquer le principe du maximum à la fonction φ sur l'ouvert $W^{\varepsilon} \subset [0\,1] \times \mathbb{R}^m$, avec $W^{\varepsilon} = U(K_1(\varepsilon),\ \tau_4(\varepsilon)) \cap \{|x-y| > \tau_1(\varepsilon)\}$. En effet φ est continue sur $\overline{W^{\varepsilon}}$

et positive sur la frontière parabolique de W^{ε} (cf. [9]). On en déduit que $\varphi(s,x) \geq 0$ pour $(s,x) \in W^{\varepsilon}$; au vu de (96) (97) on voit donc que

(98) $$\varphi(s\,x) \geq 0 \quad \text{pour } \{t-\tau_4(\varepsilon) \leq s \leq t,\ x \in \mathbb{R}^m\}$$

et ceci pourvu que $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $0 \leq s < t \leq 1$, $y \in U_0$.

Le nombre $\tau_0 = \frac{1}{2c_2}\, e^{-(\nu_2-\mu_1)K_0}$ est une vraie constante indépendante de $\varepsilon\, s\, t\, x\, y$; le couple (K_0,τ_0) vérifie (90) donc aussi (87) ; par construction de $\tau_4(\varepsilon)$ on peut toujours garantir $0 < \tau_4(\varepsilon) < \tau_0$. Considérons l'ouvert

$$W = \{(s,x) \,|\, t-\tau_0 < s < t,\ \tfrac{1}{2}\,\alpha_{st}(x-y)^2 > K_0\}$$

qui est inclus dans $U(K_0,\tau_0)$ par construction. On a donc $(\partial_s + \Delta_x^{\varepsilon,s})\, \varphi(s\,x) \leq 0$ sur W. De plus φ est continue sur $\bar{W} \cup ([0\,1] \times \{\infty\})$, et positive sur la frontière parabolique de W, grâce à (98) (87) (86). Le principe du maximum propage donc la positivité de φ à tout W ; conjointement avec (98) (87) ceci entraîne

$$\varphi(s\,x) \geq 0 \quad \text{pour} \quad t-\tau_0 \leq s < t,\ x \in \mathbb{R}^m$$

et finalement, *le compact* U_0 *contenant* y *ayant disparu du résultat à ce stade,* on a

(99) $$p^{\varepsilon}(s\,t\,x\,y) \geq \chi\, G_{\mu_2}(s\,t\,x\,y)$$

pour $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $t-\tau_0 \leq s < t$, $0 \leq s < t \leq 1$, $x, y \in \mathbb{R}^m$ avec χ, τ_0 constantes positives.

La relation de Chapman Kolmogorov propage trivialement (99) par itération, d'où pour tout $k \geq 1$ entier,

$$p^{\varepsilon}(s\,t\,x\,y) \geq \chi^k\, G_{\mu_2}(s\,t\,x\,y)$$

pour $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $t-k\tau_0 \leq s < t$, $0 \leq s < t \leq 1$, $x, y \in \mathbb{R}^m$ *ce qui achève la preuve du théorème* A.2.3 en choisissant $k = k_0$ avec $k_0\tau_0 > 1$.

A.2.16. Calcul explicite des dérivées de $p^{\varepsilon}(0100)$ en $\varepsilon = 0$:

Ce calcul est utile pour avoir le développement de Taylor en 0 de $p^{\varepsilon}(0100)$ qui intervient, dans le corps de l'article, lors du calcul du développement asymptotique de $\pi(0,\varepsilon^2,\xi,\eta)$. Plaçons nous dans le cadre du § 10 où

(100) $\quad S_t(\varepsilon,x) = \sigma(\varepsilon^2 t,\ f_t + \varepsilon x)$ et $B_t(\varepsilon,x) = \varepsilon\, b(\varepsilon^2 t,\ f_t + \varepsilon x)$

avec σ, b C^∞ sur $[0\ 1] \times \mathbb{R}^m$, après modification standard (cf. § 6.1) de σ, b. Ici f_t est une fonction C^∞ de t, fixée, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.

Notons η_ε le noyau η défini par (11), pour rendre explicite la dépendance en ε. *D'après* (11) *et* (100) η_0 *est identiquement nul*. D'autre part les calculs de A.2.15 montrent que pour tout $\varepsilon \in [0\ 1]$

$$\partial_\varepsilon^i [\sum_{r \geq 1} \gamma * (\eta^{*r})] = \sum_{r \geq 1} \partial_\varepsilon^i [\gamma * (\eta^{*r})]$$

et que $\partial_\varepsilon^i(\gamma * (\eta^{*r}))$ se calcule comme si $\gamma*(\eta^{*r})$ était un produit non commutatif "ordinaire" de $(r+1)$ fonctions de ε. Même résultat pour $\partial_\varepsilon^i(\eta^{*r})$.

En particulier on a donc <u>*en* $\varepsilon = 0$</u>

$$\partial_\varepsilon^i [\gamma * (\eta^{*r})] \equiv 0 \quad \text{pour} \quad i \leq r-1$$

et par suite, <u>*en* $\varepsilon = 0$</u>

$$\partial_\varepsilon^i\, p^\varepsilon = \partial_\varepsilon^i [\sum_{0 \leq r \leq i} \gamma * (\eta^{*r})].$$

Le calcul des $p_i = [\partial_\varepsilon^i\, p^\varepsilon(0100)]_{\varepsilon=0}$ se ramène à celui des $(\partial_\varepsilon^k \gamma)_{\varepsilon=0}$ et $(\partial_\varepsilon^k \eta)_{\varepsilon=0}$ pour $0 \leq k \leq i$ suivi d'un nombre fini de convolutions de tels noyaux. D'après les définitions A.2.7 de γ et η on a, grâce à (100), par un calcul élémentaire, <u>*en* $\varepsilon = 0$</u>

$$(101) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \gamma_0(s\,t\,x\,y) = p^0(s\,t\,x\,y) = \text{noyau gaussien} & \\ \eta_0 \equiv 0 & \\ (\partial_\varepsilon^i \gamma)_{\varepsilon=0}(s\,t\,x\,y) = R_{i\,s\,t}(x,\ y,\ \frac{y-x}{\sqrt{t-s}})\ p^0(s\,t\,x\,y) & \\ (\partial_\varepsilon^i \eta)_{\varepsilon=0}(s\,t\,x\,y) = P_{i\,s\,t}(x,\ y,\ \frac{y-x}{\sqrt{t-s}})\ p^0(s\,t\,x\,y) & \end{array} \right.$$

où $R_{i\,s\,t}$ et $P_{i\,s\,t}$ sont pour chaque $i \geq 1$ des polynômes sur $(\mathbb{R}^m)^3$, à coefficients fonctions continues bornées de s, t avec $0 \leq s \leq t \leq 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. AZENCOTT : Grandes déviations et applications. Ecole d'Eté de Saint Flour VIII ; Lecture Notes Math. 774 Springer Verlag 1980.

[2] R. AZENCOTT : Formule de Taylor stochastique et développements asymptotiques d'intégrales de Feynman ; Séminaire Proba. XVI 1980/81, Lecture Notes Math. 921 p. 237-284.

[3] R. AZENCOTT : Asymptotic expansions for slightly perturbed dynamical systems, Colloque "Probability and Math. Stat." Oberwolfach mars 1981.

[4] R. AZENCOTT : Petites perturbations aléatoires des systèmes dynamiques : développements asymptotiques. A paraître.Lecture Notes Math.

[5] R. AZENCOTT : Densité des diffusions en temps petit : Partie 2. Work in progress.

[6] R. AZENCOTT, H. DOSS : L'équation de Schrödinger quand la constante de Planck tend vers 0 : une approche probabiliste : A paraître in Lecture Notes Math. (editor Albeverio).

[7] J.M. BISMUT : Mécanique aléatoire, Lecture Notes Math. 866 (1981).

[8] J.M. BISMUT : Grandes déviations et calcul de Malliavin. A paraître.

[9] A. FRIEDMAN : Partial differential equations of parabolic type. Prentice Hall 1964.

[10] B. GAVEAU : Principe de moindre action ; propagation de la chaleur ; estimées sous elliptiques sur certains groupes nilpotents. Acta Math. 139 (1977) p. 96-153.

[11] B. GAVEAU : Systèmes hamiltoniens associés à des opérateurs hypoelliptiques, Bul. Sci. Math. 1978 (102) p. 203-229.

[12] L. HÖRMANDER : Hypoelliptic 2nd order differential equations, Acta Math. 119 (1967) p. 147-171.

[13] KANAI : Short time asymptotics for fundamental solutions of partial differential equations. Com. Partial. Diff. Equ. 2, n° 8 (1977) p. 781-830.

[14] Y.I. KIFER : Transition density of diffusion processes with small diffusion, Th. Pro. App. 21 (1976) p. 513-522.

[15] P. MALLIAVIN : Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators, Proc. Int. Conf. Stochastic Diff. Equations, Kyoto 1976, p. 195-263, N.Y. Wiley (1978).

[16] S. MOLCHANOV : Diffusion processes and Riemann geometry, Russ. Math. Surveys 30 (1975) p. 1-63.

[17] Séminaire Probabilité Université Paris 7 : Géodésiques et diffusions en temps petit (1981) Astérisque vol. 84-85.

[18] D. STROOK, S. VARADHAN : Multidimensional diffusion processes, Springer (1979).

[19] S. VARADHAN : Diffusion processes in small time interval, Comm. Pure Appl. Math. 20 (1967) p. 659-685.

[20] A. VENTSEL, M. FREIDLIN : Small random perturbations of dynamical systems, Russ. Math. Surveys 25 (1970) p. 1-75.