FORMULE DE TAYLOR STOCHASTIQUE ET DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE D'INTEGRALES DE FEYNMANN

Robert AZENCOTT

INTRODUCTION :

Soit x^{ε} une famille de diffusions indexées par le paramètre ε, et convergeant, quand $\varepsilon \to 0$, vers une diffusion x^{o}, éventuellement déterministe. Au voisinage de $\varepsilon = 0$ nous construisons un développement limité de $(x^{\varepsilon} - x^{o})$ en puissances croissantes de ε ; le coefficient g_k de ε^k est une semi-martingale continue, et les g_k se calculent par quadratures stochastiques successives explicites. La forme du reste est analogue à celle du reste de Young pour la formule de Taylor usuelle. La partie polynomiale de ce développement peut vraisemblablement, dans certains cas particuliers, se déduire d'une formule de Taylor récemment annoncée par Platen [Pl] qui obtient un reste sous forme intégrale. En effet, nous développons suivant les puissances d'un paramètre, tandis que la formule de [Pl] correspond en gros à développer suivant les puissances de $\sqrt{t}$.Notre présentation fournit des majorations précises des queues de distribution pour les coefficients et le reste. Ces estimations sont cruciales dans les applications aux développements asymptotiques des "intégrales de Feynmann du type $E[F(\varepsilon,x^{\varepsilon})]$, où F est une fonctionnelle sur $\mathbb{R} \times$ {espace des trajectoires}, quand $\varepsilon \to 0$.

Par changement de temps, ces résultats s'appliquent aux diffusions en temps petit. Si y_t est une diffusion sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on obtient un développement du type $y_t = y_o + \sum_{k=1}^{N} g_k(t) + t^{\frac{N+1}{2}} \mathbb{R}_{N+1}(t)$ où le vecteur $g_1(t),\ldots,g_k(t)\ldots$ a même loi que $t^{1/2} g_1(1),\dots,t^{k/2} g_k(1),\dots$ et où $R_{n+1}(t)$ est borné "en probabilité" quand $t \to 0$. En particulier, si f est une fonction bornée et lisse sur $\mathbb{R}^n$, $E[f(y_t)]$ se développe pour $t \to 0$ en puissances de $t^{1/2}$.

Le cas délicat d'expressions du type $E[\exp - \frac{F(x^\varepsilon)}{\varepsilon^2}]$, avec F fonctionnelle bornée sur l'espace des trajectoires est traité complètement dans le cas

$$dx^\varepsilon = \varepsilon\, \sigma(x^\varepsilon)dw + b(\varepsilon,x^\varepsilon)dt$$

où w est un brownien et $\sigma\sigma^*$ inversible. Nous étendons ainsi à leur domaine naturel de validité les résultats antérieures de Schilder [Sc] et Doss [Do] ; Schilder traitait le cas (proposé par Donsker) où $x^\varepsilon = \varepsilon w$; Doss résolvait celui où les colonnes de la matrice σ commutent entre elles (en tant que champs de vecteurs).

Quelques résultats élémentaires sur les équations stochastiques linéaires et sous linéaires sont rappelés, pour la commodité de l'exposé, dans un appendice, faute de référence publiée adéquate.

1.- FORMULE DE TAYLOR STOCHASTIQUE

1.1.- HYPOTHESES : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Pour chaque $\varepsilon \geq 0$, $t \geq 0$, considérons un champ de m-vecteurs $b(t,\varepsilon,x)$ et un champ de $m \times k$ matrices $\sigma(t,\varepsilon,x)$ sur U. Soit (w_t) un brownien k-dimensionnel. Considérons l'équation stochastique

$$(1) \qquad dx_t^\varepsilon = \sigma(t,\varepsilon,x_t^\varepsilon)dw_t + b(t,\varepsilon,x_t^\varepsilon)dt$$

sous l'hypothèse

(2) pour chaque $t \geq 0$, $b(t,.)$ et $\sigma(t,.)$ sont de classe C^{N+1} en (ε,y) sur $[0,+\infty[\times U$, et leurs différentielles d'ordre $\leq N+1$ sont continues en $t \geq 0$; noter l'inclusion de $\varepsilon = 0$ dans le domaine de régularité de b,σ.

Pour chaque $\varepsilon \geq 0$, $x \in U$, il existe alors une solution de (1) issue de x au temps 0, continue et déterminée de façon unique sur $[0,\zeta^\varepsilon[$ où ζ^ε est le temps de vie (ou encore temps d'explosion) de x^ε.

Pour $T > 0$, notons x_{OT}^ε la trajectoire de x^ε sur [OT], considérée comme variable aléatoire à valeurs dans un espace de fonctions convenable. Les notations $P_x(.)$, $E_x(.)$ sont relatives à la situation où les x^ε sont issus du point x au temps zéro.

1.2.- CONVERGENCE FAIBLE LOCALE : Notons $C([OT],U)$ l'espace des fonctions continues de $[OT]$ dans U muni de la norme uniforme. L'hypothèse (2) entraîne facilement (voir Stroock-Varadhan [SV1,2] pour des résultats analogues

(3) pour tout $T > 0$, $x \in U$, et $F : C([OT],U) \to \mathbb{R}$ continue bornée, le terme $E_x[F(x^\varepsilon_{OT})1_{\{T<\zeta^\varepsilon\}}]$ est continu en ε. En particulier, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} P_x(\zeta^\varepsilon < \zeta^o) = 0$.

1.3.- THEOREME : Sur l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^m$, considérons les diffusions x^ε issues de $x \in U$, vérifiant (1) (2), de temps de vie ζ^ε. Il existe alors des semi-martingales g_j, $1 \le j \le N$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, nulles au temps zéro, continues sur $[0,\zeta^o[$, telles que le processus R_{N+1} défini par

$$(4) \qquad x^\varepsilon_t = x^o_t + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon^j g_j(t) + \varepsilon^{N+1} R^\varepsilon_{N+1}(t) \qquad \text{sur } t < \zeta^o \wedge \zeta^\varepsilon,$$

et par $R^\varepsilon_{N+1}(t)$ = point à l'infini de $\mathbb{R}^m$ sur $t \ge \zeta^o \wedge \zeta^\varepsilon$, ait la propriété suivante :

pour tout $t > 0$, $x \in U$ fixés, on a

$$(5) \qquad \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ r \to \infty}} P_x [\sup_{s \in [0,t]} |R^\varepsilon_{N+1}(s)| \ge r ; t < \zeta^o] = 0.$$

Les propriétés (4) (5) déterminent les g_j de façon unique sur $[0,\zeta^o[$, comme solution d'un système, triangulaire et résoluble par quadratures stochastiques, d'équations différentielles stochastiques données par un calcul formel détaillé au § 2. Le processus $[x^o,g_1,\dots,g_N]$ est une diffusion de temps de vie ζ^o.

PREUVE : La démonstration est reportée en 4.8. ci-dessous.

1.4.- GENERALISATION : Le théorème précédent et la plupart des résultats ci-dessous s'étendent très facilement au cas où le paramètre ε varie dans un ouvert de $\mathbb{R}^q$; il suffit de reformuler de façon naturelle l'énoncé des résultats. Le développement de Taylor s'écrit

$$x^\varepsilon_t = x^o_t + \sum_{j=1}^{N} g_j(t) \, . \, \varepsilon^j + |\varepsilon|^{N+1} R^\varepsilon_{N+1}(t)$$

et les $g_j(t)$ sont des processus à valeurs dans l'espace des applications multilinéaires de $(\mathbb{R}^q)^j$ dans $\mathbb{R}^m$. Nous nous sommes limités au cas $q = 1$ pour simplifier l'écriture.

1.5.- APPLICATION AUX PETITES PERTURBATIONS DE SYSTEMES DYNAMIQUES

Le cas particulier où x^o est déterministe, c'est-à-dire où

(6) $$\sigma(t,0,y) \equiv 0 \qquad \text{pour } t \geq 0,\ y \in U$$

est particulièrement intéressant pour les applications. En effet x^ε modélise alors l'effet d'une petite perturbation aléatoire appliquée au système dynamique x^o défini par

(7) $$\frac{dx_t^o}{dt} = b(t,0,x_t^o)$$

(voir Ventcell-Freidlin [V-F] Azencott [Az1] par exemple).Dans ce cas, le temps d'explosion ζ^o de (7) est déterministe, fixé par le point initial $x \in U$.

Le système en cascade donnant les coefficients de Taylor g_j est à coefficients déterministes et en particulier g_1 est un processus gaussien. Renvoyons au § 2.3 pour plus de détails. Du théorème 1.3, nous déduirons plus bas, essentiellement par changement de temps, le théorème 1.6 ci-dessous, qui, une diffusion (y_t) étant donnée, fournit un développement de $y_t - y_o$ suivant les puissances de $t^{1/2}$, quand $t \to 0$.

1.6.- THEOREME : Sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^m$, soit (y_t) la diffusion minimale solution de

$$dy_t = \Gamma(y_t)dw_t + B(y_t)dt$$

où Γ et B sont respectivement un champ de matrices rectangulaires et un champ de vecteurs sur U. Supposons Γ et B de classe C^{N+1}. Fixons le point initial $x \in U$ de (y_t) et soit ζ le temps de vie de (y_t).

Il existe alors une diffusion $[g_1,\ldots,g_N]$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^m)^N$, nulle au temps zéro, à temps de vie infini, ayant les propriétés suivantes

(8) pour chaque $t \geq 0$, les processus $s \to [g_1(t_s),\ldots,g_N(t_s)]$ et

$s \to [t^{1/2}g_1(s),\ldots,t^{N/2}g_N(s)]$ ont même loi ;

(9) Le processus R_{N+1} défini sur $0 \le t < \zeta$ par

$$y_t = x + \sum_{j=1}^{N} g_j(t) + t^{\frac{N+1}{2}} R_{N+1}(t)$$

vérifie $\lim_{\substack{t \to 0 \\ r \to +\infty}} P_x(|R_{N+1}(t)| \geq r) = 0$.

Les propriétés (8) (9) déterminent les g_j de façon unique pour x donné, par un système d'équations stochastiques en cascade, à coefficients constants, résoluble par quadratures explicites. Les g_j sont des combinaisons linéaires d'intégrales (stochastiques) multiples du brownien w, et en particulier $g_1 = \Gamma(x)w$ est gaussien.

2.- LES COEFFICIENTS DU POLYNOME DE TAYLOR STOCHASTIQUE

2.1.- CALCUL DES COEFFICIENTS : Fixons le point initial x des x^ε. Considérons les développements formels

(1) $$x^\varepsilon \simeq x^o + \sum_{j\geq 1} \varepsilon^j g_j$$

$$dx^\varepsilon \simeq dx^o + \sum_{j\geq 1} \varepsilon^j dg_j.$$

Définissons les formes multilinéaires (aléatoires si x^o n'est pas déterministe)

$$\sigma_{ij}(t) : (\mathbb{R}^m)^j \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \quad \text{et} \quad b_{ij}(t) : (\mathbb{R}^m)^j \to \mathbb{R}^m$$

par les formules

(2) $$\sigma_{ij}(t) = \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j}\sigma}{\partial\varepsilon^i \partial x^j} (0,t,x_t^o)$$

$$b_{ij}(t) = \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j}b}{\partial\varepsilon^i \partial x^j} (0,t,x_t^o) .$$

Pour $j \geq 1$ et $y \in \mathbb{R}^m$, notons $\sigma_{ij}(t)y^j$ et $b_{ij}(t)y^j$ leurs valeurs au point $(y,\ldots,y)$ de $(\mathbb{R}^m)^j$. Les séries de Taylor formelles de $\sigma(t,.)$ et $b(t,.)$ au point $0,x_t^o$ s'écrivent

(3) $$\sigma(t,\varepsilon,y) \simeq \sum_{o\leq i,j} \varepsilon^i \sigma_{ij}(t) \,.\, (y-x_t^o)^j$$

$$b(t,\varepsilon,y) \simeq \sum_{o\leq i,j} \varepsilon^i b_{ij}(t) \,.\, (y-x_t^o)^j \,.$$

Dans l'équation 1.1 (1) remplaçons formellement x^ε, dx^ε, σ, b par les développements (1) (3) et identifions les coefficients de ε^j pour obtenir les identités

(4) $$dg_1 = (\sigma_{01}g_1 + \sigma_{10})dw + (b_{01}g_1 + b_{10})dt$$

$$dg_{j+1} = [\sigma_{01}g_{j+1} + S_{j+1}(g_1 \dots g_j)]dw + [b_{01}g_{j+1} + K_{j+1}(g_1 \dots g_j)]dt$$

avec $1 \leq j$ et la condition initiale $g_j(0) = 0$ pour tout j. Les S_{j+1} et K_{j+1} sont des processus aléatoires à valeurs dans l'espace des applications polynômiales de $(\mathbb{R}^m)^j$ dans $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement, données par la formule (5) ci-dessous, et dans les notations du type $\sigma_{01}g_j$, $S_{j+1}(g_1,\dots,g_j)$ etc... <u>on a sous-entendu le temps t au lieu d'écrire</u> explicitement $\sigma_{01}(t)g_j(t)$, $S_{j+1,t}[g_1(t) \dots g_j(t)]$, etc...

Le calcul élémentaire ci-dessus donne pour $y_1,\dots,y_j \in \mathbb{R}^m$

(5) $$S_{1,t} \equiv \sigma_{10}(t) \qquad \text{et} \qquad K_{1,t} \equiv b_{10}(t)$$

$$S_{j+1,t}(y_1 \dots y_j) = \sigma_{j+1,0}(t) + \sum_{H(j+1)} \sigma_{ir}(t) \,.\, [y_{p_1} \dots y_{p_r}]$$

$$K_{j+1,t}(y_1 \dots y_j) = b_{j+1,0}(t) + \sum_{H(j+1)} b_{ir}(t) \,.\, [y_{p_1} \dots y_{p_r}]$$

en notant $H(j+1)$ l'ensemble des $(i,r,p_1 \dots p_r)$ où les lettres sont des entiers vérifiant

$$0 \leq i \leq j \;\;;\;\; 1 \leq r \leq j+1 \;\;;\;\; 1 \leq p_1,\dots,p_r \leq j$$

$$i + p_1 + \dots + p_r = j+1.$$

Une transformation linéaire permet de ramener le système (4) à un système en cascade à solution calculable par quadratures.

2.3.-<u>PROPOSITION</u> : Sous l'hypothèse 1.1 (2), le système d'équations différentielles stochastiques (4) admet une unique solution $(g_1,\dots,g_N)$ continue sur $[0,\zeta^o[$, où ζ^o est le temps de vie du processus limite x^o. De plus, le processus $(x^o,g_1,\dots,g_N)$ est une diffusion de temps de vie ζ^o.

Il existe une diffusion (x^o,Q) de temps de vie ζ^o, avec Q_t automorphisme linéaire de $\mathbb{R}^m$, $Q_o \equiv I$, telle que les $h_j(t) = Q_t g_j(t)$ vérifient sur $[0,\zeta^o[$ le système en cascade

$$dh_{j+1} = \tilde{S}_{j+1}(h_1 \dots h_j)dw + \tilde{K}_{j+1}(h_1 \dots h_j)dt$$

où les $\tilde{S}_{j+1}$ et $\tilde{K}_{j+1}$ sont des processus aléatoires à valeurs dans les applications polynômiales.

PREUVE : Il suffit d'utiliser les résultats de l'appendice A.7 avec $W = \mathbb{R}^k$, $F = \mathbb{R}^m$. Soit $L(F,F)$ l'espace des applications linéaires de F dans F. Pour $\pi \in L[F,L(W,F)]$ définissons $\pi^* \in L[W,L(F,F)]$ par

$$(\pi f) . w = (\pi^* w) . f \qquad f \in F, \quad w \in W .$$

Définissons l'application bilinéaire aléatoire $B_t : W \times W \to L(F,F)$ et sa trace $C_t \in L(F,F)$ - cf. appendice A.6 pour la définition de la trace d'une application bilinéaire - par

$$B_t(v,w) = [\sigma_{01}^*(t)v][\sigma_{01}^*(t)w] \qquad v,w \in W \tag{6}$$

$$C_t = \mathrm{Tr}\, B_t$$

et soit $Q_t \in L(F,F)$ la solution (cf. A.7) continue sur $[0,\zeta^o]$ de l'équation linéaire

$$dQ_t = - Q_t . [\sigma_{01}^*(t)dw_t + b_{01}(t)dt] + Q_t C_t dt \tag{7}$$

$$Q_o \equiv I .$$

Alors (cf. A.7) pour $t \in [0,\zeta^o[$, Q_t est inversible et on a

$$d(Q_t^{-1}) = [\sigma_{01}^* dw_t + b_{01}(t)dt] . Q_t^{-1} . \tag{8}$$

De plus, le changement de variables (cf. A.7)

(9) $\quad h_j(t) = Q_t g_j(t) \qquad j \geq 1$

définit une diffusion $(x^o, h_1, \ldots, h_N)$ solution du système

(10) $\quad dh_{j+1} = \tilde{S}_{j+1}(h_1 \ldots h_j)dw + \tilde{K}_{j+1}(h_1 \ldots h_j)dt$

avec $\tilde{S}_{j+1}$, $\tilde{K}_{j+1}$ donnés par la formule (12) ci-dessous, et toujours en sous-entendant le temps t dans h_j, $\tilde{S}_{j+1}$ etc...

Pour chaque $z \in F^j$ notons $\Phi_{j+1,t}(z)$ l'application bilinéaire de $W \times W$ dans F donnée par

11) $\quad \Phi_{j+1,t}(z)[v,w] = [\sigma_{01}^*(t)v] \cdot [S_{j+1,t}(z)w] \qquad$ où $v,w \in W$

et soit $D_{j+1,t}(z) \in F$ la trace de $\Phi_{j+1,t}(z)$. Ainsi $D_{j+1,t}$ est une application polynômiale de F^j dans F.

D'après A.7 (17), on a alors

(12) $$\tilde{S}_{j+1,t} \circ (Q_t)^{\otimes j} = Q_t S_{j+1,t}$$

$$\tilde{K}_{j+1,t} \circ (Q_t)^{\otimes j} = Q_t(K_{j+1,t} - D_{j+1,t}) \,.$$

Une récurrence immédiate prouve que le système en cascade (10) admet une unique solution continue $(h_1 \ldots h_N)$ sur $[0,\zeta^o[$, qui s'obtient par quadratures successives (riemannienne et stochastique) ; on revient aux g_j par l'inversibilité de Q_t.

2.3.- CAS PARTICULIER : PETITES PERTURBATIONS DE SYSTEMES DYNAMIQUES

Considérons le cas particulier $\sigma(t,0,y) \equiv 0$ introduit en 1.5. Alors x^o, ζ^o sont déterministes et x^o est la trajectoire du système dynamique 1.5 (7) issue du point initial x commun aux x^ε. Les coefficients $\sigma_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$ définis en (2) sont des fonctions déterministes de t, continues sur $[0,\zeta^o[$. La nullité de $\sigma(t,.)$ entraîne

(13) $\quad \sigma_{oj}(t) \equiv 0 \qquad$ pour $j \geq 0$.

Le changement de variables $h_j(t) = Q_t g_j(t)$ défini par (7) (8) est ici très simple car les matrices Q_t sont déterministes, données par l'équation différentielle ordinaire

(14) $$\frac{dQ_t}{dt} = - Q_t b_{01}(t), \qquad Q_o \equiv I$$

Les polynômes $S_{j,t}$, $K_{j,t}$, $\tilde{S}_{j,t}$, $\tilde{K}_{j,t}$ introduits en (5) et (12) sont déterministes, à coefficients continus sur $[0,\zeta^o[$, et les systèmes en cascade donnant les g_j et les h_j sont à coefficients déterministes. L'équation stochastique

$$dh_1(t) = Q_t\sigma_{10}(t)dw_t + Q_t b_{10}(t)dt$$

montre que h_1 et g_1 sont des processus gaussiens que l'on peut expliciter facilement (cf. Chaleyat-Maurel-Elie [C-E]).

Le cas particulier des systèmes perturbés associés aux diffusions en temps petit (cf. 5.1) est encore plus simple car x_t^o est alors <u>constant</u> en t et encore déterministe, $h_j \equiv g_j$, et le système en cascade (4) est à coefficients constants.

3.- UNE FORMULE DE RECURRENCE POUR LE RESTE DE TAYLOR STOCHASTIQUE

Soit x^ε la diffusion solution de 1.1 (1), sous les hypothèses 1.1 (2). Soient g_j les coefficients de Taylor stochastiques calculés formellement dans la section 2, de temps de vie ζ^o. Pour $j = 0 \ldots N$ définissons polynôme et reste de Taylor par

(1) $$z_o \equiv 0 \quad ; \quad z_j = \sum_{1\le k\le j} \varepsilon^j g_j$$

$$x^\varepsilon - x^o = z_j + \varepsilon^{j+1}R_{j+1} \qquad \text{sur } [0,\zeta^o\wedge\zeta^\varepsilon[$$

$$R_{j+1} = \text{point à l'infini de } \mathbb{R}^m \qquad \text{sur } [\zeta^o \wedge \zeta^\varepsilon, +\infty[.$$

Bien entendu z_j, R_{j+1} <u>dépendent</u> de ε.

Ecrivons la formule de Taylor usuelle pour $y,z \in U$,

$$\sigma(t,\varepsilon,z) = \sum_{i+j\le N} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j}\sigma}{\partial\varepsilon^i\partial y^j}(t,0,y) \cdot (z-y)^j + \hat{\sigma}_{N+1} \cdot$$

Pour tout compact connexe $K \subset U$, tout voisinage compact L de K dans U, tout $T > 0$, il existe $c > 0$ tel que pour $\varepsilon \geq 0$, $t \leq T$, $y,z \in K$, on ait

$$|\hat{\sigma}_{N+1}| \leq c \sum_{i+j=N+1} \varepsilon^i |z-y|^j \left\|\frac{\partial^{N+1}\sigma}{\partial\varepsilon^i \partial y^j}\right\|_{T,\varepsilon,L}$$

où $\|f\|_{T,\varepsilon,L} = \sup\{|f(t,\alpha,z)|$ tels que $t \leq T$, $\alpha \leq \varepsilon$, $z \in L\}$. Résultat analogue pour b. Avec les conventions de 2.1 on peut écrire

$$(2) \qquad \sigma(t,\varepsilon,x_t^\varepsilon) = \sum_{i+j\leq N} \varepsilon^i \sigma_{ij}(t) \cdot [x_t^\varepsilon - x_t^o]^j + \varepsilon^{N+1}\mu_{N+1}$$

$$b(t,\varepsilon,x_t^\varepsilon) = \sum_{i+j\leq N} \varepsilon^i b_{ij}(t) \cdot [x_t^\varepsilon - x_t^o]^j + \varepsilon^{N+1}\nu_{N+1}$$

et affirmer que, en notant T_K^ε le temps de première sortie de K pour x^ε,

(3) à chaque compact connexe $K \subset U$, et chaque $T > 0$, on peut associer $c > 0$ fixe tel que

$$|\mu_{N+1}| + |\nu_{N+1}| \leq c(1+|R_1|)^{n+1} \qquad \text{pour } t \leq T \wedge T_K^\varepsilon \wedge T_K^o .$$

Examinons en passant le cas particulier $\sigma(t,0,y) \equiv 0$ (systèmes dynamiques perturbés). Pour $i \geq 1$, les $\dfrac{\partial^q\sigma}{\partial\varepsilon^{q-i}\partial y^i}$ sont nulles en $(t,0,y)$, ce qui entraîne avec les notations ci-dessus.

$$\left\|\frac{\partial^q\sigma}{\partial\varepsilon^{q-i}\partial y^i}\right\|_{T,\varepsilon,L} = O(\varepsilon) \qquad \text{pour } 1 \leq i \leq q \leq N+1 .$$

Pour K,T donnés on trouve ainsi un nombre c_1 tel que $y,z \in K$, $t \leq T$ impliquent

$$|\hat{\sigma}_1| \leq c_1\varepsilon \quad ; \quad |\hat{\sigma}_2| \leq c_1\varepsilon^2 \quad ; \quad |\hat{\sigma}_3| \leq c_1(\varepsilon^3 + \varepsilon^2|z-y| + \varepsilon|z-y|^2).$$

Ceci fournit, toujours en supposant $\sigma(t,0,y) \equiv 0$, des estimations plus fines des restes dans (2), à savoir

$$(3\text{ bis}) \qquad |\mu_1| \leq c_1 \quad ; \quad |\mu_2| \leq c_1 \quad ; \quad |\mu_3| \leq c_1(1+|R_1|)^2$$

pour $t \leq T \wedge T_K^\varepsilon \wedge T_K^o$.

Revenons au cas général, et introduisons deux processus aléatoires continus sur $[0,\zeta^o[$,

(4) $\quad \tilde{b}_t = [b_{ij}(t)]_{i+j\leq N} \quad ; \quad \tilde{\sigma}_t = [\sigma_{ij}(t)]_{i+j\leq N}$

Dans les calculs ci-dessous les processus x^ε, x^o, $\tilde{b}$, $\tilde{\sigma}$, g_j, z_j etc... sont toujours considérés au temps t, qui est le plus souvent omis pour alléger l'écriture.

Enonçons un lemme élémentaire ; soient F, G deux espaces euclidiens, et $j \geq 1$ un entier ; soit $L(F^{\otimes j},G)$ l'espace des applications multilinéaire de F^j dans G. Il existe une application polynômiale

$$\Gamma_j : L(F^{\otimes j},G) \times F \times F \to L(F,G)$$

telle que pour tout $u,v,w \in F$, tout $B \in L(F^{\otimes j},G)$, la relation $u = v+w$ implique

(5) $\quad B \cdot u^j = B(v+w)^j = B \cdot v^j + \Gamma_j(B,u,v) \cdot w \,.$

De plus, $\Gamma_j(B,u,v)$ est linéaire en B, de degré total $(j-1)$ en u, v. Ceci se vérifie par récurrence sur j.

Pour $N \geq 2$, $i+j \geq 2$, appliquons (5) avec $u = R_1$, $v = \frac{1}{\varepsilon} z_{N-1}$, $w = \varepsilon^{N-1} R_N$, $B = b_{ij}(t)$ pour écrire $\varepsilon^i b_{ij} \cdot (x^\varepsilon - x^o)^j = \varepsilon^{i+j} b_{ij} \cdot (v+w)^j$ sous la forme

$$\varepsilon^{i+j} b_{ij}(\tfrac{1}{\varepsilon} z_{N-1})^j + \varepsilon^{N+i+j-1}\, \Gamma_j(b_{ij},R_1,\tfrac{1}{\varepsilon} z_{N-1}) \cdot R_N \,.$$

Le terme $\varepsilon^{i+j-2}\, \Gamma_j(b_{ij},R_1,\frac{1}{\varepsilon} z_{N-1})$ appartient à $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ et est d'après (1)(5) une fonction γ_{ij} polynômiale (à coefficients <u>constants</u>) en ε, $b_{ij}(t)$, $R_1(t)$, $g_1(t)$, $\varepsilon g_2(t),\ldots, \varepsilon^{N-2} g_{N-1}(t)$. Ceci donne pour $i+j \geq 2$, $N \geq 2$

(6) $\quad \varepsilon^i b_{ij}(x^\varepsilon - x^o)^j = \varepsilon^i b_{ij}(z_{N-1})^j + \varepsilon^{N+1} \gamma_{ij}(\varepsilon, b_{ij}, R_1, g_1 \ldots, \varepsilon^{N-2} g_{N-1}) \cdot R_N \,.$

Pour $i+j = 1$, écrivons directement

(7) $\quad b_{01}(x^\varepsilon - x^o) = b_{01} z_N + \varepsilon^{N+1} b_{01} R_{N+1} \,.$

Mais les polynômes aléatoires S_j, K_j définis en 2.1 (5) vérifient clairement, pour $N \geq 2$,

$$b_{01}z_N + \varepsilon b_{10} + \sum_{2\le i+j\le N} \varepsilon^i b_{ij}(z_{N-1})^j = \sum_{1\le j\le N} \varepsilon^j K_j(g_1 \dots g_{j-1}) + \varepsilon^{N+1}\lambda_N$$

où λ_N est une fonction polynômiale (à coefficients constants) de ε, $\tilde{b}(t)$, $\varepsilon g_1(t),\dots,\varepsilon^{N-1}g_{N-1}(t)$.

Sommons (6) (7), reportons dans (2) et tenons compte de l'égalité précédente pour écrire

$$(8)\qquad b(t,\varepsilon,x_t^\varepsilon) - b(t,0,x_t^o) = \sum_{1\le j\le N} \varepsilon^j K_j(g_1 \dots g_{j-1}) + \varepsilon^{N+1}(b_{01}R_{N+1} + \nu_{N+1} + \psi_N \cdot R_N)$$

de même

$$(9)\qquad \sigma(t,\varepsilon,x_t^\varepsilon) - \sigma(t,0,x_t^o) = \sum_{1\le j\le N} \varepsilon^j S_j(g_1 \dots g_{j-1}) + \varepsilon^{N+1}(\sigma_{01}R_{N+1} + \mu_{N+1} + \phi_N \cdot R_N)$$

avec $\phi_N = \Phi_N[\varepsilon,\tilde{\sigma}(t),R_1(t),g_1(t),\dots,\varepsilon^{N-2}g_{N-1}(t)]$

$\psi_N = \Psi_N[\varepsilon,\tilde{b}(t),R_1(t),g_1(t),\dots,\varepsilon^{N-2}g_{N-1}(t)]$

où Φ_N et Ψ_N sont des fonctions polynômiales à coefficients constants, à valeurs dans l'espace des applications affines de $\mathbb{R}^m$ dans $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement.

Dans l'équation 1.1 (1) vérifiée par x^ε remplaçons x^ε, σ, b par les développements (1) (8) (9). Comme les g_j sont solutions du système stochastique 2.1 (4), les termes en ε^j, $j \le N$, disparaissent et on obtient pour $t \le \zeta^o \wedge \zeta^\varepsilon$, $N \ge 2$,

$$(10)\qquad dR_{N+1} = (\sigma_{01}R_{N+1} + \phi_N \cdot R_N + \mu_{N+1})dw + (b_{01}R_{N+1} + \psi_N \cdot R_N + \nu_{N+1})dt$$

$$R_{N+1}(0) \equiv 0.$$

Un calcul direct montre que (10) est vraie pour N = 1,2 avec

$$(11)\qquad \phi_1 \equiv \psi_1 \equiv 0$$

$$\phi_2 \cdot v = \sigma_{11}(t)v + \sigma_{02}(t) \cdot (R_1(t),v) \qquad \text{pour tout } v \in \mathbb{R}^m$$

$$\psi_2 \cdot v = b_{11}(t)v + b_{02}(t) \cdot (R_1(t),v) \qquad \text{pour tout } v \in \mathbb{R}^m .$$

Le changement de variable linéaire 2.2 (7) (8) (9), noté ici

(12) $\qquad r_{N+1}(t) = Q_t R_{N+1}(t) \qquad$ sur $0 \leq t \leq \zeta^o \wedge \zeta^\varepsilon$

transforme (cf. appendice A.8 (20) (21)) le système (10) en

(13) $\qquad dr_{N+1} = F_N dw + G_N dt$

avec (le temps t étant toujours sous-entendu dans l'écriture ci-dessous)

$$Q^{-1}F_N = \phi_N \cdot R_N + \mu_{N+1}$$

$$Q^{-1}G_N = \psi_N \cdot R_N + \nu_{N+1} + B[\sigma_{01}, \phi_N \cdot R_N + \mu_{N+1}]$$

où B est une forme bilinéaire à coefficients constants.
En particulier, $F_N(t)$ et $G_N(t)$ sont des fonctions polynômiales (à coefficients constants) de ε, $\tilde{\sigma}(t)$, $\tilde{b}(t)$, $R_1(t)$, $g_1(t),\dots,g_{N-1}(t), Q_t, Q_t^{-1}, \mu_{N+1}(t), \nu_{N+1}(t)$, $r_N(t)$.

4.- ESTIMATIONS DE LA QUEUE DES COEFFICIENTS ET DU RESTE DE TAYLOR STOCHASTIQUE

4.1.- ESQUISSE DES RESULTATS : Pour chercher un développement asymptotique de $E[F(\varepsilon, x^\varepsilon_{OT})]$quand $\varepsilon \to 0$, où F est une fonctionnelle numérique assez lisse, à partir du développement de Taylor stochastique de x^ε, il est crucial de savoir quand $E[|g_j(t)|^p]$ est fini et quand $E(|R^\varepsilon_{N+1}(t)|^p)$ est borné pour $\varepsilon \leq 1$.

Dans le cas général 1.1(2), ces moments peuvent ne pas exister. Par contre $1_{\{t<T\wedge T^o_K\}}(\sup_{[0,t]} |g_j|)$ et $1_{\{t<T\wedge T^o_K \wedge T^\varepsilon_K\}} \sup_{[0,t]} |R^\varepsilon_{N+1}|$ ont des moments de tous ordres, uniformément bornés en $\varepsilon \leq 1$ pour K compact donné, T temps fixé, et T^ε_K temps de sortie de K pour x^ε. Des restrictions sur la croissance en y de $\sigma(t,\varepsilon,y)$, $b(t,\varepsilon,y)$ et de leurs dérivées garantissent un résultat analogue avec K = U.

Dans le cas $\sigma(t,0,y) \equiv 0$, c'est-à-dire des systèmes dynamiques perturbés, les moments de $\sup_{[0,t]} |g_j|$ existent toujours si t est antérieur au temps (déterministe) d'explosion de x^o, et dans la même situation, $1_{\{t<T^\varepsilon_K\}} \sup_{[0,t]} |R^\varepsilon_{N+1}|$ a des moments uniformément bornés en $\varepsilon \leq 1$.

Par contre, les $\exp|g_j(t)|$ et $\exp|R^{\varepsilon}_{N+1}(t)|$ ne sont en général pas d'espérance finie, même pour les systèmes perturbés, dès que $j \geq 2$, $N+1 \geq 2$.

4.2.- PROPOSITION : Considérons les diffusions x^{ε} vérifiant 1.1 (1), 1.1 (2) avec $x^{\varepsilon}_o \equiv x$. Définissons les g_j par le système stochastique 2.1 (4) et R^{ε}_{N+1} par

$$x^{\varepsilon} = x^{o} + \sum_{1\leq j\leq N} \varepsilon^{j} g_j + \varepsilon^{N+1} R^{\varepsilon}_{N+1} .$$

Fixons un temps T et un compact K de U. Soit T^{ε}_K le temps de première sortie de K pour x^{ε}. Alors il existe $\rho, c > 0$ tels que pour tout $x \in U$, $r \geq \rho$, $t \leq T$ on ait

(1) $$P_x[\sup_{o\leq s\leq t} |g_j(s)| \geq r \quad ; \quad t < T^{o}_K] \leq \exp\left[-c\, \frac{(\mathrm{Log}\ r)^2}{t}\right] \quad \text{pour } j = 1 \ldots N$$

$$P_x[\sup_{o\leq s\leq t} |R^{\varepsilon}_{N+1}(s)| \geq r \quad ; \quad t < T^{o}_K \wedge T^{\varepsilon}_K] \leq \exp\left[-c\, \frac{(\mathrm{Log}\ r)^2}{t}\right] \quad \text{pour } \varepsilon \leq 1.$$

PREUVE : cf. ci-dessous en 4.6.

4.3.- PROPOSITION : Particularisons la situation précédente 4.2 au cas où x^{ε} est un système dynamique faiblement perturbé, c'est-à-dire où $\sigma(t,0,y) \equiv 0$. Fixons un point initial $x \in U$ et un temps T strictement antérieur au temps d'explosion (déterministe) de x^{o}. Alors il existe α, ρ, $c > 0$ tels que pour tout $r \geq \rho$, $t \leq T$ on ait

(2) $$P_x [\sup_{o\leq s\leq t} |g_j(s)| \geq r] \leq \exp\left(-c\,\frac{r^{\alpha}}{t}\right) \qquad \text{pour } j = 1 \ldots N.$$

Si K est un compact de U, il existe β, ρ, $c > 0$ tels que pour tout $r \geq \rho$, $t \leq T$, $\varepsilon \leq 1$, on ait

$$P_x [\sup_{o\leq s\leq t} |R^{\varepsilon}_{N+1}(s)| \geq r \quad ; \quad t \leq T^{\varepsilon}_K] \leq \exp\left(-c\,\frac{r^{\beta}}{t}\right).$$

PREUVE : cf. ci-dessous en 4.6.

4.4.- PRECISIONS SUR LES TERMES D'INDICE INFERIEUR A 3 : La situation est celle du paragraphe 4.3 précédent, et donc $\sigma(t,0,y) \equiv 0$. Enonçons quelques estimations plus précises utiles dans la seconde partie de cet article. Les preuves sont données plus bas en 4.7, et on suppose $t \leq T < \zeta^{o}$.

- Dans (2) on peut prendre $\alpha = 2$ si $j = 1$, et $\alpha = 1$ si $j = 2$; ainsi $\sup_{[0,t]} |g_1|$ est à queue en $\exp(-c\frac{r^2}{t})$, et $\sup_{[0,t]} |g_2|$ est à queue en $\exp(-c\frac{r}{t})$.

- Dans (3) on peut prendre $\beta = 2$ si $N+1 = 1$, $\beta = 1$ si $N+1 = 2$, $\beta = \frac{2}{3}$ si $N+1 = 3$. Ainsi le suprémum de $|R_1^\varepsilon|$ - resp. $|R_2^\varepsilon|$, $|R_3^\varepsilon|$ - sur $[0, t \wedge T_K^\varepsilon]$ est à queue en $\exp(-c\frac{r^2}{t})$, resp. en $\exp(-c\frac{r}{t})$ et $\exp(-c\frac{r^{2/3}}{t})$, uniformément sur $\varepsilon \le 1$, $t \le T$.

- Enfin, soit f la trajectoire (déterministe) sur [OT] du système dynamique limite x^o, issue du point initial x commun aux x^ε. Soit V la boule de centre f, de rayon χ pour la norme uniforme sur [OT] ; supposons χ assez petit pour que les trajectoires appartenant à V soient toutes à valeurs dans U. Soit τ_V^ε le temps de première sortie du "tube" V d'axe f pour x^ε. Alors il existe $\rho, c > 0$ tels que pour $t \le T$, $\varepsilon \le \chi$, $r \ge \rho/\chi$ on ait

$$\sup_{[0, t\wedge\tau_V^\varepsilon]} |\varepsilon R_1^\varepsilon| \le \chi \qquad P_x\text{-p.s.}$$

$$P_x[\sup_{[0, t\wedge\tau_V^\varepsilon]} |\varepsilon R_2^\varepsilon| \ge r] \le \exp(-\frac{c}{t}\frac{r^2}{\chi^2})$$

$$P_x[\sup_{[0, t\wedge\tau_V^\varepsilon]} |\varepsilon R_3^\varepsilon| \ge r] \le \exp(-\frac{c}{t}\frac{r}{\chi})$$

4.5.- <u>LEMMES PRELIMINAIRES</u> : Fixons le point initial $x \in U$ des x^ε ; considérons tous les processus x^o, $x^\varepsilon, g_j, R_N^\varepsilon$ etc... comme définis sur l'espace de probabilité (Ω, P) naturel associé au brownien w. Donnons-nous un temps d'arrêt ζ. Pour tout processus (X_t) défini sur (Ω, P), à valeurs dans un espace euclidien, et continu sur $[0, \zeta[$, notons

(3) $$\hat{X}_t = 1_{\{t<\zeta\}} \sup_{0\le s\le t} |X_s|.$$

Nous dirons que X est du type $\mathcal{W}(\alpha, c, \zeta)$ avec $\varepsilon, c > 0$ si pour tout $t \ge 0$, $r \ge c$, on a

(4) $$P(\hat{X}_t \ge r) \le \exp(-\frac{r^\alpha}{ct})$$

et que X est du type $\mathcal{E}(c,\zeta)$ avec $c > 0$ si pour tout $t \geq 0$, $r \geq c$, on a

$$(5) \qquad P(\hat{X}_t \geq r) \leq \exp\left[-\frac{(\mathrm{Log}\ r)^2}{c\,t}\right].$$

Par exemple $|w_t|^{1/\alpha} \in \mathcal{W}(\alpha,c,\zeta)$ et $\exp|w_t| \in \mathcal{E}(c,\zeta)$. Par des arguments élémentaires, on vérifie les propriétés (6) et (7) ci-dessous, où le même temps d'arrêt ζ reste sous-entendu dans les écritures $\mathcal{W}(\alpha,c)$, $\mathcal{E}(c)$ etc...

(6) Soit ϕ_t un processus aléatoire continu sur $[0,\zeta[$, à valeurs dans l'espace des applications polynômiales de degré $\leq q$, en p variables euclidiennes, à coefficients bornés par une constante A sur $[0,\zeta[$; alors l'application qui, aux processus $X^1 \ldots X^p$ associe le processus $Z_t = \phi_t(X_t^1 \ldots X_t^p)$ envoie $\mathcal{W}(\alpha_1,c_1) \times \ldots \times \mathcal{W}(\alpha_p,c_p)$ dans un $\mathcal{W}(\alpha,c)$, et $\mathcal{E}(d_1) \times \ldots \times \mathcal{E}(d_p)$ dans un $\mathcal{E}(d)$ où (α,c) et d sont resp. déterminés par $p,q,A,\alpha_1,c_1 \ldots \alpha_p,c_p$ et $p,q,A,d_1 \ldots d_p$.

En particulier $X^1 \in \mathcal{W}(\alpha_1,c_1)$ et $X^2 \in \mathcal{W}(\alpha_2,c_2)$ impliquant $B(X^1,X^2) \in \mathcal{W}(\alpha,c)$ avec $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}$, pour toute forme bilinéaire bornée B.

(7) Si ζ est borné par T fixe, l'intégration stochastique $X \to Z_t = \int_0^t X_s dw_s$ envoie $\mathcal{W}(\alpha,c)$ dans $\mathcal{W}(\alpha_1,c_1)$ et $\mathcal{E}(d)$ dans $\mathcal{E}(d_1)$, avec $\frac{1}{\alpha_1} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2}$ et c_1, d_1 déterminés par T,α,c,d. L'intégrale riemannienne envoie $\mathcal{W}(\alpha,c)$ dans $\mathcal{W}(\alpha,c_1)$ et $\mathcal{E}(d)$ dans $\mathcal{E}(d_1)$.

4.6.- PREUVE DES PROPOSITIONS 4.2 ET 4.3 : Fixons T, $x \in U$, et K compact de U. Prenons $\zeta = T \wedge T_K^o$. D'après l'appendice (prop. A.2), les matrices aléatoires Q_t et Q_t^{-1} solutions des équations linéaires 2.2 (7) et (8) à coefficients bornés sur $[0,\zeta[$, sont donc dans un $\mathcal{E}(c_o,\zeta)$. D'après 2.1 (5) et 2.2 (12), les polynômes aléatoires $\tilde{S}_{j+1,t}$ et $\tilde{K}_{j+1,t}$ sont à coefficients bornés par une constante sur $0 \leq t < \zeta$. Le système en cascade 2.2 (10) vérifié par les $h_j = Q\,g_j$ montre alors par récurrence sur j et utilisation des propriétés (6) et (7) ci-dessus que $h_j \in \mathcal{E}(c_j,\zeta)$, $j = 1 \ldots N$. Mais g_j est un polynôme en Q^{-1}, h_j et donc par (6) on conclut que $g_j \in \mathcal{E}(c,\zeta)$, $j = 1 \ldots N$.

Prenons maintenant $\zeta' = T \wedge T_K^o \wedge T_K^\varepsilon$, de sorte qu'a fortiori $g_j \in \mathcal{E}(c,\zeta')$, $j = 1 \ldots N$. Supposons prouvée l'existence de $d_1 \ldots d_N$ tels que $R_j \in \mathcal{E}(d_j,\zeta')$ pour $j = 1 \ldots N$ et $\varepsilon \leq 1$. La formule 3 (3) majore $|\mu_{N+1}|$ et $|\nu_{N+1}|$ par un multiple constant de $(1 + |R_1|)^{N+1}$ pour $t < \zeta'$, $\varepsilon \leq 1$. Les coefficients F_N, G_N de l'équation stochastique 3 (13) donnant dr_{N+1}, où $r_{N+1} = Q R_{N+1}$, sont par suite, pour $t < \zeta'$, $\varepsilon \le 1$, majorés en norme euclidienne par des polynômes (à coefficients constants) en $|Q|, |Q^{-1}|, |R_1|, |R_N|, |g_1|, \ldots, |g_{N-1}|$. Tous ces processus étant dans des $\mathcal{E}(c,\zeta')$ pour diverses valeurs de c, on en déduit, toujours avec $\varepsilon \le 1$, d'abord par (6) que F_N, G_N sont dans un $\mathcal{E}(d,\zeta')$, puis par (7) que r_{N+1} est dans un $\mathcal{E}(d',\zeta')$ et enfin par (6) que $R_{N+1} \in \mathcal{E}(d_{N+1},\zeta')$.

Il ne reste qu'à amorcer la récurrence sur N. Notons pour cela que

$$(8) \qquad dR_1(t) = \frac{1}{\varepsilon}[\sigma(t,\varepsilon,x_t^\varepsilon) - \sigma(t,0,x_t^o)]dw_t + \frac{1}{\varepsilon}[b(t,\varepsilon,x_t^\varepsilon) - b(t,0,x_t^o)]dt$$

ce qui s'éctit

$$(9) \qquad dR_1(t) = u_\varepsilon(t,y_t)dw_t + v_\varepsilon(t,y_t)dt$$

avec $y_t = (x_t^o, R_1(t))$, et pour $\varepsilon \le 1$, $t < \zeta'$, la majoration

$$(10) \qquad |u_\varepsilon(t,y_t)| + |v_\varepsilon(t,y_t)| \le M(1 + |R_1(t)|)$$

où la constante M est déterminée par K et T. La proposition A.2 de l'appendice entraîne donc $R_1 \in \mathcal{E}(c_1,\zeta')$ avec c_1 constante indépendante de $\varepsilon \le 1$. Ceci achève la preuve de la proposition 4.2.

Supposons maintenant comme en 4.3, que $\sigma(t,0,y) \equiv 0$. On a vu en 2.3 que ζ^o, Q_t, Q_t^{-1} sont déterministes. Fixons le point initial x des x^ε et un temps (fixe) $T < \zeta^o$. Le processus h_1 est évidemment dans $\mathcal{W}(\alpha_1,c_1,T)$ d'après 2.3. Comme dans la preuve précédente, une application répétée de (6) (7) fournit α_j, c_j tels que $g_j \in \mathcal{W}(\alpha_j,c_j,T)$ pour $j = 1 \ldots N$.

Donnons-nous K compact dans U, et soit $\zeta'' = T \wedge T_K^\varepsilon$. Les systèmes 3(10) et 3(13) montrent par une récurrence analogue à la précédente, que l'hypothèse $R_i \in \mathcal{W}(\beta_i,d_i,\zeta'')$ pour $1 \le i \le j$ et $\varepsilon \le 1$, entraîne $R_{j+1} \in \mathcal{W}(\beta_{j+1},d_{j+1},\zeta'')$. Pour amorcer la récurrence, on note que dans l'équation (9) donnant dR_1, on a $u_\varepsilon(t,y_t) \equiv \mu_1$ et $v_\varepsilon(t,y_t) \equiv \nu_1$ avec les notations du § 3. Comme $\sigma(t,0,y) \equiv 0$, l'estimation 3(3bis) fournit une constante M telle que pour $\varepsilon \le 1$, $t < \zeta''$ on ait

$$|u_\varepsilon(t,y_t)| \le M \qquad |v_\varepsilon(t,y_t)| \le M(1 + |R_1(t)|).$$

Par la proposition A.2 de l'appendice, on conclut que $R_1 \in \mathcal{W}(2,d_1,\zeta'')$ où la constante d_1 ne dépend pas de $\varepsilon \leq 1$. Ceci achève la preuve de la proposition 4.3.

4.7.- <u>ETUDE DETAILLEE DES TERMES D'INDICE 1,2,3</u> : <u>On suppose</u> $\sigma(t,0,y) \equiv 0$. Les sections 2.2, 2.3 et les relations 3(10), 3(11) donnent alors

$$\begin{cases} g_1 \text{ est gaussien} \\ dg_2 - b_{01}g_2 = (\sigma_{20} + \sigma_{11}g_1)dw + (b_{20} + b_{11}g_1 + b_{02}g_1^2)dt \end{cases}$$

$$dR_2 - b_{01}R_2 = \mu_2 dw + \nu_2 dt$$

$$dR_3 - b_{01}R_3 = (\sigma_{11}R_2 + \mu_3)dw + [b_{11}R_2 + b_{02}(R_1,R_2) + \nu_3]dt$$

Soit un temps fixe $T < \zeta^o$. Le processus gaussien g_1 est bien sûr dans $\mathcal{W}(2,c_1,T)$. Puisque Q_t, Q_t^{-1} sont déterministes bornées sur $[OT]$, l'équation donnant dg_2 montre alors par 4.5(6) et 4.5(7) que $g_2 \in \mathcal{W}(1,c_2,T)$.

Soit $K \subset U$ un compact, et posons $\zeta = T \wedge T_K^\varepsilon$. Les estimations 3(3) et 3(3bis) fournissent un nombre fixe c tel que pour $t < \zeta$, $\varepsilon \leq 1$, on ait

$$(11) \qquad |\mu_2| \leq c \quad , \quad |\nu_2| \leq c(1 + |R_1|)^2$$

$$|\mu_3| \leq c(1 + |R_1|)^2 \quad , \quad |\nu_3| \leq c(1 + |R_1|)^3 \, .$$

On sait déjà (voir section 4.6) que $R_1 \in \mathcal{W}(2,d_1,\zeta)$. Appliquons les lemmes 4.5(6) et 4.5(7), et les majorations (11) aux équations stochastiques donnant dR_2 et dR_3 pour conclure d'abord que $R_2 \in \mathcal{W}(1,d_2,\zeta)$, et enfin que $R_3 \in \mathcal{W}(\frac{2}{3},d_3,\zeta)$, toujours pour $\varepsilon \leq 1$.

Ces estimations uniformes en $\varepsilon \leq 1$ s'améliorent si on remplace R_i par εR_i, $i = 1,2,3$. Soit $f : [OT] \to U$ la trajectoire (déterministe) de x^o issue du point initial x. Soit V une boule de centre f, de rayon χ assez petit, comme décrite en 4.4. <u>Imposons</u> $\varepsilon \leq \chi \leq 1$.

Posons $\eta = T \wedge \tau_V^\varepsilon$, où τ_V^ε est le temps de première sortie du tube V d'axe f, pour x^ε. Par définition, on a $|\varepsilon R_1| = |x^\varepsilon - x^o| \leq \chi$ sur $[0,\eta]$. D'après (11) ceci entraîne pour $t < \eta$, $\varepsilon \leq \chi \leq 1$,

$$|\varepsilon\mu_2| \le c\,\chi \qquad , \qquad |\varepsilon\nu_2| \le 2\,c\,\chi(1+|R_1|)$$

$$|\varepsilon\mu_3| \le 2\,c\,\chi(1+|R_1|) \qquad , \qquad |\varepsilon\nu_3| \le 2\,c\,\chi(1+|R_1|)^2$$

Par 4.5(6) et 4.5(7) appliquées aux équations donnant dR_2, dR_3, on en tire d'abord $\varepsilon R_2 \in \mathcal{W}(2,\chi^2 d_4,\eta)$ puis $\varepsilon(\sigma_{11}R_2 + \mu_3) \in \mathcal{W}(2,\chi^2 d_5,\eta)$ et $\varepsilon[b_{11}R_2 + b_{02}(R_1,R_2) + \nu_3] \in \mathcal{W}(1,\chi d_6,\eta)$, d'où enfin $\varepsilon R_3 \in \mathcal{W}(1,\chi d_7,\eta)$, où les constantes $d_4 \dots d_7$ sont indépendantes de ε, χ pourvu que $\varepsilon \le \chi \le 1$. Ceci prouve les assertions de 4.4.

4.8.- <u>COROLLAIRE</u> : Dans la situation générale 4.2, pour $x \in U$ et $T > 0$ fixés, on a

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0 \\ r\to+\infty}} P_x\,[\sup_{0\le s\le T} |R^{\varepsilon}_{N+1}(s)| \ge r \quad ; \quad T < \zeta^{\,o}] = 0.$$

<u>Ceci achève la preuve du théorème 1.3.</u>

<u>PREUVE</u> : Soient K, L compacts dans U avec $K \subset L^o$. Pour tout évènement $A \subset \Omega$ on a

$$P_x[A \cap (t<\zeta^o)] \le P_x[A \cap (t < T^o_K \wedge T^{\varepsilon}_L)] + P_x[T^{\varepsilon}_L \le t < T^o_K] + P_x[T^o_K \le t < \zeta^o] \ .$$

Le troisième terme tend vers 0 quand K croît vers U. Le second terme est majoré par $P_x(\sup_{0\le s\le t} |R^{\varepsilon}_1(s)| > \frac{a}{\varepsilon}\ ;\ t < T^o_K)$ où $a > 0$ est la distance de K à U-L. La proposition A.2 de l'appendice appliquée à (9)(10) fournit $c > 0$, $\varepsilon_o > 0$ tels que pour $t \le T$, $\varepsilon \le \varepsilon_o$ on ait

$$(12) \qquad P_x[T^{\varepsilon}_L \le t < T^o_K] \le P_x(\sup_{0\le s\le t} |R^{\varepsilon}_1(s)| > \frac{a}{\varepsilon}\ ;\ t < T^o_K) \le \exp[-\frac{1}{ct}\,(\mathrm{Log}\,\frac{a}{\varepsilon})^2].$$

Prenons $A = \{\sup_{0\le s\le T} |R^{\varepsilon}_{N+1}(s)| \ge r\}$ avec r fixé assez grand. Majorons $P_x[A \cap (T < T^o_L \wedge T^{\varepsilon}_L)]$ par la proposition 4.2. Il suffit de choisir K assez proche de U, puis de fixer L, et enfin de prendre ε assez petit pour rendre $P_x[A \cap (T < \zeta^o)]$ arbitrairement petit.

5.- LE CAS PARTICULIER DES DIFFUSIONS EN TEMPS PETIT

5.1.- DIFFUSIONS EN TEMPS PETIT ET SYSTEMES DYNAMIQUES PERTURBES : Sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^m$, soit (y_t) la diffusion minimale solution de

(1) $$dy_t = \Gamma(y_t)dw_t + B(y_t)dt$$

où les champs Γ, B sont comme en 1.6. L'étude des trajectoires $y_{[0u]}$ quand $u \to 0$ amène naturellement à considérer (cf. Varadhan [Va], Azencott [Az 1] par exemple) les diffusions

(2) $$z_t^\varepsilon = y_{\varepsilon^2 t} \qquad t \geq 0$$

de sorte que les chemins aléatoires $z^\varepsilon_{[01]}$ et $y_{[0,\varepsilon^2]}$ coïncident à reparamétrage près. Introduisons le brownien w_t^ε défini par

(3) $$w_t^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} w_{\varepsilon^2 t}$$

pour avoir la relation

(4) $$dz^\varepsilon = \varepsilon\Gamma(z^\varepsilon)dw^\varepsilon + \varepsilon^2 B(z^\varepsilon)dt \ .$$

Par suite pour chaque ε, les processus $(z^\varepsilon, w^\varepsilon)$ et (x^ε, w) ont même loi, si on définit x^ε par

(5) $$dx^\varepsilon = \varepsilon\Gamma(x^\varepsilon)dw + \varepsilon^2 B(x^\varepsilon)dt.$$

Les équations (5) sont un cas particulier de 1.1 (1) avec pour $\varepsilon, t \geq 0$, $y \in U$

(6) $$\sigma(t,\varepsilon,y) = \varepsilon\Gamma(y) \qquad \text{et} \qquad b(t,\varepsilon,y) = \varepsilon^2 B(y).$$

Ainsi (5) est un système dynamique faiblement perturbé (cf. 2.3) puisque $\sigma(t,0,y) \equiv 0$, mais <u>le système dynamique limite 1.5 (7) est ici trivial</u> et s'écrit $\frac{dx_t^0}{dt} \equiv 0$, car $b(t,0,y) \equiv 0$.

Avec les notations de 2.1 (2), on déduit de (6) les relations suivantes, en notant x le point initial des x^ε,

$$(7)\qquad \sigma_{ij}(t) \equiv 0 \qquad \text{pour } i \neq 1 \;,\; t \geq 0$$

$$b_{ij}(t) \equiv 0 \qquad \text{pour } i \neq 2 \;,\; t \geq 0$$

$$\sigma_{1j}(t) \equiv \frac{1}{j!}\;\Gamma^{(j)}(x) \qquad \text{pour } j \geq 0 \;,\; t \geq 0$$

$$b_{2j}(t) \equiv \frac{1}{j!}\;B^{(j)}(x) \qquad \text{pour } j \geq 0 \;,\; t \geq 0.$$

Les polynômes $S_{j,t}$, $K_{j,t}$ donnés par 2.1 (5) sont ici à coefficients constants quand t varie ; notons-les donc S_j, K_j et tirons de (7) et 2.1 (5) les formules suivantes

$$(8)\qquad S_1(v) \equiv \Gamma(x) \;,\quad K_1(v) \equiv 0 \qquad \text{pour } v \in \mathbb{R}^m$$

$$S_2(v) = \Gamma'(x)v \;,\quad K_2(v) \equiv B(x) \qquad \text{pour } v \in \mathbb{R}^m$$

$$S_{j+1}(v_1 \ldots v_j) = \sum_{\mathfrak{I}(j+1)} \frac{1}{r!}\;\Gamma^{(r)}(x)[v_{p_1} \ldots v_{p_r}] \;,\quad \text{pour } j \geq 2,\; v_1 \ldots v_j \in \mathbb{R}^m$$

$$K_{j+1}(v_1 \ldots v_j) = \sum_{\mathfrak{I}(j+1)} \frac{1}{r!}\;B^{(r)}(x)[v_{p_1} \ldots v_{p_r}] \;,\quad \text{pour } j \geq 2,\; v_1 \ldots v_j \in \mathbb{R}^m$$

où $\mathfrak{I}(j+1) = \{r, p_1 \ldots p_r \mid 1 \leq r \leq j \;;\; 1 \leq p_1, \ldots, p_r \leq j \;;\; p_1 + \ldots + p_r = j\}$.

Si on pose degré $v_j = j$, S_{j+1} et K_{j+1} sont des polynômes homogènes de degré total j et (j - 1) respectivement.

Le changement de variable $h_j = Q\,g_j$ est ici trivial avec $Q_t \equiv I$. Les g_j vérifient le système en cascade

$$(9)\qquad dg_{j+1} = S_{j+1}(g_1 \ldots g_j)dw + K_{j+1}(g_1 \ldots g_j)dt$$

qui se résout par quadratures successives. Une récurrence immédiate montre que g_j est combinaison linéaire finie d'intégrales multiples (d'ordre $\leq j$) du brownien w et d'un drift polynômial en t. Par exemple, on a

$$(10)\qquad g_1(t) = \Gamma(x)w_t \;,\quad g_2(t) = \int_0^t [\Gamma'(x)\Gamma(x)w_s]dw_s + t\,B(x).$$

Pour tout $\lambda > 0$ l'homogénéité des polynômes S_{j+1}, K_{j+1} donne

$$(11)\qquad \lambda^j\, S_{j+1}(\lambda^{-1}v_1,\dots,\lambda^{-1}v_j) = S_{j+1}(v_1 \dots v_j)$$

$$\lambda^{j-1}\, K_{j+1}(\lambda^{-1}v_1,\dots,\lambda^{-1}v_j) = K_{j+1}(v_1 \dots v_j)$$

de sorte que les $f_j(t) = \lambda^j g_j(t)$ vérifient $df_{j+1} = \lambda S_{j+1}(f_1\dots f_j)dw + \lambda^2 K_{j+1}(f_1\dots f_j)dt$
Mais grâce à (9)(3)(11), les $\phi_j(t) = g_j(\lambda^2 t)$ vérifient

$$(12)\qquad d\phi_j = \lambda\, S_{j+1}(\phi_1 \dots \phi_j)dw^\lambda + \lambda^2 K_{j+1}(\phi_1 \dots \phi_j)dt\ .$$

Puisque $w_t^\lambda = w_{\lambda^2 t}$ est un brownien, on voit que les processus $(w,\lambda g_1,\dots,\lambda^N g_N)$ et $(w^\lambda, g_1(\lambda^2.),\dots,g_N(\lambda^2.))$ ont même loi, pour chaque $\lambda > 0$ fixé.

5.2.- PREUVE DU THEOREME 1.6 : Appliquons le théorème général 1.3 à l'équation (5) pour écrire

$$x^\varepsilon = x + \sum_{1\le j\le N} \varepsilon^j g_j + \varepsilon^{N+1} R^\varepsilon_{n+1}$$

avec $\lim\limits_{\left\{\substack{r\to\infty\\ \varepsilon\to 0}\right.} P_x[\sup\limits_{0\le s\le T} |R^\varepsilon_{N+1}(s)| \ge r] = 0$ pour tout $T \ge 0$, tout $x \in U$. Comme (x^ε,w) et $(z^\varepsilon,w^\varepsilon)$ ont même loi, ce résultat se reformule pour $(z^\varepsilon,w^\varepsilon)$ par

$$(13)\qquad z^\varepsilon = x + \sum_{1\le j\le N} \varepsilon^j \gamma^\varepsilon_j + \varepsilon^{N+1}\rho^\varepsilon_{N+1}$$

avec pour T fixé,

$$(14)\qquad \lim_{\left\{\substack{r\to\infty\\ \varepsilon\to 0}\right.} P_x[\sup_{0\le s\le T} |\rho^\varepsilon_{N+1}(s)| \ge r] = 0$$

où les γ^ε_j sont définis à partir de w^ε exactement comme les g_j à partir de w, et vérifient donc l'analogue de (9)

$$(15)\qquad d\gamma^\varepsilon_j = S_{j+1}(\gamma^\varepsilon_1 \dots \gamma^\varepsilon_j)dw^\varepsilon + K_{j+1}(\gamma^\varepsilon_1 \dots \gamma^\varepsilon_j)dt\ .$$

Comme plus haut l'homogénéité des S_{j+1}, K_{j+1} montre alors que, par (11)(12), les processus $\eta^\varepsilon_j = \varepsilon^j\gamma^\varepsilon_j$ vérifient

$$d\eta^\varepsilon_j = \varepsilon\, S_{j+1}(\eta^\varepsilon_1 \dots \eta^\varepsilon_j)dw^\varepsilon + \varepsilon^2 K_{j+1}(\eta^\varepsilon_1 \dots \eta^\varepsilon_j)dt\ .$$

Au vu de (12) ce système coïncide avec le système vérifié par les processus $t \to g_j(\varepsilon^2 t)$, ce qui entraîne l'égalité $\varepsilon^j \gamma_j^\varepsilon(t) \equiv g_j(\varepsilon^2 t)$, $t \geq 0$.

La définition (2) de z^ε et le développement (13) donnent donc pour tout $t, \varepsilon \geq 0$, l'égalité P_x-presque sûre

$$(16) \qquad y_{\varepsilon^2 t} = x + \sum_{1 \leq j \leq N} g_j(\varepsilon^2 t) + \varepsilon^{N+1} \rho_{N+1}^\varepsilon(t)$$

où ρ_{n+1}^ε vérifie (14). On en conclut d'abord que pour chaque $s > 0$, le terme $\varepsilon^{N+1} \rho_{N+1}^\varepsilon(\frac{s}{\varepsilon^2})$ ne dépend pas de ε. Il existe donc un processus $\overline{R}_{N+1}(s)$ tel que $s^{(N+1)/2}\, \overline{R}_{N+1}(s) \equiv \varepsilon^{N+1} \rho_{N+1}^\varepsilon(\frac{s}{\varepsilon^2})$ pour tout $\varepsilon > 0$, $s > 0$.

Faisons $\varepsilon^2 t = s$ dans (16) pour obtenir alors

$$(17) \qquad y_s = x + \sum_{1 \leq j \leq N} g_j(s) + s^{(N+1)/2}\, \overline{R}_{N+1}(s)$$

tandis que (14) entraîne pour chaque $T > 0$,

$$(18) \qquad \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ r \to \infty}} P_x \,[\sup_{t \in [OT]} t^{(N+1)/2} \,|\overline{R}_{N+1}(\varepsilon^2 t)| \geq r] = 0$$

d'où a fortiori,

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ r \to \infty}} P_x(|\overline{R}_{N+1}(t)| \geq r) = 0$$

Nous avons ainsi déduit le théorème 1.6 du théorème 1.3.

6.- DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES POUR $E[F(\varepsilon, x^\varepsilon)]$:

6.1.- PROPOSITION : Sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^m$, soit x^ε un système dynamique faiblement perturbé, de temps de vie ζ^ε, vérifiant donc 1.1 (1) et 1.1 (2), avec $\sigma(t,0,y) \equiv 0$. Fixons le point initial x des x^ε, et un temps T antérieur au temps d'explosion (déterministe) du système dynamique limite x^0. Soit $F : \mathbb{R}^+ \times C([OT],U) \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle bornée, de classe $N+1$, et supposons $F^{(N+1)}$ bornée sur les parties bornées de $\mathbb{R}^+ \times C([OT],U)$.

Alors on peut trouver des nombres a_j tels que

$$E_x[F(\varepsilon,x^{\varepsilon}_{OT})\ 1_{\{T<\zeta^{\varepsilon}\}}] = \sum_{0\le j\le N} a_j\varepsilon^j + O(\varepsilon^{N+1}).$$

Les a_j sont des combinaisons linéaires des $\frac{\partial^{i+k}F}{\partial\varepsilon^i\partial\phi^k}(0,x^o_{OT})$ où $i+k \le j$.

PREUVE : Voir 6.3 ci-dessous.

6.2.- COROLLAIRE : Soit (y_t) la diffusion minimale solution de $dy_t = \Gamma(y_t)dw_t + B(y_t)dt$ sur $U \subset \mathbb{R}^m$, avec Γ,B de classe $N+1$ comme en 1.6. Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction bornée de classe $N+1$. Fixons le point initial x des x^{ε}. Alors il existe des nombres a_j tels que, ζ dénotant le temps de vie de (y_t), on ait $E_x[f(y_t)\ 1_{\{t<\zeta\}}] = \sum_{0\le j\le N} a_j t^{j/2} + O(t^{\frac{N+1}{2}})$. Les a_j sont des combinaisons linéaires des $f^{(k)}(x)$, $k \le j$.

PREUVE : On se ramène à un cas particulier de 6.1 par la transformation décrite en 5.1.

6.3.- PREUVE DE LA PROPOSITION 6.1 : Puisque x^o est déterministe et $T < \zeta^o$, on peut fixer un compact K tel que $T < T^o_K$. Fixons un compact L de U avec $K \subset \overset{\circ}{L}$. Appliquons 4.8 (12) pour obtenir $a,c > 0$ tels que

$$(1)\qquad P_x(T^{\varepsilon}_L \le T) \le \exp\left[-c\left(\operatorname{Log}\frac{a}{\varepsilon}\right)^2\right]$$

Ceci fournit, F étant bornée, un nombre $c_1 > 0$ tel que pour ε assez petit

$$(2)\qquad E_x[F(\varepsilon,x^{\varepsilon}_{OT})\ 1_{\{T^{\varepsilon}_L\le T<\zeta^{\varepsilon}\}}] \le c_1\varepsilon^{N+2}.$$

On est ramené à étudier $E_x[F(\varepsilon,x^{\varepsilon}_{OT})\ 1_{T\le T^{\varepsilon}_L}]$. Le développement de Taylor de F au voisinage de $(0,x^o_{OT})$ et le fait que $\|F^{N+1}(\varepsilon,\phi)\|$ est bornée sur $\varepsilon \le 1$, $\|\phi\| \le$ cte. permet d'écrire pour $T \le T^{\varepsilon}_L$, $\varepsilon \le 1$,

$$F(\varepsilon,x^{\varepsilon}_{OT}) = F(0,x^o_{OT}) + S(\varepsilon,z^{\varepsilon}_{OT}) + \varepsilon^{N+1}\theta(\varepsilon)$$

où $|\theta(\varepsilon)|$ est borné par une constante quand $T \le T^{\varepsilon}_L$, $\varepsilon \le 1$, et où S est un "polynôme" de degré N, à coefficients dans l'espace des formes multilinéaires continues sur $C([OT],U)$, et où $z^{\varepsilon} = x^{\varepsilon} - x^o$.

Le développement de Taylor stochastique donne

$$z^{\varepsilon} = \sum_{1\le j\le N} \varepsilon^j g_j + \varepsilon^{N+1} R^{\varepsilon}_{N+1} .$$

Posant $a_o = F(0,x^o_{OT})$, on a pour $T \le T^{\varepsilon}_L$, $\varepsilon \le 1$

$$F(\varepsilon,x^{\varepsilon}_{OT}) = a_o + \sum_{1\le j\le N} \varepsilon^j \Phi_j(g_1\ldots g_j) + \varepsilon^{N+1}\Psi(g_1\ldots g_N,R^{\varepsilon}_{N+1}) + \varepsilon^{N+1}\theta(\varepsilon)$$

où Ψ et les Φ_j sont des "polynômes" au sens ci-dessus, en $g_1[OT],\ldots g_N[OT],R^{\varepsilon}_{N+1}[OT]$ et $g_1[OT]\ldots g_j[OT]$resp.

La proposition 4.3 affirme que $g_1\ldots g_N$ et $t \to 1_{\{t<T^{\varepsilon}_L\}} R^{\varepsilon}_{N+1}(t)$ sont du type $\mathcal{W}(\alpha,\rho,T)$, avec $\alpha,\rho > 0$ (cf. notations 4.5 (4)). Par suite pour $\varepsilon \le 1$ les polynômes $\Phi_j(g_1\ldots g_j)$, $j = 1\ldots N$, et $\Psi(g_1\ldots g_N,R^{\varepsilon}_{N+1})\, 1_{\{T\le T^{\varepsilon}_L\}}$ sont dans un $\mathcal{W}(\alpha_1,\rho_1,T)$, d'après les lemmes 4.5 (6) et 4.5 (7). En particulier, ils sont d'espérance finie, et pour $\varepsilon \le 1$ on a

$$E_x[|\Psi(g_1\ldots g_N,R^{\varepsilon}_{N+1})\, 1_{\{T\le T^{\varepsilon}_L\}}] \le \text{constante}.$$

Ceci achève la preuve 6.1, avec $a_j = E_x[\Phi_j(g_1\ldots g_j)]$.

7.- DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE $E[\exp(-\frac{F(x^{\varepsilon})}{\varepsilon^2})]$:

7.1.- LE PROBLEME : Sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^m$, soit x^{ε} un système dynamique faiblement perturbé, donc une diffusion du type 1.1 (1) avec $\sigma(t,0,y) \equiv 0$. Soit $F : C([OT],U) \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée, avec T fixé. Certains problèmes de physique mathématique, amènent, d'après une formalisation de Donsker (cf. [Sc]) à étudier le comportement de $J_{\varepsilon} = E[\exp(-\varepsilon^{-2}F(x^{\varepsilon}_{OT}))]$ quand $\varepsilon \to 0$. La relation

$$(1) \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log J_{\varepsilon} = - \inf_{\phi} [F(\phi) + \lambda_{OT}(\phi)]$$

où ϕ décrit $C([OT],U)$ et λ_{OT} est la fonctionnelle de Cramer (ou d'énergie) de 1.1 (1) a été clarifiée par Donsker-Varadhan [D-V] dans le cas où

$$(2) \qquad \sigma(t,\varepsilon,y) = \varepsilon\, s(y) \qquad \text{avec } ss^* \text{ inversible}$$

et précisée ensuite par Doss [Do] . En particulier, quand (2) est vraie, on sait [D-V] [Do] que (1) est vraie pour suffisamment de F si et seulement si la relation

$$(3) \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \log P(x^\varepsilon_{OT} \in A) = - \inf_{\phi\in A} \lambda(\phi)$$

est vraie pour suffisamment de parties mesurables A de C([OT],U).

Le problème du passage de $\log J_\varepsilon$ à J_ε, ou de $\log P(x^\varepsilon_{OT} \in A)$ à $P(x^\varepsilon_{OT} \in A)$ est délicat.

Un développement du type

$$(4) \qquad J_\varepsilon = e^{-\frac{a}{\varepsilon^2}} [a_o + a_1\varepsilon + \ldots + a_N\varepsilon^N + O(\varepsilon^{N+1})]$$

a été obtenu pour F lisse, dans le cas très particulier où $x^\varepsilon = \varepsilon w$, avec w brownien usuel, par Schilder [Sc].Doss[Do] a étendu ce résultat au cas où $\sigma(t,\varepsilon,y) = \varepsilon s(y)$ quand les champs de vecteurs colonnes des matrices s(y) commutent entre eux au sens des crochets de Lie. Cette situation n'est évidemment pas générique dès que la dimension m de l'espace d'états est supérieure à 1.

Nous obtenons ici un développement asymptotique du genre (4) dans la situation générique, avec $\sigma\sigma^*$ inversible, grâce à l'utilisation conjuguée de la formule de Taylor stochastique et de la méthode de Laplace appliquée aux intégrales "de Feynmann" (ou encore "flat integrals" sur l'espace des trajectoires. Le cas hypoelliptique ($\sigma\sigma^*$ non inversible) et les développements analogues pour $P(x^\varepsilon_{OT} \in A)$ seront traités ailleurs (cf. [Az 2]) suivant les mêmes principes.

7.2.- <u>HYPOTHESES ET NOTATIONS</u> : Sur $U \subset \mathbb{R}^m$, soit x^ε la diffusion minimale solution de

$$(5) \qquad dx^\varepsilon = \varepsilon s(x^\varepsilon)dw + b(\varepsilon,x^\varepsilon)dt$$

sous l'hypothèse

(6) s(y) et $b(\varepsilon,y)$ sont respectivement un champ de matrices rectangulaires et un champ de vecteurs sur U, de classe C^{N+3} avec $N \geq 0$, en $y \in U$ et $(\varepsilon,y) \in \mathbb{R}^+ \times U$ respectivement. De plus, on suppose ss^* inversible.

<u>Le temps T de 7.1 sera pris égal à 1</u> pour simplifier l'écriture, et on note

$\mathcal{C} = C([01],U)$.

La fonctionnelle $F : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ est supposée bornée, de classe C^{N+3} sur $\mathcal{C}$, avec de plus $\|F^{(N+3)}\|$ bornée sur les parties bornées de $\mathcal{C}$.

Le processus limite x^o est évidemment déterministe, solution de $\frac{dx_t^o}{dt} = b(0,x_t^o)$. Nous supposerons fixé le point initial $x \in U$ de tous les x^ε, $\varepsilon \geq 0$, et choisi tel que le temps d'explosion ζ^o de x^o vérifie $\zeta^o > 1$.

7.3.- LA FONCTIONNELLE DE CRAMER (OU D'ENERGIE) :

Au système (5) est associée une fonctionnelle $\lambda : \mathcal{C} \to [0,+\infty]$, semi-continue inférieurement, et telle que $\{\phi \in \mathcal{C} \mid \lambda(\phi) \leq a\}$ soit compact dans $\mathcal{C}$ pour tout a fini, appelée "énergie", "action" ou "transformée de Cramer" suivant les contextes (cf. [V-F] [D-V] [Az 1]) définie par

$$\lambda(\phi) = \frac{1}{2}\int_0^1 [\phi_t' - b(0,\phi_t)]^*[s(\phi_t)\ s^*(\phi_t)]^{-1}[\phi_t' - b(0,\phi_t)]dt \tag{7}$$

quand $\phi' \in L_2[01]$, et par $\lambda(\phi) = +\infty$ ailleurs.

Pour toute partie mesurable A de $\mathcal{C}$, on a (cf. [V-F] [Az 1])

$$- \inf_{\phi \in \overset{\circ}{A}} \lambda(\phi) \leq \underline{\lim}_{\varepsilon \to 0}\ \varepsilon^2 \log P_x(x_{OT}^\varepsilon \in A) \leq \overline{\lim}\ \varepsilon^2 \log P_x(x_{OT}^\varepsilon \in A) \leq - \inf_{\phi \in \bar{A}} \lambda(\phi). \tag{8}$$

Posons précisément, ζ^ε étant le temps de vie de x^ε,

$$J_\varepsilon = E_x[1_{\{\zeta^\varepsilon > 1\}}\ \exp(- \varepsilon^{-2}F(x_{01}^\varepsilon))] \tag{9}$$

$$a = \inf_{\mathcal{C}}(F + \lambda)\ . \tag{10}$$

Le minimum a est toujours atteint sur $\mathcal{C}$, et pour la question qui nous intéresse seul "compte" un voisinage arbitrairement petit (dans $\mathcal{C}$) de l'ensemble des points où $(F + \lambda)$ prend la valeur a. Pour traiter le cas le plus simple, nous supposerons que $(F + \lambda)$ n'atteint son minimum qu'en un nombre fini de points de $\mathcal{C}$. Ce cas se ramène bien sûr au suivant auquel nous nous restreindrons désormais :

(11) $(F + \lambda)$ n'atteint son minimum qu'en un seul point de $\mathcal{C}$, que nous noterons f.

La relation (1) est alors vraie (cf. [D-V][Do]) et d'après (8), pour tout voisinage V de 0 dans $\mathcal{C}$, il existe c > a tel que

$$E_x \{1_{[x^\varepsilon_{01} \notin f+V]} 1_{[\zeta^\varepsilon > 1]} \exp(-\varepsilon^2 F(x^\varepsilon_{01}))\} \le e^{-\frac{c}{\varepsilon^2}} .$$

Par suite si on pose

$$(12) \qquad J_{\varepsilon,V} = E_x \{1_{[x^\varepsilon_{01} \in f+V]} \exp(-\varepsilon^{-2} F(x^\varepsilon_{01}))\}$$

on a pour <u>tout</u> entier N, tout voisinage fixé V de f

$$(13) \qquad J_\varepsilon = [1 + o(\varepsilon^{N+1})] J_{\varepsilon,V} .$$

Nous prendrons pour V une boule de centre 0 de rayon assez petit pour que l'union des g[01] quand g décrit (f + V) soit relativement compacte dans U.

7.4.- <u>THEOREME</u> : Soit x^ε le système dynamique perturbé vérifiant (5) (6). Soit $F : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle bornée de classe C^{N+3} avec $\|F^{(N+3)}\|$ bornée sur les bornés de $\mathcal{C}$. On suppose $1 < \zeta^o$ = temps d'explosion (déterministe) de x^o. Soit λ la transformée de Cramer de (5) ; on suppose que $(F + \lambda)$ n'atteint son minimum u_o sur $\mathcal{C}$ qu'en un nombre fini de points.

Alors il existe des nombres $\alpha_o \ldots \alpha_N$, u_1 tels que

$$E_x [1_{[\zeta^\varepsilon > 1]} \exp(-\frac{F(x^\varepsilon_{01})}{2})] = [\alpha_o + \alpha_1 \varepsilon + \ldots + \alpha_N \varepsilon^N + 0(\varepsilon^{N+1})] \exp(-\frac{u_o}{\varepsilon^2} - \frac{u_1}{\varepsilon}) .$$

On a $u_1 = \int_o^1 [f'_t - b(0,f_t)]^* [s(f_t)s^*(f_t)]^{-1} \frac{\partial b}{\partial \varepsilon}(0,f_t)dt$ où f, parmi les points vérifiant $F + \lambda = u_o$, celui qui minimise l'intégrale donnant u_1.

<u>PREUVE</u> : Elle est donnée en 7.6, 7.7, 7.8, 7.9.

7.5.- <u>GENERALISATIONS</u> : Au lieu de (5), on peut considérer le système dynamique perturbé général 1.1 (1)

$$dx^\varepsilon_t = \sigma(t,\varepsilon,x^\varepsilon_t)dw_t + b(t,\varepsilon,x^\varepsilon_t)dt$$

avec $\sigma(t,0,y) \equiv 0$, $\sigma(t,.)$ et $b(t,.)$ de classe C^{N+3} à dérivées d'ordre $\leq N+3$ continues en t, et $\sigma\sigma^*$ inversible. Les mêmes méthodes s'appliquent en aménageant convenablement la définition de la transformée de Cramer en posant

$$\lambda(\phi) = \frac{1}{2}\int_0^1 [\phi_t' - b(t,0,\phi_t)]^* [\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}(t,0,\phi_t)\, \frac{\partial\sigma^*}{\partial\varepsilon}(t,0,\phi_t)]^{-1}[\phi_t' - b(t,0,\phi_t)]dt \ .$$

<u>On peut envisager le cas</u> $\varepsilon \in \mathbb{R}^q$; il faut alors remplacer $\frac{\lambda(\phi)}{\varepsilon^2}$ par $\lambda(\phi,\varepsilon)$ défini ainsi

$$\lambda(\phi,\varepsilon) = \frac{1}{2}\int_0^1 [\phi' - b(.,0,\phi)]^* A^{-1}[\phi' - b(.,0,\phi)]dt$$

avec $A_t = [\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}(t,0,\phi_t).\varepsilon]\,[\frac{\partial\sigma^*}{\partial\varepsilon}(t,0,\phi_t).\varepsilon]$; le terme principal de $E_x\,[\exp(-\frac{1}{|\varepsilon|^2}F(x_{01}^\varepsilon))]$ est alors en $\exp[-\frac{1}{|\varepsilon|^2}u_o(\varepsilon/|\varepsilon|)]$ où pour tout vecteur unitaire $v \in \mathbb{R}^q$, $u_o(v) = \inf_{\phi\in\mathcal{C}}[F(\phi) + \lambda(\phi,v)]$.

7.6.- <u>REDUCTION AU CAS</u> $f = 0$ <u>PAR LA FORMULE DE GIRSANOV</u> : Pour développer x^ε en série de Taylor stochastique au voisinage du point f qui minimise $(F + \lambda)$, posons $y^\varepsilon = x^\varepsilon - f$, de sorte que

$$(14) \qquad dy^\varepsilon = \varepsilon\, s(f + y^\varepsilon)dw + [b(\varepsilon,f + y^\varepsilon) - f']dt \ .$$

Posons pour tout ε, $t \geq 0$ et $v \in U$ tels que $(f_t + v) \in U$,

$$(15) \qquad B(t,\varepsilon,v) = b(\varepsilon,f_t + v) - b(0,f_t)$$

et introduisons la diffusion z^ε solution de

$$(16) \qquad dz_t^\varepsilon = \varepsilon\, s(f_t + z_t^\varepsilon)dw_t + B(t,\varepsilon,z_t^\varepsilon)dt \ .$$

Soit $\mathcal{E}$ l'espace des chemins définis sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $U \cup \delta$ où δ = point à l'infini de U, continus jusqu'au temps d'atteinte ζ de δ, constants après ζ, et avec limite à gauche en ζ. On peut toujours supposer que x_t^ε, y_t^ε, z_t^ε, w_t sont des variables aléatoires définies sur $\mathcal{E}$ adaptées aux tribus usuelles $\mathcal{F}_t$ = (évènements de $\mathcal{E}$ antérieurs à t).

Adoptons les notations suivantes

(17) $G(v) = [s(v)s^*(v)]^{-1}$ et $H(v) = G(v)s(v)$ pour $v \in U$

$h' = f' - b(0,f)$.

Sur $\mathcal{F}_1 \cap (\zeta > 1)$, la loi de y^ε_{01} est absolument continue par rapport à celle de z^ε_{01}, et la densité est donnée par $\exp[-\frac{I(\varepsilon,z^\varepsilon)}{\varepsilon^2}]$ avec (formule de Girsanov)

(18) $$I(\varepsilon,z^\varepsilon) = \int_0^1 h^* G(f+z^\varepsilon)\,.\,[dz^\varepsilon - B(t,\varepsilon,z^\varepsilon)dt] + \frac{1}{2}\int_0^1 h^* G(f+z^\varepsilon)h\,dt\ .$$

Pour toute fonctionnelle mesurable bornée $\Phi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$, on a

$$E[\Phi(y^\varepsilon)\,1_{[y^\varepsilon \in V]}] = E[\Phi(z^\varepsilon)\,1_{[z^\varepsilon \in V]} \exp(-\frac{I(\varepsilon,z^\varepsilon)}{\varepsilon^2})]$$

<u>où systématiquement</u> x^ε, y^ε, z^ε <u>désignent</u> x^ε_{01} y^ε_{01} z^ε_{01} .

En particulier l'expression $J_{\varepsilon,V}$ définie par (12) s'écrit

(19) $$J_{\varepsilon,V} = E\{1_{[z^\varepsilon \in V]} \exp[-\frac{F(f+z^\varepsilon) + I(\varepsilon,z^\varepsilon)}{\varepsilon^2}]\}\ .$$

On s'est ramené à une situation où le processus de base z^ε tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$, ce qui n'était pas le cas pour x^ε, avec l'utile restriction ($z^\varepsilon \in V$). La fonctionnelle $F(x^\varepsilon)$ est toutefois remplacée par une fonctionnelle plus compliquée car I contient une intégrale stochastique en z^ε.

7.7.- <u>DEVELOPPEMENTS DE TAYLOR PRELIMINAIRES</u> : Soit $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues sur [01] nulles en 0, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Appelons <u>polynôme</u> sur $\mathcal{C}$ toute fonction $\Phi : \mathcal{C} \to M$ où M est un espace euclidien quelconque, du type $\Phi(\phi) = \sum_{0\le j\le q} A_j \phi^j$, où chaque A_j est une application multilinéaire continue de $\mathcal{C}^j$ dans M, et $A_j\phi^j = A_j(\phi,\dots,\phi)$.

Le système faiblement perturbé z^ε vérifie $B(.,0,.) \equiv 0$ et donc z^o est le système dynamique trivial $z^o_t \equiv 0$. La formule de Taylor stochastique fournit une diffusion $g_1 \dots g_{N+2}$ à valeurs dans $(\mathbb{R}^m)^{N+2}$ et temps de vie infini, telle que

(20) $$z^\varepsilon = \sum_{1\le k\le j} \varepsilon^k g_k + \varepsilon^{j+1} R_{j+1} \qquad 1 \le j \le N+2$$

où les R_{j+1} dépendent de ε ; on posera aussi $z^{\varepsilon} = \varepsilon R_1$. Le processus g_1 est gaussien et les g_j sont des combinaisons linéaires (finies) d'intégrales multiples d'ordre $\leq j$ du brownien w - cf. 1.3 , 2.3.

Nous utilisons les notations $O(.)$ et $o(.)$ au sens usuel, quand $\varepsilon \to 0$; introduisons aussi la notation $\tilde{O}(.)$; si X, Y sont des variables aléatoires dépendant éventuellement de t, ε nous dirons que $Y = \tilde{O}(X)$ s'il existe un nombre fixe C tel que pour $z^{\varepsilon} \in V$, $\varepsilon \leq 1$, $t \leq 1$, on ait $|Y| \leq C|X|$.

Pour toute fonction $\Gamma : \mathscr{C} \to \mathbb{R}$, nous poserons $\Gamma_o = \Gamma(f)$, $\Gamma_n = \frac{1}{n!}\Gamma^{(n)}(f)$; nous noterons $Z = z^{\varepsilon}$. Si X est une variable aléatoire dépendant de t, ε, nous notons $\int X\,dw$ et $\int X\,dt$ les intégrales $\int_o^1 X_t dw_t$ et $\int_o^1 X_t dt$.

Remarquons que par (16) (17) on a

$$\int h^* G(f+Z)\,.\,(dZ - B\,dt) = \varepsilon \int h^* H(f+Z)dw\ .$$

Les formules de Taylor usuelles fournissent alors, grâce aux hypothèses 7.2, le développement

$$(21)\qquad F(f+Z) + I(\varepsilon,Z) = F_o + \lambda_o + \sum_{1\leq n\leq N+2} [F_n Z^n + \frac{1}{2}\int h^*.G_n Z^n\,.\,h\,dt$$
$$+ \varepsilon \int h^* H_{n-1} Z^{n-1} dw] + \tilde{O}(\|Z\|^{N+3}) + \varepsilon \int \tilde{O}(\|Z\|^{N+2})dw\ .$$

Commençons par appliquer ce résultat avec $N = 0$ en prenant soin d'écrire

$$Z = \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \varepsilon^3 R_3 \quad \text{et} \quad Z^2 = \varepsilon^2 g_1^2 + \varepsilon^3 g_1 R_2 + \varepsilon^2 R_2 Z$$

On obtient

$$(22)\ F(f+Z) + I(\varepsilon,Z) = A_o + A_1 + A_2 + A_3$$

$$A_o = F_o + \lambda_o = u_o$$
$$A_1 = \varepsilon[F_1 g_1 + \frac{1}{2}\int h^*.\,G_1 g_1\,.\,h\,dt + \int h^* G_o s_o dw]$$
$$A_2 = \varepsilon^2[F_1 g_2 + F_2 g_1^2 + \frac{1}{2}\int h^*(G_1 g_2 + G_2 g_1^2)h\,dt + \int h^*(G_o\,.\,s_1 g_1 + G_1 g_1\,.\,s_o)dw]$$
$$A_3 = O_3 + \varepsilon \int O_2 dw$$

où $O_3 = \tilde{O}(\|Z\|^3 + \varepsilon^3\|R_3\| + \varepsilon^3\|g_1\|\,\|R_2\| + \varepsilon^2\|Z\|\,\|R_2\|)$

$O_2 = \tilde{O}(\|Z\|^2 + \varepsilon^2\|R_2\|)$.

Revenons au cas général (21) et remplaçons Z par le développement stochastique (20) avec $j = N+2$. Comme A_3 est la somme des termes de degré ≥ 3, on obtient

$$(23)\quad A_3 = \sum_{3\leq n\leq N+2} \varepsilon^n \pi_n + A_{N+3}$$

$$A_{N+3} = \varepsilon^{N+3}\hat{\pi}_{N+3} + \tilde{O}(\|Z\|^{N+3}) + \varepsilon\int \tilde{O}(\|Z\|^{N+2})dw$$

$$\pi_n = p_n(g_1 \ldots g_n) + \int q_n(t,g_1(t)\ldots g_n(t))dw_t$$

$$\hat{\pi}_{N+3} = \hat{p}_{N+2}(g_1\ldots g_{N+2},\varepsilon,R_{N+3}) + \int \hat{q}_{N+3}(t,g_1(t)\ldots g_{N+2}(t),\varepsilon,R_{N+3}(t))dw_t$$

où $p_n : \mathscr{C}^n \to \mathbb{R}$, $\hat{p}_{N+3} : \mathscr{C}^{N+2} \times \mathbb{R}^+ \times \mathscr{C} \to \mathbb{R}$ sont des polynômes au sens défini plus haut, tandis que $q_n(t,.) : (\mathbb{R}^m)^n \to \mathbb{R}$, $\hat{q}_{N+3}(t,.) : (\mathbb{R}^m)^{N+2} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ sont pour chaque t des polynômes usuels à coefficients continus en t.

Comparons A_1, A_2 avec λ', λ''. Posons pour $i+j \geq 1$

$$B_{ij}(t) = \frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j}B}{\partial\varepsilon^i\partial z^j}(t,0,0) = \frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j}b}{\partial\varepsilon^i\partial y^j}(0,f_t) .$$

Pour $\phi \in \mathscr{C}$ notons $B_{ij}\phi^j$ la <u>fonction</u> $t \to B_{ij}(t)[\phi(t),\ldots,\phi(t)]$. Notons $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}'$ les sous-espaces de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$ formés des fonctions ϕ telles que $\phi' \in L_2[01]$. On munit $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}'$ de la norme $(\int |\phi'|^2 dt)^{1/2}$ et on considère $\mathscr{C}'$ comme l'espace tangent en f à $\mathscr{C}'$. La restriction de λ à $\mathscr{C}'$ est clairement de classe C^{N+3} au point f ; en particulier, pour $\phi \in \mathscr{C}'$ on

$$(24)\qquad \lambda'(f)\phi = \frac{1}{2}\int h^*.\,G_1\phi\,.\,h\,dt + \int h^*.\,G_o\,.\,[d\phi - B_{01}\phi\,dt]$$

$$\frac{1}{2}\lambda''(f)\phi^2 = \frac{1}{2}\int h^*.\,G_2\phi^2\,.\,h\,dt + \int h^*.\,G_1\phi\,.\,(d\phi - B_{01}\phi\,dt)$$

$$- \int h^*.\,G_o\,.\,B_{02}\phi^2\,.\,dt + \frac{1}{2}\int (\phi' - B_{01}\phi)^*.\,G_o\,.\,(\phi' - B_{01}\phi)dt$$

Si X est une semi-martingale continue sur [01], dont la partie à variation bornée est un élément aléatoire de $\mathscr{C}'$, nous <u>définissons</u> des variables aléatoires numériques par

(25) $$\lambda_1 X = \frac{1}{2} \int h^* . G_1 X . h \, dt + \int h^* G_o . [dX - B_{01} X \, dt]$$

$$\tilde{\lambda}_2 X^2 = \frac{1}{2} \int h^* . G_2 X^2 . h \, dt + \int h^* . G_1 X . [dX - B_{01} X \, dt] - \int h^* G_o . B_{02} X^2 . dt .$$

En particulier, si $X \equiv \phi \in \mathscr{C}'$, on a

(26) $$\lambda_1 \phi = \lambda'(f)\phi$$

$$\tilde{\lambda}_2 \phi^2 = \frac{1}{2} \lambda''(f)\phi^2 - \frac{1}{2} \int (\phi' - B_{01}\phi)^* G_o (\phi' - B_{01}\phi) dt .$$

Dans le cas précis de z^ε donné par (16), le système stochastique 2.1 (4) fournit en particulier

(27) $$dg_1 = s_o dw + (B_{01} g_1 + B_{10}) dt$$

$$dg_2 = s_1 g_1 . dw + [B_{01} g_2 + B_{20} + B_{11} g_1 + B_{02} g_1^2] dt$$

Par conséquent, on a

(28) $$\lambda_1 g_1 = \frac{1}{2} \int h^* . G_1 g_1 . h \, dt + \int h^* G_o s_o dw + \int h^* G_o B_{10} dt$$

$$\lambda_1 g_2 = \frac{1}{2} \int h^* . G_1 g_2 . h \, dt + \int h^* G_o . s_1 g_1 . dw + \int h^* G_o . (B_{20} + B_{11} g_1 + B_{02} g_1^2) dt$$

$$\tilde{\lambda}_2 g_1^2 = \frac{1}{2} \int h^* . G_2 g_1^2 . h \, dt + \int h^* . G_1 g_1 . s_o dw + \int h^* . G_1 g_1 . B_{10} dt - \int h^* G_o . B_{02} g_1^2 . dt .$$

Définissons <u>deux constantes</u> u_1, u_2, et <u>une forme linéaire bornée fixe</u> L sur $\mathscr{C}$ par

(29) $$u_1 = \int h^* G_o B_{10} dt \quad ; \quad u_2 = \int h^* G_o B_{20} dt$$

$$L\phi = \int h^* . (G_o . B_{11}\phi + G_1 \phi . B_{10}) dt \qquad \text{où } \phi \text{ décrit } \mathscr{C}$$

Par simple combinaison linéaire, les relations (28) (27) (22) entraînent

(30) $$A_1 = \varepsilon[-u_1 + (F_1 + \lambda_1)g_1]$$

$$A_2 = \varepsilon^2[-u_2 - Lg_1 + (F_2 + \tilde{\lambda}_2)g_1^2 + (F_1 + \lambda_1)g_2] \ .$$

Utilisons maintenant le fait que f minimise $F + \lambda$. Ceci entraîne $[F'(f) + \lambda'(f)]\phi \equiv 0$ pour $\phi \in \mathscr{C}'$. D'après la définition (25) de $\lambda_1 g_1$, la relation (26) entre λ_1 et $\lambda'(f)$, et la continuité de $F'(f)$ sur $\mathscr{C}$, on en conclut que $(F_1 + \lambda_1)X \equiv 0$ pour toute semi-martingale continue X dont la partie à variations bornée appartient p.s. à $\mathscr{C}'$. En particulier $(F_1 + \lambda_1)g_1 = (F_1 + \lambda_1)g_2 = 0$, et on a par (30) (22), sur l'ensemble $(Z \in V)$,

$$\frac{1}{\varepsilon^2}[F(f+Z) + I(\varepsilon,Z)] = \frac{u_o}{\varepsilon^2} - \frac{u_1}{\varepsilon} - u_2 - Lg_1 + (F_2 + \tilde{\lambda}_2)g_1^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}A_3$$

d'où

(31) $$J_{\varepsilon,V} = \exp\left(-\frac{u_o}{\varepsilon^2} + \frac{u_1}{\varepsilon} + u_2\right) E\{1_{[z^\varepsilon \in V]} \exp[Lg_1 - (F_2 + \tilde{\lambda}_2)g_1^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}A_3]\}.$$

Nous avons besoin d'étudier l'existence des moments de $\exp(Lg_1 - (F_2 + \tilde{\lambda}_2)g_1^2)$ et d'une borne uniforme pour ceux de $\exp(-\frac{1}{\varepsilon^2}A_3)$.

7.8.- <u>ESTIMATION DE MOMENTS</u> : Rappelons que ρ est le rayon de la boule V de centre 0 dans $\mathscr{C}$. D'après 4.3 et 4.4, il existe $C > 0$ tel que pour $r \geq \frac{C}{\rho}$, $\varepsilon \leq 1$ on ait en notant $z^\varepsilon = z^\varepsilon_{01}$

(32) $$P(\|g_1\| \geq r) + P(1_{[z^\varepsilon \in V]}\|R_1\| \geq r) \leq \exp\left(-\frac{r^2}{C}\right)$$

$$P(1_{[z^\varepsilon \in V]}\|R_2\| \geq r) \leq \exp\left(-\frac{r}{C}\right) \quad ; \quad P(1_{[z^\varepsilon \in V]}\|\varepsilon R_2\| \geq r) \leq \exp\left(-\frac{r^2}{C\rho^2}\right)$$

$$P(1_{[z^\varepsilon \in V]}\|R_3\| \geq r) \leq \exp\left(-\frac{r^{2/3}}{C}\right) \quad ; \quad P(1_{[z^\varepsilon \in V]}\|\varepsilon R_3\| \geq r) \leq \exp\left(-\frac{r}{C\rho}\right) .$$

En particulier, pour toute forme linéaire continue L sur $\mathscr{C}$, tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

(33) $$E(e^{\alpha L g_1}) \text{ fini.}$$

Les expressions de O_2, O_3 données en (22) entraînent, puisque $Z = z^\varepsilon = \varepsilon R_1$, l'existence d'une constante c telle que pour $z^\varepsilon \in V$, $\varepsilon \leq \rho \leq 1$, on ait

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\,|O_3| = \tilde{O}(\,\|Z\|\ \|R_1\|^2 + \varepsilon\,\|R_3\| + \varepsilon\,\|g_1\|\ \|R_2\| + \|Z\|\ \|R_2\|\,)$$

$$\leq c(\rho\,\|R_1\|^2 + \|\varepsilon R_3\| + \|g_1\|\ \|\varepsilon R_2\| + \rho\|R_2\|\,)$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\|O_2\| = \tilde{O}(\,\|Z\|\ \|R_1\| + \varepsilon\ \|R_2\|\,) \leq c(\rho\,\|R_1\| + \|\ \varepsilon R_2\|\,) \ .$$

De (32) et 4.5 (6) on en déduit l'existence de $c_1 > 0$ tel que pour $r \geq \frac{c_1}{\rho}$, $\varepsilon \leq \rho \leq 1$, on ait

$$P(\frac{1}{\varepsilon^2}\,|O_3| \geq r\ ;\ z^\varepsilon \in V) \leq \exp(-\frac{r}{c_1\rho})$$

$$P(\frac{1}{\varepsilon}\|O_2\| \geq r\ ;\ z^\varepsilon \in V) \leq \exp(-\frac{r^2}{c_1\rho^2})$$

d'où, puisque $A_3 = O_3 + \varepsilon\int O_2 dw$, et grâce à 4.5 (7), l'existence de $c_2 > 0$ tel que pour $r \geq \frac{c_2}{\rho}$, $\varepsilon \leq \rho \leq 1$, on ait

$$P(\frac{1}{\varepsilon^2}\,|A_3| \geq r\ ;\ z^\varepsilon \in V) \leq \exp(-\frac{r}{c_2\rho}) \ .$$

Donc pour tout $\alpha > 0$ donné, il existe $\rho(\alpha) > 0$ tel que $\varepsilon \leq \rho \leq \rho(\alpha)$ entraîne

$$(34)\qquad E[1_{[z^\varepsilon \in V]}\exp[(1+\alpha)\,\frac{|A_3|}{\varepsilon^2}\,]] \leq c_3 < \infty$$

où le nombre c_3 est déterminé par ρ et α seulement.

On a de même pour $z^\varepsilon \in V$, $\varepsilon \leq 1$,

$$\frac{1}{\varepsilon^3}\,|O_3| \leq c_4(\,\|R_1\|^3 + \|R_3\| + \|g_1\|\ \|R_2\| + \|R_1\|\ \|R_2\|\,)$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\|O_2\| \leq c_4(\,\|R_1\|^2 + \|R_2\|\,)$$

d'où par les même arguments 4.5 (6), 4.5 (7) et (32), l'existence de $c_5 > 0$ tel que $r \geq c_5, \varepsilon \leq 1$ implique

$$(35)\qquad P[\frac{1}{\varepsilon^3}\,|A_3| \geq r\ ;\ z^\varepsilon \in V] \leq \exp(-\frac{r^{2/3}}{c_5}) \ .$$

Reste à étudier les moments de $\exp(-(F_2 + \tilde{\lambda}_2)g_1^2)$. Ceci est plus délicat car bien que $|(F_2 + \tilde{\lambda}_2)g_1^2|$ soit d'après (32), à queue en $\exp(-c_6 r)$, la constante c_6

peut effectivement être plus petite que 1, de sorte qu'on peut fort bien avoir $E[\exp|(F_2 + \tilde{\lambda}_2)g_1^2|] = +\infty$.

Définissons un produit scalaire q sur $\mathscr{C}'$ par

$$q(\gamma,\eta) = \frac{1}{2}\int (\gamma' - B_{01}\gamma)^* G_o(\eta' - B_{01}\eta)dt, \qquad \text{où } \gamma,\eta \in \mathscr{C}' .$$

Il existe clairement $c_7 > 0$ tel que

$$(36) \qquad \frac{1}{c_7}\int |g'|^2 dt \leq q(g,g) \leq c_7 \int |g'|^2 dt$$

et $(\mathscr{C}',q)$ est un espace de Hilbert.

Soit $R = \inf \{\frac{(F_2 + \tilde{\lambda}_2)g^2}{q(g,g)} \mid g \in \mathscr{C}',\ 0 < q(g,g) \leq 1\}$. Il existe alors des $g_n \in \mathscr{C}'$ tels que $q(g_n,g_n) = 1$ et $R = \lim_{n\to\infty} (F_2 + \tilde{\lambda}_2)g_n^2$. Par passage à une sous-suite on peut supposer que $g_n \to g \in \mathscr{C}'$ pour la convergence faible du Hilbert $(\mathscr{C}',q)$, et donc que $q(g,g) \leq \underline{\lim}_n\ q(g_n,g_n) = 1$. D'après (36), après nouveau passage éventuel à une sous-suite, on peut supposer que $g'_n \to g'$ faiblement dans $L_2[0\ 1]$, ce qui entraîne $g_n \to g$ dans $\mathscr{C}$. La formule (26) montre alors que $\tilde{\lambda}_2 g_n^2 \to \tilde{\lambda}_2 g^2$, tandis que clairement $F_2 g_n^2 \to F_2 g^2$. Finalement on voit que $R = (F_2 + \tilde{\lambda}_2)g^2$.

Supposons $R < 0$; alors nécessairement $g \neq 0$, $0 < q(g,g) \leq 1$ et $(F_2 + \tilde{\lambda}_2)g^2 < 0$, d'où

$$\frac{(F_2 + \tilde{\lambda}_2)g^2}{q(g,g)} \leq (F_2 + \tilde{\lambda}_2)g^2 = R$$

ce qui par définition de R force $q(g,g) = 1$. En tenant compte de (26), on peut donc écrire

$$1 + R = q(g,g) + (F_2 + \tilde{\lambda}_2)g^2 = \frac{1}{2}[F''(f) + \lambda''(f)]g^2 > 0$$

car $g \neq 0$ et $F + \lambda$ a un minimum isolé en f.

Ainsi $R < 0$ implique $1 + R > 0$, tandis que trivialement $R \geq 0$ entraîne $1 + R \geq 1$. Il existe donc un nombre u tel que $0 < u < 1$, $u \leq 1 + R$, et par définition de R ceci garantit

$$(37) \qquad -(F_2 + \tilde{\lambda}_2)\phi^2 \leq (1-u)q(\phi,\phi) \qquad \text{pour tout } \phi \in \mathscr{C}'.$$

Considérons le processus k_2 à valeurs dans $\mathbb{R}$ défini par $dk_2 = h^* . G_1 g_1 . (dg_1 - B_{01} g_1 dt)$. Alors $k = (g_1, k_2)$ est une diffusion dans $\mathbb{R}^{m+1}$ et on peut écrire

(38) $$- (F_2 + \tilde{\lambda}_2) g_1^2 = S(k)$$

où $S : C([01], \mathbb{R}^{m+1}) \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle continue donnée par la formule suivante, où on pose $\Phi_t = (\phi_t, \psi_t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$

(39) $$- S(\Phi) = F_2 \phi^2 + \frac{1}{2} \int h^* . G_2 \phi^2 . h \, dt - \int h^* G_o . B_{02} \phi^2 dt + \psi(1) .$$

Pour $\tau > 0$ posons $k^\tau = (\tau g_1, \tau^2 k_2)$ de sorte que

$$dk_t^\tau = \tau \sigma(t, k_t^\tau) dw_t + \beta(t, \tau, k_t^\tau) dt$$

avec, pour $t \geq 0$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, les définitions

$$\sigma(t,y) = \begin{bmatrix} s_o(t) \\ \\ h_t^* . G_1(t) y_1 . s_o(t) \end{bmatrix} \quad \text{et } \beta(t,\tau,y) = \begin{bmatrix} B_{01}(t) y_1 + \tau B_{10}(t) \\ \\ \tau \, h_t^* . G_1(t) y_1 . B_{10}(t) \end{bmatrix}$$

Ainsi la diffusion k^τ est pour $\tau \to 0$ une petite perturbation du système dynamique $y_t' = \beta(t, 0, y_t)$ qui est d'ailleurs trivial dans sa dernière coordonnée.

La fonctionnelle de Cramer $\tilde{\lambda} : C([01], \mathbb{R}^{m+1}) \to [0, +\infty]$ associée à ce système perturbé est définie (cf. [Az 1]) par $\tilde{\lambda}(\Phi) = +\infty$ si $|\Phi'|$ n'est pas de carré intégrable, et ailleurs par

$$\tilde{\lambda}(\Phi) = \frac{1}{2} \int_o^1 Q_{t,\Phi_t}^* [\Phi_t' - \beta(t, 0, \Phi_t)] dt$$

avec $Q_{t,y}^* : \mathbb{R}^{m+1} \to [0, +\infty]$ donnée par

$$Q_{t,y}^*(v) = \inf\{|w|^2 \text{ , pour } w \in \mathbb{R}^k \text{ et } \sigma(t,y) w = v\}$$

où y et $v \in \mathbb{R}^{m+1}$. Les définitions ci-dessus, et le fait que $s_o s_o^*$ ait un inverse G_o entraînent facilement (utiliser [Az 1] ch. III) la propriété suivante

- pour tout $v = (v_1,v_2)$ et $y = (y_1,y_2)$ dans $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, $Q^*_{t,y}(v)$ est fini si et seulement si $v_2 = h^*_t . G_1(t)y_1 . v_1$; de plus on a alors $Q^*_{t,y}(v) = v_1^* G_o(t)v_1$. De la définition de $\tilde{\lambda}$ on conclut alors que pour $\Phi_t = (\phi_t,\psi_t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ élément de $C([01], \mathbb{R}^{m+1})$, $\tilde{\lambda}(\Phi)$ est fini si et seulement si $\phi' \in L_2[01]$ et

$$\psi'_t = h^*_t . G_1(t)\phi_t . [\phi'_t - B_{01}(t)\phi_t]$$

de plus on a alors, d'après la définition de q ci-dessus, $\tilde{\lambda}(\Phi) = q(\phi,\phi)$. En particulier $\tilde{\lambda}(\Phi)$ fini implique

$$(40) \qquad \psi(1) = \int h^*. G_1\phi . [\phi' - B_{01}\phi]dt$$

$$\tilde{\lambda}(\Phi) = q(\phi,\phi) \ .$$

D'après (40) (39) (26), $\tilde{\lambda}(\Phi)$ fini implique donc aussi

$$(41) \qquad S(\Phi) = -(F_2 + \tilde{\lambda}_2)\phi^2 \qquad \text{pour} \quad \Phi = (\phi,\psi) \quad \text{comme plus haut.}$$

Considérons le fermé $A = \{\Phi \in C([01], \mathbb{R}^{m+1}) \mid S(\Phi) \geq 1\}$. Le nombre $\tilde{\Lambda}(A) = \inf\limits_{\Phi\in A} \tilde{\lambda}(\Phi)$ s'écrit, grâce à (40) (41)

$$\tilde{\Lambda}(A) = \inf \{q(\phi,\phi) \mid \Phi = (\phi,\psi) \ ; \ \phi \in \mathcal{C}' \ ; \ -(F_2 + \tilde{\lambda}_2)\phi^2 \geq 1\} \ .$$

D'après l'inégalité (37) ceci force $\Lambda(\tilde{A}) \geq \frac{1}{1-u} = 1 + \frac{u}{1-u}$.

Mais un résultat général (cf. [Az 1]) donne puisque A est fermé,

$$\overline{\lim_{\tau\to 0}} \ \tau^2 \log P(k^\tau \in A) \leq - \tilde{\Lambda}(A) \ .$$

Par suite il existe $\varepsilon_o > 0$ tel que $\tau \leq \varepsilon_o$ entraîne

$$P(k^\tau \in A) \leq \exp [-\frac{1}{\tau^2} (1 + \frac{u}{2(1-u)})] \ .$$

Mais la relation $(k^\tau \in A)$ équivaut par définition à $\{S(\tau g_1,\tau^2 k_2) \geq 1\}$, ou encore d'après (38) à $\{-(F_2 + \tilde{\lambda}_2)g_1^2 \geq \frac{1}{\tau^2}\}$. Posant $\tau = \frac{1}{\sqrt{r}}$ nous obtenons pour $r \geq \frac{1}{\varepsilon_o^2}$

$$(42) \qquad P\,[-(F_2 + \tilde{\lambda}_2)g_1^2 \geq r] \leq \exp[-\, r(1 + \frac{u}{2(1-u)})]\ .$$

Puisque $0 < u < 1$ on voit qu'il existe $\beta > 0$ tel que $\exp\,[-(F_2 + \tilde{\lambda}_2)g_1^2]$ appartienne à $L_{1+\beta}(\Omega,P)$.

7.9.- <u>FIN DE LA PREUVE DU THEOREME 7.4</u> : D'après (42) (33) la v.a. $Y = \exp[Lg_1 - (F_2 + \tilde{\lambda}_2)g_1^2]$ est dans $L_p(\Omega,P)$ pour $1 \leq p < 1+\beta$. Posons $X_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon^2} A_3$. Au vu de (31), il s'agit d'étudier $E(Y\, 1_{[z^\varepsilon \in V]}\, e^{X_\varepsilon})$. La formule de Taylor usuelle donne pour un $\theta \in [01]$,

$$e^{X_\varepsilon} = \sum_{n\leq N} \frac{1}{n!} X_\varepsilon^n + \frac{1}{(N+1)!} X_\varepsilon^{N+1}\, e^{\theta X_\varepsilon}\ .$$

D'après (34) (35), $1_{[z^\varepsilon \in V]}\, e^{|X_\varepsilon|}$ et $\frac{1}{\varepsilon}\, |X_\varepsilon|\, 1_{[z^\varepsilon \in V]}$ sont uniformément bornées en norme dans $L_{1+\alpha}(\Omega,P)$ pour $\varepsilon \leq \rho \leq \rho(\alpha)$ et ρ fixé. Les v.a. $1_{[z^\varepsilon \in V]}\, Y(\frac{1}{\varepsilon} X_\varepsilon)^{N+1}\, e^{\theta X_\varepsilon}$ seront donc uniformément bornées en norme dans $L_\gamma(\Omega,P)$, pour ρ fixé et $\varepsilon \leq \rho \leq \rho(\alpha)$ avec γ donné par $\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}\beta} + \frac{N+1}{1+\alpha} + \frac{1}{1+\alpha}$.

Puisque N,β sont imposés par les données du problème, garantissons $\gamma = 1 + \frac{1}{4}\beta$ par un choix (définitif) de α suffisamment grand. Alors pour ρ fixé tel que $\rho \leq \rho(\alpha)$ et $\varepsilon \leq \rho$, on a $E[1_{[z^\varepsilon \in V]}\, |Y(\frac{1}{\varepsilon} X_\varepsilon)^{N+1}\, e^{\theta X_\varepsilon}|] = O(1)$ et donc

$$(43) \qquad E[1_{[z^\varepsilon \in V]}\; Y\, e^{X_\varepsilon}] = E[(\sum_{n\leq N} \frac{1}{n!}\, Y X^n)\, 1_{[z^\varepsilon \in V]}] + O(\varepsilon^{N+1})\ .$$

La relation (23) entraîne, puisque $Z = \varepsilon R_1$

$$(44) \qquad X_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon^2} A_3 = -\sum_{1\leq n\leq N} \varepsilon^n \pi_{n+2} + \varepsilon^{N+1} \hat{X}_{N+1}$$

avec $\hat{X}_{N+1} = -\hat{\pi}_{N+3} + \tilde{o}(\|R_1\|^{N+3}) + \int \tilde{o}(\|R_1\|^{N+2})dw$.

Pour $\varepsilon \leq 1$, la v.a. $1_{[z^\varepsilon \in V]}\, |\hat{X}_{N+1}|$ est bornée par la somme de deux termes ; l'un est la valeur absolue d'un polynôme en $\|g_1\| \dots \|g_{N+2}\|, \varepsilon, \|R_{N+3}\|, \|R_1\|$, l'autre est l'intégrale stochastique d'un terme du même type, par rapport au brownien w. Avec les notations 4.5 (4), les $\|g_j\|$, $j \leq N+2$, ainsi que $1_{[z^\varepsilon \in V]}(\|R_{N+3}\| + \|R_1\|)$ sont tous dans un même $\mathcal{W}(a,c,1)$ d'après la prop. 4.3.

La stabilité des familles $\mathcal{W}(.,.,1)$ par applications polynômiales et intégrales stochastiques indiquée en 4.5 (6) et 4.5(7) entraîne donc que $1_{[z^\varepsilon \in V]} \hat{X}_{N+1}$ dans un $\mathcal{W}(a_1,c_1,1)$. De (44) on déduit $\sum_{0\le n\le N} \frac{1}{n!} X_\varepsilon^n = 1 + \sum_{1\le n\le N} \varepsilon^n \Gamma_n + \varepsilon^{N+1} W_{N+1}$ où chaque Γ_n est un polynôme usuel en $\pi_3 \dots \pi_{n+2}$, et où W_{N+1} est un polynôme en $(\pi_3 \dots \pi_{N+2}, \hat{X}_{N+1}, \varepsilon)$. Les arguments 4.5 (6), 4.5 (7) montrent comme ci-dessus que $\pi_3 \dots \pi_{N+2}$ sont dans un $\mathcal{W}(a_2,c_2,1)$, puisque pour $\varepsilon \le 1$, $1_{[z^\varepsilon \in V]} W_{N+1}$ est dans $\mathcal{W}(a_3,c_3,1)$. A fortiori, pour $\varepsilon \le 1$, les v.a. $1_{[z^\varepsilon \in V]} |W_{N+1}|$ restent bornées dans $L_r(\Omega,P)$ pour chaque $r \ge 1$. Par l'inégalité de Hölder, on en déduit que pour ρ fixé avec $\rho \le \rho(\alpha)$ et $\varepsilon \le \rho$, on a $E[1_{[z^\varepsilon \in V]} |Y W_{N+1}|] = O(1)$ d'où finalement, en posant $\Gamma_o \equiv 1$

$$E\,[1_{[z^\varepsilon \in V]} Y e^{X_\varepsilon}] = \sum_{0\le n\le N} \varepsilon^n E(1_{[z^\varepsilon \in V]} Y \Gamma_n) + O(\varepsilon^{N+1}).$$

Comme Γ_n est polynômial en $\pi_3 \dots \pi_{n+2}$, on a

$$\Gamma_n \in \mathcal{W}(a_4,c_4,1) \quad \text{pour } n \le N, \quad \text{et donc } Y\Gamma_n \in L_r(\Omega,P)$$

pour un certain $r > 1$, ceci pour tout $n \le N$. Si $\frac{1}{r'} + \frac{1}{r} = 1$, l'inégalité de Hölder assure

$$|E(Y\Gamma_n 1_{[z^\varepsilon \notin V]})| \le c_5\, P(z^\varepsilon \notin V)^{1/r'} .$$

Mais $P(z^\varepsilon \notin V) \le P(\exists\, t \in [01]$ tel que $|R_1(t)| > \frac{\rho}{\varepsilon})$ est majoré par $\exp(-\frac{c_6}{\varepsilon^2})$ pour ρ fixé, et donc a fortiori

$$\sum_{0\le n\le N} |E(Y\Gamma_n 1_{[z^\varepsilon \notin V]})| = o(\varepsilon^{N+1})$$

pour $\varepsilon \le \rho$. Finalement pour $\rho \le \rho(\alpha)$, ρ fixé, $\varepsilon \le \rho$, on obtient d'après (31)

$$J_{\varepsilon,V} = [\sum_{0\le n\le N} \alpha_n \varepsilon^n + O(\varepsilon^{N+1})] \exp(-\frac{u_o}{\varepsilon^2} + \frac{u_1}{\varepsilon} + u_2)$$

et le <u>même</u> développement est valide pour J_ε, avec un autre $O(\varepsilon^{N+1})$ bien sûr, grâce à (13). Les α_j sont donnés par

$$\alpha_j = E(Y\,\Gamma_j) = E(\Gamma_j \exp[Lg_1 - (F_2 + \tilde{\lambda}_2)g_1^2])$$

et Γ_j est obtenu à partir de $g_1 \dots g_{j+2}$ par opérations polynômiales à coefficients constants et intégration stochastique en dw. Bien entendu pour chaque j donné, on peut expliciter par un calcul formel évident l'expression de Γ_j.

APPENDICE

EQUATIONS STOCHASTIQUES LINEAIRES ET SOUS-LINAIRES

Nous rassemblons ici des propriétés qui font partie du folklore sur les équations sous-linéaires, faute de référence publiée commode.

A.1.- NOTATIONS : Si F,G sont des espaces euclidiens, on note F^* le dual de F, et L(F,G) l'espace des applications linéaires de F dans G. Les processus aléatoires considérés auront pour espaces d'états des ouverts du type précédent compactifiés par adjonction d'un point à l'infini.

Les filtrations croissantes $\mathcal{F}_t$ = {évènements antérieurs à t} sur un espace de probabilité Ω associées aux processus de Markov ci-dessous seront sous-entendues ; les processus considérés simultanément seront adaptés à une même filtration muette, ayant les régularités standard.

A.2.- PROPOSITION : Considérons des espaces euclidiens W,Z,F et un processus de Markov fort $y_t = (z_t, f_t)$ défini sur Ω, à valeurs dans Z × F, continu sur $[0,\zeta[$ où ζ est le temps de vie du processus. Supposons que P_y-p.s. on ait

$$df_t = g(t,y_t)dw_t + h(t,y_t)dt$$

où $g : \mathbb{R}^+ \times Z \times F \to L(W,F)$ et $h : \mathbb{R}^+ \times Z \times F \to F$ sont des fonctions mesurables, et $w : \Omega \to W$ est un brownien pour P_y. Pour M > 0 considérons les temps d'arrêt

$$\eta = \inf \{s \geq 0 \mid |g(s,y_s)| > M(1 + |f_s|) \quad \underline{\text{ou bien}} \quad |h(s,y_s)| > M(1 + |f_s|)\}$$

$$\chi = \inf \{s \geq 0 \mid |g(s,y_s)| > M \quad \underline{\text{ou bien}} \quad |h(s,y_s)| > M(1 + |f_s|)\}$$

Alors pour chaque $T > 0$, il existe des constantes C_T, ρ_T, $c_T > 0$ telles que pour tout $y_o = (z_o, f_o) \in Z \times F$, tout $t \leq T$, tout $r \geq \rho_T(1 + |f_o|)$, on ait

$$(1) \qquad P_{y_o}\left[\sup_{0\leq s\leq t} |f_s - f_o| \geq r \quad ; \quad t < \eta\right] \leq C_T \exp\left[-\frac{c_T}{t}\left(\mathrm{Log}\,\frac{r}{1+|f_o|}\right)^2\right]$$

$$(2) \qquad P_{y_o}\left[\sup_{0\leq s\leq t} |f_s - f_o| \geq r \quad ; \quad t < \chi\right] \leq C_T \exp\left(-c_T \frac{r^2}{t}\right)$$

A.3.- <u>REMARQUES</u> : Il existe des nombres positifs $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3\ \nu_1\ \nu_2\ \nu_3$ déterminés par M et dim F seulement, tels que

- dans (1) on puisse prendre $C_T = \mu_1(1 + T)$, $c_T = \dfrac{\mu_2}{1 + T}$, $\rho_T = e^{\mu_3(1+T)}$
- dans (2) on puisse prendre $C_T = \nu_1(1 + T)$, $c_T = e^{-\nu_2(1+T)}$, $\rho_T = T\, e^{\nu_3(1+T)}$

De plus pour t fixé des exemples simples montrent que dans le cas général, on ne peut pas améliorer le <u>type</u> de décroissance en r quand $r \to \infty$.

A.4.- <u>PREUVE DE LA PROPOSITION A.2</u> : Soit $\tau = \inf\{s \geq 0 \mid |f_s - f_o| \geq r\}$. Posons $r_o = |f_o|$. Par définition on a

$$|g| \leq M(1 + r + r_o) \text{ et } |h| \leq M(1 + r + r_o) \text{ sur } [0, \tau \wedge \eta[$$

$$|g| \leq M \text{ et } |h| \leq M(1 + r + r_o) \text{ sur } [0, \tau \wedge \chi[$$

Un argument classique (Mac Kean [Mc] Stoock Varadhan [S-V 1,2]) montre que pour tout $y_o \in Z \times F$, on a, avec $q = \dim F$,

$$(3) \qquad P_{y_o}(\tau \leq t < \eta) \leq 2q \exp - \frac{1}{2t}\left[\frac{r - qM(1+r+r_o)t}{qM(1+r+r_o)}\right]^2$$

$$(4) \qquad P_{y_o}(\tau \leq t < \chi) \leq 2q \exp - \frac{1}{2t}\left[\frac{r - qM(1+r+r_o)t}{M}\right]^2 .$$

De (3) on déduit l'existence de c, $t_o > 0$ tels que

$$(5) \qquad P_{y_o}(\tau \leq t < \eta) \leq 2q \exp\left(-\frac{c}{t}\right) \text{ pour } t \leq t_o,\ r \geq |f_o|,\ r \geq 1.$$

Pour $p > 0$, $y_o = (z_o, f_o)$ posons

$$\tau_p = \tau_{y_o,p} = \inf \{s \geq 0 |\ |f_s - f_o| \geq e^p(1 + |f_o|)\}$$

$$\gamma_p = \inf \{s \geq \tau_p |\ |f_s - f_{\tau_p}| > e^{1/20}(1 + |f_{\tau_p}|)\}$$

de sorte que pour $p \geq 1$,

$$|f_{\gamma_p} - f_o| \leq (1 + |f_o|)[e^p + e^{1/20}(1 + e^p)] \leq e^{p+1}(1 + |f_o|)$$

ce qui entraîne $\gamma_p \leq \tau_{p+1}$.

La mesure aléatoire θ définie par

$$\theta[0,u] = 1_{[\tau_p < \eta]} P(\tau_{p+1} - \tau_p < u \ ;\ \tau_p + u < \eta \,|\, \mathcal{F}_{\tau_p})$$

vérifie d'après (5) et la propriété de Markov forte, pour $p \geq 1$, $u \leq t_o$

(6) $$\theta[0\,u] \leq 1_{[\tau_p < \eta]} P(\gamma_p - \tau_p < u \ ;\ \tau_p + u < \eta \ |\mathcal{F}_{\tau_p}) \leq 2\,q \exp(-\frac{c}{u}) \ .$$

Considérons les mesures π_p données par

$$\pi_p[0t] = P_{y_o}(\tau_p \leq t < \eta) \ .$$

D'après (6) et l'égalité $\tau_{p+1} = \tau_p + \tau_{p+1} - \tau_p$, on a pour $t \leq t_o$, $p \geq 1$,

$$\begin{aligned}\pi_{p+1}[0t] &= E_{y_o}[1_{[\tau_p \leq t < \eta]} \theta(0, t - \tau_p)] \leq E_{y_o}[1_{[\tau_p \leq t < \eta]} \times 2\,q \exp - \frac{c}{t - \tau_p}] \\ &\leq 2\,q \int_o^t \exp(-\frac{c}{t-v})\, d\pi_p(v) = 2\,q \int_o^t \frac{c}{(t-v)^2} \exp(-\frac{c}{t-v})\, \pi_p[0,v]dv \\ &\leq \frac{4\,q}{c} \int_o^t \exp[-\frac{c}{2(t-v)}]\pi_p[0,v]dv \ .\end{aligned}$$

Par une récurrence immédiate sur j, on en conclut que pour tout entier $j \geq 1$ on a pour $p \leq j$, $v \leq t_1 \leq t_o$

(7) $$\pi_p[0,v] \leq 2\,q \exp(-\frac{c}{2\,v}\,p^2)$$

avec $t_1 = t_o \times \frac{c}{4\,q}$. La définition de π_p traduit (7) par

(8) $$P_{y_o}\{\sup_{0\le s\le t}|f_s - f_o| \ge r(1+|f_o|)\ ;\ t<\eta\} \le 2q\exp[-\frac{c}{2t}(\mathrm{Log}\ r)^2]$$

pour $r \ge 1$, $t \le t_1$, $y_o = (z_o, f_o) \in Z \times F$.

Soient maintenant $t > t_1$ et $j = 1 + [\frac{t}{t_1}]$. L'évènement $\{\sup_{0\le s\le t}|f_s - f_o| > [1+(r+1)^j](1+|f_o|)\}$ est inclus dans

$$\bigcup_{0\le i\le j-1}\{\sup_{it/j\le s\le(i+1)t/j}|f_s - f_{it/j}| > r(1+|f_{it/j}|)\}\ .$$

Appliquant (8) à chaque terme de cette réunion, on obtient facilement, en définissant r par $\frac{\mathrm{Log}\ \rho}{j} = \frac{1}{2}\mathrm{Log}(r+1)$

$$P_{y_o}[\sup_{0\le s\le t}|f_s - f_o| > \rho(1+|f_o|)\ ;\ t<\eta] \le 2jq\exp[-\frac{c}{jt}(\mathrm{Log}\ \rho)^2]$$

pour tout $t \ge 0$, $\frac{1}{j}\mathrm{Log}\ \rho \ge \mathrm{Log}\ 4$, $j = 1 + [\frac{t}{t_1}]$, ce qui prouve le résultat annoncé (1).

Passons à l'étude de $[\tau \le t < \chi]$. De (4) on tire l'existence de A,a,b,c > 0 tels que

(9) $$P_{y_o}(\tau \le t < \chi) \le A\exp(-a\frac{r^2}{t})$$

pour $t \le b$, $\frac{r}{t} \ge c\ |f_o|$, $\frac{r}{t} \ge c$.

Soit $u = \frac{1}{2+2bc}$. L'évènement $(\tau \le t < \chi)$ est inclus dans l'union de $\{\sup_{0\le s\le t/2}|f_s - f_o| > ru\ ;\ \frac{t}{2} < \chi\}$ et de

$$\{\sup_{\frac{t}{2}\le s\le t}|f_s - f_{t/2}| > r(1-u)\ ;\ |f_{t/2}| \le ru + |f_o|\ ;\ t<\chi\}\ .$$

Alors si $t \le 2b$ et $\frac{r}{t} \ge 4c(1+bc)(1 \vee |f_o|)$, on peut appliquer (9) aux deux évènements précédents, (après conditionnement par $\mathcal{F}_{t/2}$ pour le second) et écrire

(10) $$P_{y_o}(\tau \le t < \chi) \le A\exp(-2au^2\frac{r^2}{t}) + A\exp[-2a(1-u)^2\frac{r^2}{t}]$$

Finalement si on pose $\tilde{b} = 2b$, $\tilde{c} = 4c(1+bc)$, on voit que les conditions $t \le \tilde{b}$, $\frac{r}{t} \ge \tilde{c}|f_o|$, $\frac{r}{t} \ge \tilde{c}$ impliquent

$$P_{y_o}(\tau \le t < \chi) \le \tilde{A}\exp(-\tilde{a}\frac{r^2}{t})$$

avec $\tilde{A} = 2A$, $\tilde{a} = \dfrac{a}{2(1+bc)^2}$. En itérant cet argument on voit que pour tout $T > 0$, on peut trouver A_T, a_T, c_T tels que

$$P_{y_o}\,[\sup_{0\le s\le t} |f_s - f_o| > r \; ; \; t < \chi] \le A_T \exp(- a_T \frac{r^2}{t})$$

pour tout $y_o = (z_o, f_o) \in Z \times F$, $t \le T$, $\frac{r}{t} \ge c_T(1 + |f_o|)$ ce qui prouve la formule (2) annoncée.

La remarque 1.3 se déduit d'un examen (facile) plus détaillé de la valeur de $\tilde{A},\tilde{a},\tilde{c}$ après n itérations avec $n \sim \operatorname{Log} T$.

A.5.- COROLLAIRE : Soient W,F,Z des espaces euclidiens, U un ouvert de Z. Soit $z_t : \Omega \to U$ une diffusion de temps de vie ζ et $w_t : \Omega \to W$ un brownien. Soient $g(t,z,f)$ et $h(t,z,f)$ des applications de $\mathbb{R}^+ \times U \times F$ dans $L(W,F)$ et F resp. ; supposons-les continues en t, localement Hölderiennes en (z,f) uniformément pour t borné. Supposons que pour tout $T > 0$, K compact de U, il existe $M > 0$ tel que

$$|g(t,z,f)| + |h(t,z,f)| \le M(1 + |f|) \text{ sur } t \le T,\ z \in K,\ f \in F .$$

Alors si $y_t = (z_t, f_t)$ est l'unique diffusion minimale définie par $df_t = g(t,z_t,f_t)dw_t + h(t,z_t,f_t)dt$, les temps de vie de f_t, y_t, z_t sont p.s. identiques.

En particulier pour une équation stochastique autonome en f_t, du type

$$df_t = G(t,f_t)dw_t + H(t,f_t)dt$$

la sous-linéarité de G,H en $f \in F$ force la diffusion (f_t) à être de temps de vie infini.

PREUVE : Soit K un compact de U, η_K le temps de la première sortie hors de K pour (z_t), τ_r le temps de la première sortie de la boule de centre f_o et rayon r pour (f_t). D'après 1.2, $\lim_{r\to+\infty} P_{y_o}(\tau_r \le t < \eta_K) = 0$ pour chaque $t \ge 0$. Le temps de vie θ de la diffusion (z_t, f_t) vérifie $\theta = \lim_{r\to+\infty} \tau_r$ quand $\theta \le t < \eta_K$, et donc $(\theta \le t < \eta_K)$ est P_{y_o} négligeable pour chaque t rationnel, d'où $P_{y_o}(\theta < \eta_K) = 0$. Il suffit de faire croître K vers U pour achever la preuve.

A.6.- FORMULE D'ITO ET APPLICATIONS BILINEAIRES : Soient W,F,G,H des espaces euclidiens. Si $B : F \times F \to H$ est bilinéaire, la trace de B est le vecteur de H donné par $\mathrm{Tr}\, B = \sum_j B(e_j,e_j)$ où (e_j) est une base orthonormée arbitraire de F.

Soient $w_t : \Omega \to W$, $f_t : \Omega \to F$, $g_t : \Omega \to G$ un brownien et deux semi-martingales locales, vérifiant

$$df = p\, dw + r\, dt \qquad dg = q\, dw + s\, dt$$

où p,q,r,s sont des processus progressivement mesurables à valeurs resp. dans L(W,F), L(W,G), F, G. Soit $B : F \times G \to H$ une application bilinéaire. Alors $h_t = B(f_t,g_t)$ est une semi-martingale locale et la formule d'Ito montre que (notations évidentes)

$$dh_t = B(f_t,dg_t) + B(df_t,g_t) + \mathrm{Tr}\,[B \circ (p_t \times q_t)]dt$$

où $p_t \times q_t$ est l'application bilinéaire de $W \times W$ dans $F \times F$ définie par $[p_t \times q_t](y,z) = (p_t y, q_t z)$.

A.7.- CHANGEMENT DE VARIABLE LINEAIRE : Considérons l'équation stochastique

(11) $$df_t = (\pi_t f_t + p_t)dw_t + (\rho_t f_t + r_t)dt$$

avec w,p,r comme en A.6 et $f : \Omega \to F$. On suppose que π et ρ sont des processus progressivement mesurables à valeurs dans L [F,L(W,F)] et L(F,F) resp.

Pour $A \in L\,[F,L(W,F)]$ on définit $A^* \in L\,[W,L(F,F)]$ par

(12) $$(A f) \cdot w = (A^* w) \cdot f \qquad \text{pour tout } f \in F,\ w \in W.$$

Définissons une application bilinéaire $B_t : W \times W \to L(F,F)$ et sa trace $C_t \in L(F,F)$ par

(13) $$B_t(v,w) = (\pi_t^* v)(\pi_t^* w) \qquad \text{pour } v,w \in W \times W$$

$$C_t = \mathrm{Tr}\, B_t$$

où $L(F,F)$ est muni de son produit naturel.

Considérons les équations stochastiques linéaires en $Q_t, R_t \in L(F,F)$

(14) $$dQ_t = -Q_t(\pi_t^* dw_t + \rho_t dt) + Q_t C_t dt \quad , \quad Q_o \equiv I$$

$$dR_t = (\pi_t^* dw_t + \rho_t dt)R_t \quad , \quad R_o \equiv I.$$

Soit ζ un temps d'arrêt tel que π, ρ, p, r soient continues sur $[0\zeta[$. D'après A.5, le temps de vie de Q_t, R_t est supérieur ou égal à ζ, et Q_t, R_t sont continues sur $[0\zeta[$. Montrons que $Z_t = R_t Q_t$ n'est autre que I.

La formule d'Ito donnée en A.6 fournit

$$dZ_t = -Z_t(\pi_t^* dw_t + \rho_t dt) + Z_t C_t dt + (\pi_t^* dw_t + \rho_t dt)Z_t + (\mathrm{Tr}\ \Gamma_t)dt$$

où $\Gamma_t : W \times W \to L(F,F)$ est défini par

$$\Gamma_t(v,w) = -(\pi_t^* v)Z_t(\pi_t^* w) \qquad \text{pour} \quad (v,w) \in W \times W .$$

Comme l'équation stochastique ci-dessus admet la solution triviale $Z_t \equiv I$, l'unicité de ses solutions sur $[0\zeta[$ montre que

(15) $$R_t \equiv Q_t^{-1} \qquad \text{pour} \quad t \in [0,\zeta[.$$

Posons pour $t \leq \zeta \wedge \eta$ où η = temps de vie de f_t,

(16) $$h_t = Q_t f_t$$

La formule d'Ito de A.6 montre que

(17) $$dh_t = Q_t p_t dw_t + Q_t(r_t - \mathrm{Tr}\ \Phi_t)dt$$

où $\Phi_t : W \times W \to F$ est définie par

(18) $$\Phi_t(v,w) = (\pi_t^* v)(p_t w) \qquad \text{pour tout} \quad (v,w) \in W \times W .$$

On voit ainsi que f_t et h_t ont même temps de vie, et ce changement de variable permet de se débarrasser des termes linéaires en f_t dans (11).

BIBLIOGRAPHIE

[Az 1] R. AZENCOTT : Grandes déviations et applications. Saint-Flour VIII 1978. Lecture Notes Math. 774, Springer Verlag 1980.

[Az 2] R. AZENCOTT : Petites perturbations aléatoires des systèmes dynamiques : développements asymptotiques (à paraître).

[C-E] M. CHALEYAT-MAUREL, L.ELIE : Diffusions gaussiennes ; in "Geodesiques et diffusions en temps petit" Astérisque, vol. 84-85 (1981).

[Do] H. DOSS : Quelques formules asymptotiques pour les perturbations de systèmes dynamiques. Ann. Inst. Henri Poincaré, Série B. Vol. 16 N° 1, p. 17-28 (1980).

[D-V] M. DONSKER - S. VARADHAN : Asymptotic evaluation of Markov process expectations for large time (III). Comm. Pure. Appl. Math. vol. 29, p. 389-461 (1976).

[Mc] H. Mc KEAN : Stochastic integrals. Academic Press. New-York 1969.

[Pl] E. PLATEN : A Taylor formula for semimartingales solving a stochastic equation in "3rd Conference on stochastic differential systems" (Visegrad/Hongrie 1980). p. 65-68.

[Sc] M. SCHILDER : Some asymptotic formulas for Wiener integrals. Transactions Am. Math. Soc. vol. 125, p. 63-85 (1965).

[S-V 1] D. STROOK - S. VARADHAN : Diffusion processesses with continuous coefficients Comm. Pure App. Math. 22, p. 365-400 et 479-530 (1969).

[S-V 2] D. STROOK - S. VARADHAN : Multidimensional diffusion processes Springer (1979).

[Va] S. VARADHAN : Asymptotic probabilities and differential equations. Comm. Pure App. Math. vol. 1, p. 261-286 (1966).

[V-F] A. VENTCELL - M. FRIEDLIN : On small random perturbations of dynamical systems. Russ. Math. Surveys. Vol. 25, p. 1-55 (1970).