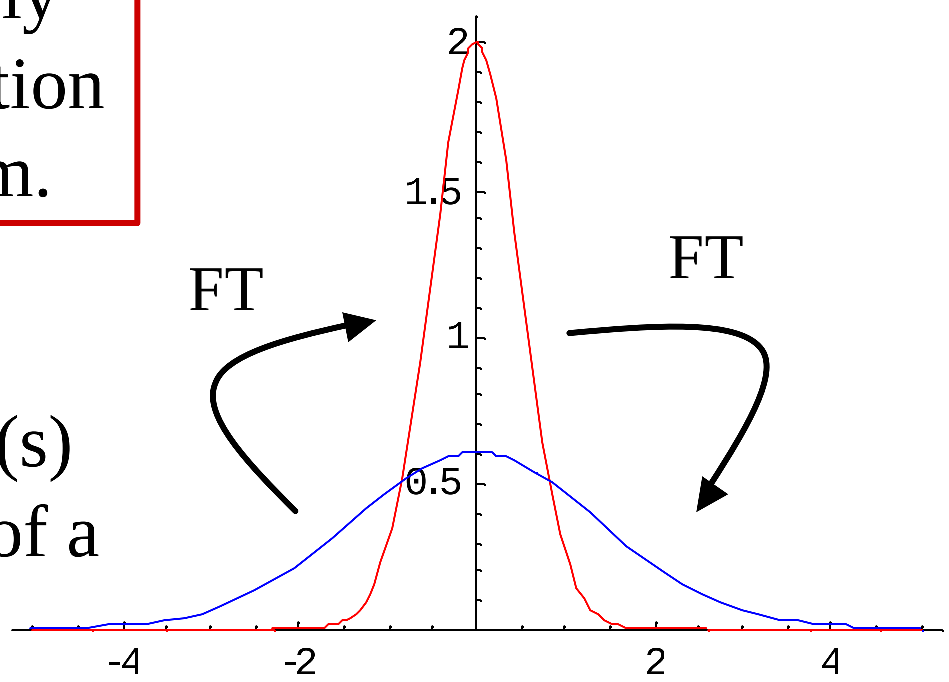
The Uncertainty Principle: Folklore of Harmonic Analysis

It is impossible to sharply concentrate both a function and its Fourier transform.

For precise formulation(s) need to define “width” of a function.



The Classical Uncertainty Principle

W. Heisenberg 1927

ermöglichen, als es der Gleichung (1) entspricht, so wäre die Quantenmechanik unmöglich. Diese Ungenauigkeit, die durch Gleichung (1) festgelegt ist, schafft also erst Raum für die Gültigkeit der Beziehungen, die in den quantenmechanischen Vertauschungsrelationen

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi i}$$

ihren prägnanten Ausdruck finden; sie ermöglicht diese Gleichung, ohne daß der physikalische Sinn der Größen p und q geändert werden müßte.

Für diejenigen physikalischen Phänomene, deren quantentheoretische Formulierung noch unbekannt ist (z. B. die Elektrodynamik), bedeutet Gleichung (1) eine Forderung, die zum Auffinden der neuen Gesetze nützlich sein mag. Für die Quantenmechanik läßt sich Gleichung (1) durch eine geringfügige Verallgemeinerung aus der Dirac-Jordanschen Formulierung herleiten. Wenn wir für den bestimmten Wert η irgend eines Parameters den Ort q des Elektrons zu q' bestimmen mit einer Genauigkeit q_1, so können wir dieses Faktum durch eine Wahrscheinlichkeitsamplitude $S(\eta, q)$ zum Ausdruck bringen, die nur in einem Gebiet der ungefähren Größe q_1 um q' von Null merklich verschieden ist. Insbesondere kann man z. B. setzen

$$S(\eta, q) \text{ prop } e^{-\frac{(q-q')^2}{2q_1^2} - \frac{2\pi i}{h}p'(q-q')}, \quad \text{also } S\bar{S} \text{ prop } e^{-\frac{(q-q')^2}{q_1^2}}. \qquad (3)$$

Dann gilt für die zu p gehörige Wahrscheinlichkeitsamplitude

$$S(\eta, p) = \int S(\eta, q) S(q, p)\, dq. \qquad (4)$$

Für $S(q, p)$ kann nach Jordan gesetzt werden

$$S(q, p) = e^{\frac{2\pi i p q}{h}}. \qquad (5)$$

Dann wird nach (4) $S(\eta, p)$ nur für Werte von p, für welche $\frac{2\pi(p-p')q_1}{h}$ nicht wesentlich größer als 1 ist, merklich von Null verschieden sein. Insbesondere gilt im Falle (3):

$$S(\eta, p) \text{ prop} \int e^{\frac{2\pi i(p-p')q}{h} - \frac{(q'-q)^2}{2q_1^2}}\, dq,$$

d. h.

$$S(\eta, p) \text{ prop } e^{-\frac{(p-p')^2}{2p_1^2} + \frac{2\pi i}{h}q'(p-p')}, \quad \text{also } S\bar{S} \text{ prop } e^{-\frac{(p-p')^2}{p_1^2}},$$

wo

$$\boxed{p_1 q_1 = \frac{h}{2\pi}.} \qquad (6)$$

…and how we understand it

Evaluate the "width" of a function $f \in L^2(\mathbb{R})$, normalized to $||f||_2 = 1$, by the $\boxed{\text{variance}}$

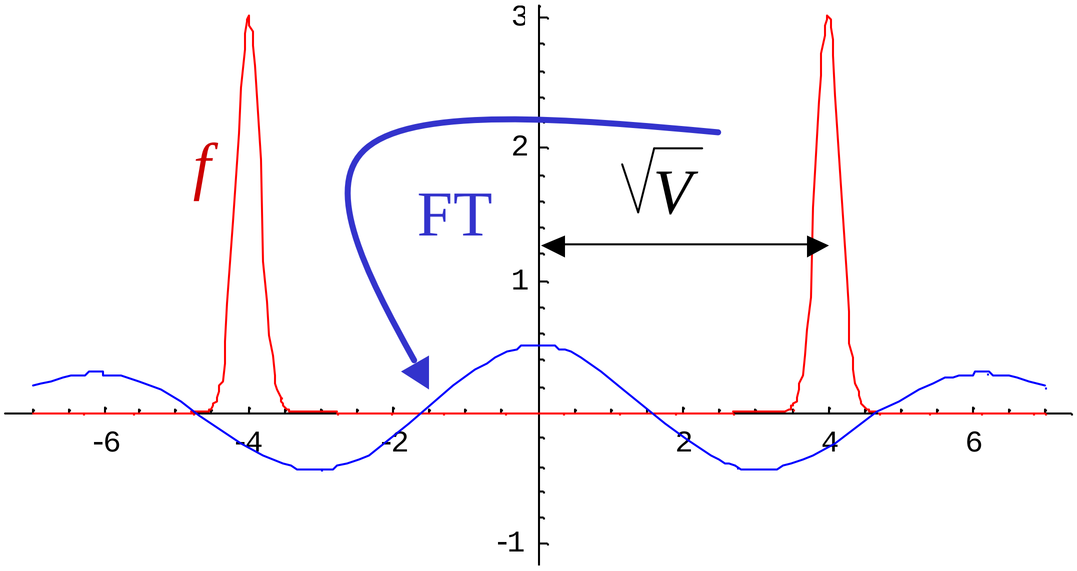
$$V(|f|^2) := \inf_{a \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 |f(x)|^2 dx \,.$$

For normalized f and its Fourier transform $\widehat{f}$,

$\boxed{V(|f|^2)V(|\widehat{f}|^2) \text{ is minimal iff } f \text{ is a Gaussian}}$

(Weyl, 1928).

Deficiencies of the Classical Uncertainty Principle



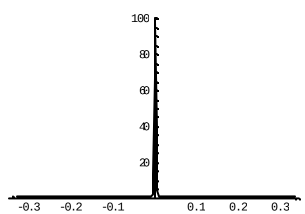
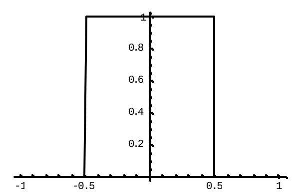
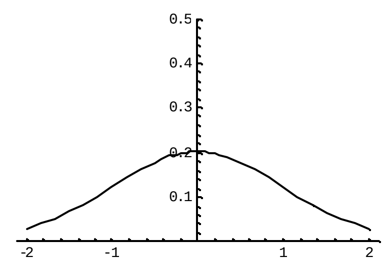
1. Variance as measure of concentration: Although f is superposition of two narrow Gaussians, V is very high $\Longrightarrow$ no good control over its FT.
2. Use of Fourier transform: Cannot talk about properties of "pieces" of f.

Entropy as measure of concentration

Given normalized $f \in L^2(\mathbb{R})$, let entropy

$$S(|f|^2) := -\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \ln |f(x)|^2 dx$$

whenever defined.

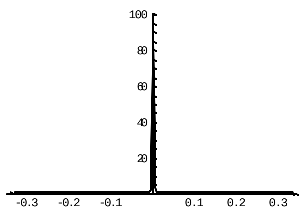
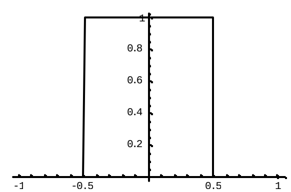
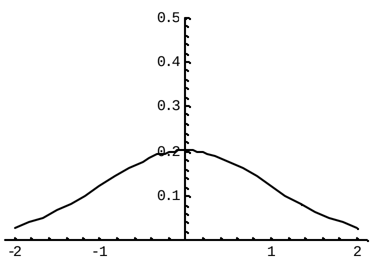
f			
S	$-M < 0$	0	$L > 0$

Does not have "multi-peak" deficiency.

Relation between entropy, variance, and L^p-norm

- $S(|f|^2) \leq \frac{1}{2}\ln(2\pi e V(|f|^2))$ (Shannon)

- $S(|f|^2) = -\left[p\frac{d}{dp}||f||_p^p\right]_{p=2}.$

f			
S	- M < 0	0	L > 0

Entropic Uncertainty Principle

Given a normalized $f \in L^2(\mathbb{R})$, then

$$\boxed{S(|f|^2) + S(|\hat{f}|^2)} \geq \ln(\pi e \hbar)$$

(Hirschmann, Beckner; 70s). More precisely, together with (Shannon)

$$V(|f|^2)V(|\hat{f}|^2) \geq \frac{1}{4\pi^2} e^{2(\boxed{S(|f|^2)+S(|\hat{f}|^2)}-1)} \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

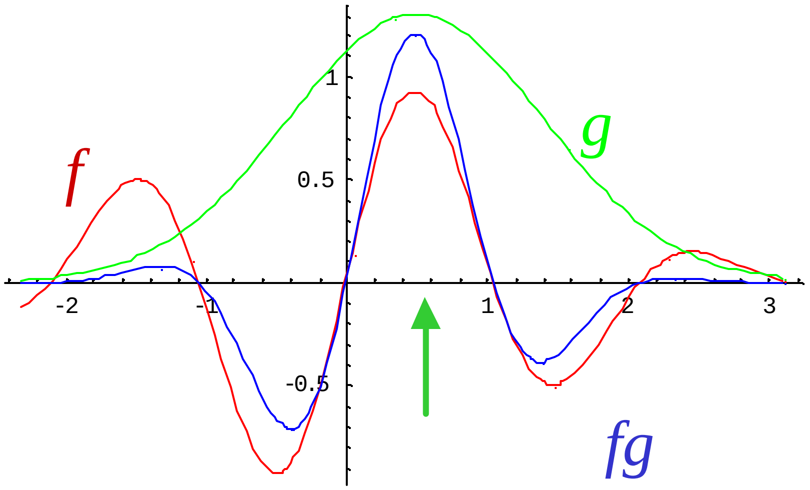
and equality holds iff f is a Gaussian (Lieb, 1990).

Sharper than classical version, but still, concentration is evaluated globally. Localized form?

Localization with Gaussian window

Localized Fourier transform

1. Gaussian window
with given center



2. Fourier transform, evaluate at given momentum.

gives component of f centered at given position and momentum values, also known as Bargmann transform.

Concentration vs. controlling tails

Bargmann transform

$$F_g f(x,\xi) := \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-\pi(t-x)^2} e^{-2\pi i \xi t} \, dt$$

is an $\boxed{\text{isometry } L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}^2)}$ (Gabor, Bargmann).

Point-wise bound: $|F_g f| \leq ||f||_2$.

Cannot arbitrarily concentrate $F_g f$, but measure uncertainty by decay properties of $F_g f$ in phase space $\mathbb{R}^2$.

Localized Entropic Uncertainty Principle

Wehrl entropy bound: For normalized $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$S(|F_g f|^2) \geq 1$$

with equality iff f Gaussian of same width as g.
(Lieb, 1978; Carlen "only if", 1991)

This bound has the classical uncertainty principle as a consequence.

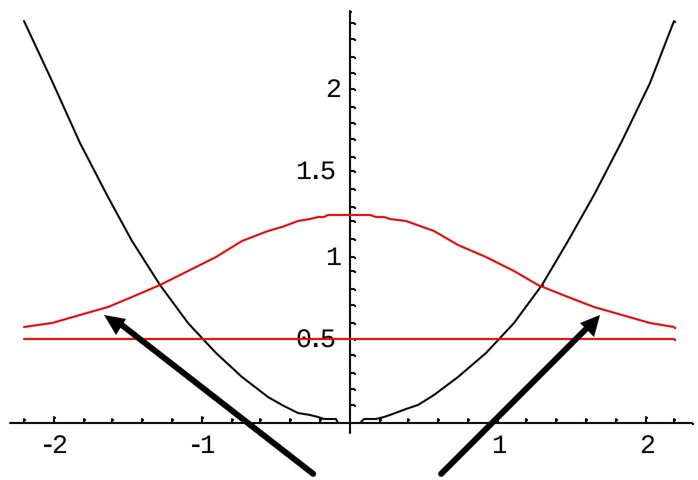
Conjectured finite-dimensional analogue for SU(2) representation, proved for lowest spin (Schupp, 1999) and high spin asymptotics (BGB, 2004).

Who needs sharp control of tails? Relevance in Quantum Mechanics

Classical $\xleftrightarrow{\text{Uncertainty}}$ Quantum

Bounds on uncertainty needed for controlling quantum phenomena in quasi-classical terms.

Example: Lower bound for the ground state energy of the harmonic oscillator



Tails

$E_{QM} = 0.5$

$\boxed{E_{Wehrl} = 0.5}$

$E_{Q\text{-}Cl} = 0.25$

$E_{Cl} = 0$