

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Механико–математический факультет

На правах рукописи

УДК 519.612.2

Гриневич Пётр Петрович

Итерационные методы решения задачи Стокса с переменной вязкостью

01.01.07 – Вычислительная математика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Руководитель

д. ф.-м. н., проф.

Ольшанский М.А.

Москва

2010

Содержание

Введение	3
Глава 1. Задача типа Стокса с переменной вязкостью. .	22
1.1. Постановка задачи	22
1.2. Неравенство Нечаса в весовой норме.	23
1.3. Дискретизация задачи.	30
1.4. Матричная постановка дискретной задачи.	33
1.5. Итерационный метод решения СЛАУ.	35
1.6. Оценка собственных значений и сходимость итерационных методов.	43
Глава 2. Задача Бингама и задача мантийной конвекции.	50
2.1. Постановка задачи Бингама.	50
2.2. Регуляризованная задача Бингама	52
2.3. Нелинейный итерационный метод для задачи Бингама. . .	54
2.4. Применение оценок на собственные значения к задаче те- чения среды Бингама в канале.	56
2.5. Применение оценок на собственные значения к задаче ман- тийной конвекции.	60
Глава 3. Численные эксперименты.	65
3.1. Течение среды Бингама в канале.	66
3.2. Течение среды Бингама в каверне.	75
3.3. Задача моделирования мантийной конвекции.	91
3.4. Выводы из численных экспериментов.	93

Заключение		94
Литература		96

Введение

Решение многих современных прикладных задач приводит к системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с седловой точкой. Характерной особенностью таких систем является знаконеопределенность. В симметричном случае имеются как положительные, так и отрицательные собственные значения. Подобные системы возникают, например, в теории динамических систем [37], в теории упругости (см. [22], [28]), в экономике (см. [16], [32], [42]), в теории оптимального управления (см. [17], [18]), при моделировании электромагнитных явлений ([21], [54]) и во многих других областях. Важной областью, требующей решения задач с седловой точкой, является численное решение линеаризованных уравнений Навье–Стокса, описывающих течение несжимаемой вязкой жидкости [62], [39], [55], [63], [67]. Уравнения Навье–Стокса являются основными уравнениями гидродинамики и, соответственно, играют важную роль в современной науке. Отметим, что в ходе их решения, как правило, возникает необходимость проводить вычисления на мелких сетках, а значит решаемые системы имеют большую размерность. Знаконеопределенность делает процедуру выбора метода решения таких систем нетривиальной, так как многие эффективные методы решения СЛАУ, см., например, [58], пригодны только для систем с положительно определенной матрицей.

Уравнения Навье–Стокса во многих случаях хорошо описывают поведение жидкостей и газов. Однако, многие вещества в природе описываются моделями с переменным коэффициентом вязкости, зависящим от внешних факторов. Примером могут служить биологические жидкости (например, кровь), нефть, зубная паста, кетчуп, крахмал, разведен-

ный в воде и многие другие вещества. В некоторых случаях, например, кетчуп, наблюдается уменьшение вязкости при возрастании внутренних напряжений. В других, таких как крахмал, поведение обратное — при возрастании напряжений вязкость резко увеличивается. Для моделирования подобных веществ можно рассматривать модифицированные уравнения Навье–Стокса, при этом вязкость является не постоянным параметром среды, а функцией, зависящей от динамических, кинематических или других характеристик среды в данной точке пространства, например, тензора скоростей деформации, давления, температуры, и т.д. Возникающие при дискретизации линейные системы характеризуются тем, что их число обусловленности зависит от отношения максимальной вязкости к минимальной. Данное обстоятельство предъявляет дополнительное требование к методам решения СЛАУ, а именно — независимость числа итераций от отношения максимального значения коэффициента вязкости к минимальному и от градиента коэффициента вязкости как функции пространственной переменной. Эффективное решение уравнений Навье–Стокса с переменной вязкостью является темой ряда современных исследований. Упомянем некоторые из них. В статье [70] рассматривается моделирование мантийной конвекции в планетарном масштабе. Рассматривается влияние разных моделей вязкости, в том числе — распределенной по слоям, а также вязкости, зависящей от температуры. В [49] получены оценки сходимости конечноэлементного решения задачи Стокса с интерфейсом к решению непрерывной задачи. Вязкость при этом кусочно-постоянна и имеет скачок. Работа [56] посвящена построению эффективных итерационных методов для несжимаемой задачи Стокса с переменной вязкостью, в ней рассматриваются задачи, связанные с моделированием процесса экструзии и с геологией.

В статье [68] представлено построение равномерно устойчивых по скачку коэффициента вязкости конечноэлементных аппроксимаций уравнений Дарси–Стокса–Бринкмана. В работе [52] получено $\inf$ – $\sup$ неравенство для задачи Стокса с интерфейсом, которое равномерно по скачку вязкости между подобластями. В [51] авторами предложен метод анализа переобуславливателей для дополнения по Шуру для абстрактных задач с седловой точкой. Применение этого метода к задаче Стокса с интерфейсом приводит к построению переобуславливателя, являющегося устойчивым по отношению к ряду параметров. Работа [38] посвящена параллельным методам решения трехмерных уравнений Навье–Стокса.

В численном анализе методов решения задачи Стокса важную роль играет условие LBB (Ладыженской–Бабушки–Бреци) [23] и его непрерывный аналог, неравенство Нечаса [46]. В диссертации неравенство Нечаса обобщается на случай переменной вязкости и на основе этого обобщения получены оценки эффективности предлагаемого итерационного метода. Некоторые другие обобщения неравенства Нечаса получены в работах [1] и [6].

Одной из задач, где возникают уравнения Навье–Стокса с переменной вязкостью, является моделирование среды Бингама. Среда Бингама является вязко–пластичной средой, которая при напряжениях ниже порогового значения ведет себя как твердое тело, а при превышающих пороговое значение — как вязкая жидкость. Примерами веществ, описываемых моделью Бингама являются зубная паста, различные суспензии, например грязь или незастывший бетон, геоматериалы. Впервые модель независимо была предложена Шведовым [60] и Бингамом [20] для описания движения суспензий в условиях чистого сдвига (одномерная модель). Позднее Генки [2] и Ильюшин [4] предложили пространственное

обобщение уравнения состояния Шведова–Бингама и решили ряд задач для случая плоских течений вязко–пластичной среды. Течению среды Бингама посвящено большое количество литературы, среди отечественной можно отметить труды П.М. Огибалова и А.Х. Мирзаджанадзе [10], П.П. Мосолова и В.П. Мясникова [9], а также Д.М. Климова, А.Г. Петрова, Д.В. Георгиевского. [5]. Задача Бингама является более сложной, чем задача Навье–Стокса. Одним из подходов к ее численному решению является регуляризация — модель, когда среда Бингама рассматривается как жидкость с переменной вязкостью.

Задача Бингама трудно поддается математическому анализу и ее точные решения найдены только для узкого круга модельных задач, например, для течения среды между двумя параллельными пластинами [5]. По этой причине численные методы, зачастую, являются единственным способом анализа многих процессов. Численному решению задачи Бингама посвящены, например, следующие публикации: [48], [19], [53], [29], [30], [33], [44], [65], [57].

Задачи с переменной вязкостью появляются и во многих других научных областях, например, в геологии. В мантии Земли температура неоднородна, а вязкость магмы напрямую зависит от температуры. Численные методы позволяют проводить моделирование внутреннего строения Земли и эта тема рассматривается сейчас многими учеными. Например, в [45], [69] обсуждаются вопросы численного моделирования мантийной конвекции, в [43] — вопросы численного моделирования миграции магмы.

Цель работы.

Работа преследует следующие цели.

1. Построение эффективного метода решения систем линейных ал-

гебраических уравнений, возникающих при дискретизации задачи Стокса с переменной вязкостью. Поскольку в реальных приложениях отношение максимальной вязкости к минимальной может быть очень большим, к такому методу решения СЛАУ в настоящей работе предъявляется требование независимости (или слабой зависимости) количества итераций от этого отношения, а также от шага сетки.

2. Теоретический анализ эффективности предлагаемого метода решения систем линейных алгебраических уравнений. В частности, получение оценок скорости сходимости в терминах экстремальных значений коэффициента вязкости и других параметров систем уравнений.
3. Проверка эффективности предлагаемого метода на модельных задачах: регуляризованной задаче моделирования течения среды Бингама в канале и каверне, а также на линейной задаче, возникающей при моделировании всплытия раскаленного пузыря в мантии Земли.

Используемые обозначения.

- Обычным шрифтом (например, p) обозначаются скалярные функции, коэффициенты разложения по конечноэлементным базисам и вектора в матричной записи линейных систем.
- Полужирным шрифтом (например, $\mathbf{v}$) обозначаются векторные и

тензорные функции и операторы. Используются обозначения

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \operatorname{div} \mathbf{D}^1 \\ \operatorname{div} \mathbf{D}^2 \\ \operatorname{div} \mathbf{D}^3 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{D}$ — тензорная функция, действующая из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^{3 \times 3}$, и $\mathbf{D}^k = (D^{k1}, D^{k2}, D^{k3})$.

- Индекс h у функции или оператора указывает на дискретную (конечноразностную или конечноэлементную) аппроксимацию данной функции или данного оператора.
- Через L^p обозначается пространство Лебега с индексом суммирования p , через $\|\cdot\|_{L^p}$ — норма в L^p . Запись $\|\cdot\|$ означает норму в L^2 . Скалярное произведение в L^2 и евклидово скалярное произведение обозначаются как $(\cdot, \cdot)$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$, соответственно.

Используется $L_0^2(\Omega)$ — пространство всех функций f из $L^2(\Omega)$ таких, что $\int_{\Omega} f d\Omega = 0$ и $L_{\nu}^2(\Omega)$ — пространство функций f из $L^2(\Omega)$, для которых выполняется условие $\int_{\Omega} f \nu^{-1} d\Omega = 0$ с некоторой функцией $\nu > 0$ такой, что $\nu^{-1} \in L^{\infty}$.

- Символом $\mathbf{H}_0^1$ обозначено пространство интегрируемых вектор-функций, градиент которых, понимаемый в обобщенном смысле, принадлежит $L^2(\mathbb{R}^{d \times d})$, $d = 2, 3$ и имеющих нулевой след на границе расчетной области.

Краткое содержание работы.

В первой главе приводится формулировка задачи Стокса с переменной вязкостью, доказывается обобщение неравенства Нечаса на случай весовой нормы. Приводится матричная постановка дискретной задачи, предлагается переобуславливатель для дополнения по Шуру и при помощи обобщенного неравенства Нечаса получаются оценки его эффективности.

В первом разделе дается формулировка задачи Стокса с переменной вязкостью. Основные уравнения, рассматриваемые в первой главе, имеют вид

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \nu(\mathbf{x}) \mathbf{D} \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{в } \Omega \\ -\operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \quad \text{в } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 \quad \text{на } \partial \Omega. \end{aligned}$$

Через $\mathbf{D} \mathbf{u}$ обозначен тензор скоростей деформации $\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})$. Вязкость ν в первой главе считается зависящей только от пространственных координат $\mathbf{x}$.

Во втором разделе получен основной теоретический результат диссертации — неравенство Нечаса в весовой норме. Оно является обобщением хорошо известного неравенства Нечаса

$$0 < c_0 \leq \inf_{q \in L_0^2} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1} \frac{(q, \operatorname{div} \mathbf{v})}{\|q\| \|\nabla \mathbf{v}\|},$$

которое, в свою очередь, является непрерывным аналогом условия Ладженской – Бабушки – Брецци (LBB): если константа

$$c_{0,h} = \inf_{q_h \in \mathbb{Q}_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbb{V}_h} \frac{(q_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h)}{\|q_h\| \|\nabla \mathbf{v}_h\|}$$

равномерно по шагу сетки отделена от нуля, то пара конечноэлементных пространств $\mathbb{V}_h$ и $\mathbb{Q}_h$ (для скорости и давления, соответственно) приво-

дит к устойчивой дискретной задаче. Под равномерным отделением от нуля понимается существование такой константы $c^* > 0$, что при всех h выполняется $c_{0,h} > c^*$. Результат сформулирован в виде Теоремы 1, суть утверждения которой заключается в выполнении неравенства

$$\tilde{c}_\nu \|\nu^{-\frac{1}{2}} q\| \leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1} \frac{(q, \operatorname{div} \mathbf{v})}{\|\nu^{\frac{1}{2}} \mathbf{D} \mathbf{v}\|}. \quad (1)$$

для функций $q \in L^2(\Omega)$, на которые наложены условия ортогональности $(q, \nu^{-1}) = 0$ и $(q, \nu^{-\frac{1}{2}}) = 0$. Получены оценки на константу $\tilde{c}_\nu$.

Приводится важное следствие Теоремы 1 — обобщение на случай, когда расчетная область Ω представлена в виде объединения конечного числа подобластей Ω_i . В этом случае константа $\tilde{c}_\nu$ для всей области Ω может быть оценена снизу минимумом из всех констант $\tilde{c}_\nu(\Omega_i)$, вычисленных на подобластях.

Иногда при помощи удачного разбиения удается добиться того, что $\min_i \tilde{c}_\nu(\Omega_i) \gg \tilde{c}_\nu(\Omega)$. Ценой этого улучшения являются два условия ортогональности на каждой подобласти: $(q, \nu^{-1})_{L^2(\Omega_i)} = (q, \nu^{-\frac{1}{2}})_{L^2(\Omega_i)} = 0$.

Разделы 3 и 4 посвящены дискретизации задачи и построению СЛАУ. Дискретизация проводилась двумя методами, а именно — методом конечных элементов (isoP2–P1) и методом конечных разностей (MAC–схема). Дается описание построения дискретной задачи при помощи обоих методов. Излагается вариационная постановка, дается определение конечно-элементных пространств для метода конечных элементов, вводятся сетки и задаются сеточные аналоги для непрерывных операторов при использовании метода конечных разностей. Оба метода приводят к решению системы линейных алгебраических уравнений с седловой точкой с мат-

рицей вида

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $A = A^T > 0$.

В пятом разделе описывается метод решения полученной дискретной задачи. Основная идея заключается в использовании метода на подпространствах Крылова (MINRES или GMRES) со специальным переобуславливателем вида

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \hat{A} & 0 \\ 0 & \hat{S} \end{pmatrix} \quad (3)$$

или

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} \hat{A} & 0 \\ B & -\hat{S} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Здесь $\hat{A}$ — переобуславливатель для блока A , $\hat{S}$ — переобуславливатель для дополнения по Шуру $S = BA^{-1}B^T$. Для дополнения по Шуру предлагается применять переобуславливатель

$$\{M_\nu\}_{i,j} := (\nu^{-1}\psi_j, \psi_i) \quad (5)$$

при использовании метода конечных элементов (через ψ_i обозначены базисные функции для давления) и

$$M_\nu = \text{diag} \{ \nu^{-1}(x_{i,j}) \} \quad (6)$$

при использовании метода конечных разностей. Переобуславливатель M_ν учитывает структуру функции ν , что важно при большом отношении максимального значения вязкости к минимальному. Сформулированы дискретные аналоги Теорем 1 и 2, обозначенные в тексте как Предположение 1 и Теорема 4, соответственно. Предположение 1 сводится к

предположению справедливости дискретного аналога обобщенного неравенства Нечаса для пары конечноэлементных пространств, удовлетворяющих LBB условию устойчивости. Далее доказывается, что

$$\langle Sq, q \rangle \leq d \langle M_\nu q, q \rangle$$

для всех $q_h \in \mathbb{Q}_h$ и, если Предположение 1 справедливо, то выполняется соотношение

$$c_{\nu,h}^2 \langle M_\nu q, q \rangle \leq \langle Sq, q \rangle$$

для всех $q_h \in \mathbb{Q}_h$ таких, что $(q_h, \nu^{-1})_{L^2(\Omega_i)} = (q_h, \nu^{-\frac{1}{2}})_{L^2(\Omega_i)} = 0$. Здесь d — размерность пространства, т.е. $d = 2$ или $d = 3$, через q обозначен вектор коэффициентов разложения по базису функции $q_h \in \mathbb{Q}_h$, а $\tilde{c}_{\nu,h}$ — константа из Теоремы 4. Таким образом устанавливается связь между неравенством Нечаса в весовых нормах и эффективностью переобуславливателя M_ν для дополнения по Шуру.

В шестом разделе первой главы дается оценка собственных значений для переобусловленной матрицы дополнения по Шуру. Она выводится из представления Куранта–Фишера

$$\lambda_k = \max_{\mathcal{K} \in \mathcal{V}_{k-1}} \min_{q \in \mathcal{K}^\perp} \frac{\langle Sq, q \rangle}{\langle M_\nu q, q \rangle},$$

где символом $\mathcal{V}_{k-1}$ обозначены все $(k-1)$ -мерные подпространства $\mathbb{R}^m$.

Для $\lambda(M_\nu^{-1}S)$ в диссертации получены оценки

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \cdots \leq \lambda_m \leq d \quad \text{и} \quad \tilde{c}_{\nu,h}^2 \leq \lambda_{2N+1}, \quad (7)$$

где d — размерность пространства, N — количество подобластей, на которые разбита область Ω , а $\tilde{c}_{\nu,h}$ — константа из Теоремы 4.

В этом разделе также приводится оценка скорости сходимости метода Узавы-сопряженных градиентов [34] для систем линейных алгебраических уравнений с матрицей (2) и переобуславливателем для дополнения

по Шуру M_ν и оценка количества дополнительных итераций, вызванных возможным присутствием $2N - 1$ малого собственного значения.

Во второй главе описывается применение теоретических результатов первой главы к решению двух модельных задач: задачи Бингама о течении вязкопластичной жидкости в канале и задаче моделирования мантийной конвекции.

В первом разделе даются определяющие соотношения модели Бингама, вводятся понятия жестких зон и эффективной вязкости в жидких зонах. Задача Бингама нелинейна, и ее эффективная вязкость зависит от тензора скоростей деформации, а значит, и от поля скоростей $\mathbf{u}$.

Соотношения, связывающие тензор скоростей деформации $\mathbf{Du}$ и девиатор тензора напряжений $\boldsymbol{\tau}$, имеют вид

$$\tau^{ij} = 2\mu D^{ij}\mathbf{u} + \tau_s \frac{D^{ij}\mathbf{u}}{|\mathbf{Du}|}, \quad \text{если} \quad |\mathbf{Du}| > 0;$$

$$|\boldsymbol{\tau}| \leq \tau_s, \quad \text{если} \quad |\mathbf{Du}| = 0,$$

где τ_s — предел пластичности, а μ — коэффициент вязкости. В жидкой зоне коэффициент пропорциональности между девиатором тензора напряжений и тензором скоростей деформаций часто называют эффективной вязкостью. При этом в жестких зонах эффективную вязкость формально можно считать бесконечной.

В диссертации рассматривается подход к численному решению задачи Бингама, основанный на регуляризации, последующей дискретизации на каждом шаге нелинейного процесса и применении нового переобусловленного итерационного метода для решения линейных вспомогательных задач. Важным свойством предлагаемого в настоящей диссертации метода является отсутствие параметров, требующих тонкой настройки.

Во втором разделе дается описание регуляризованной задачи. Регу-

ляризация — подход к решению задачи Бингама, при котором среда рассматривается как жидкая во всей расчетной области, а в жестких зонах эффективная вязкость считается конечной. Величина вязкости в жестких зонах существенным образом определяется параметром регуляризации ε . Рассматриваются два варианта регуляризации:

$$\begin{aligned}\nu_\varepsilon(|\mathbf{Du}|) &= 2\mu + \frac{\tau_s}{\sqrt{|\mathbf{Du}|^2 + \varepsilon^2}} && \text{— Берковьера–Энгельмана;} \\ \nu_\varepsilon(|\mathbf{Du}|) &= 2\mu + \tau_s \frac{1 - \exp(-\frac{|\mathbf{Du}|}{\varepsilon})}{|\mathbf{Du}|} && \text{— Папанастасио.}\end{aligned}$$

В третьем разделе определяется итерационный метод, используемый для решения регуляризованной задачи Бингама. Нелинейные уравнения решаются методом Пикара:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}^n \\ p^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{n-1} \\ p^{n-1} \end{pmatrix} - \tilde{F}(\mathbf{u}^{n-1})^{-1} \circ \left[F(\mathbf{u}^{n-1}) \circ \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{n-1} \\ p^{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix} \right],$$

где через F обозначен оператор, линейный при фиксированной функции $\mathbf{a}$

$$F(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} -\operatorname{div} \nu(|\mathbf{Da}|) \mathbf{D} & \nabla \\ -\operatorname{div} & 0 \end{pmatrix},$$

а через $\tilde{F}(\mathbf{u}^{n-1})^{-1}$ — приближенное решение линейной задачи с матрицей $\mathcal{A}$ (2), возникающей при дискретизации оператора F .

В четвертом разделе выводится оценка собственных значений матрицы $M_\nu^{-1}S$ для задачи о течении среды Бингама в канале. Это одна из

немногих задач, где известно аналитическое решение $\mathbf{u} = (u, v)$:

$$u = \begin{cases} \frac{1}{8}(1 - 2\tau_s)^2, & \text{если } \frac{1}{2} - \tau_s \leq y \leq \frac{1}{2} + \tau_s, \\ \frac{1}{8} [(1 - 2\tau_s)^2 - (1 - 2\tau_s - 2y)^2], & \text{если } 0 \leq y < \frac{1}{2} - \tau_s, \\ \frac{1}{8} [(1 - 2\tau_s)^2 - (2y - 2\tau_s - 1)^2], & \text{если } 1 \geq y > \frac{1}{2} + \tau_s, \end{cases}$$

$$v = 0,$$

$$p = -x.$$

С помощью разбиения области на три подобласти, соответствующие ядру течения в центре и жидким зонам по краям, непосредственно оценена константа в обобщенном неравенстве Нечаса (1) и, используя соотношения (7), получена оценка на собственные значения переобусловленного матрицей M_ν дополнения по Шуру: для любого $s \in (0, 1]$ существует не зависящая от ε константа c_2 , что

$$c_1\varepsilon < \lambda_2, \quad c_2\varepsilon^s \leq \lambda_7 \leq \dots \leq \lambda_m \leq d = 2,$$

где константа c_1 не зависит от ε .

Последний раздел второй главы посвящен применению результатов первой главы к задаче моделирования мантийной конвекции. Рассматривается линейная задача, возникающая при моделировании всплытия раскаленного пузыря в магме. Считается, что вязкость ν в этом случае зависит только от температуры T , а температура — только от пространственных координат. Приводятся алгоритм разбиения области на подобласти для данной задачи и вычисленные значения констант в обобщенном неравенстве Нечаса (1).

Таким образом, во второй главе описано применение метода, предлагаемого в первой главе, к модельным задачам и получены оценки его эффективности.

В третьей главе представлены результаты численного решения трех модельных задач, включая течение среды Бингама в канале и каверне, а также задачу моделирования всплытия раскаленного пузыря в магме.

В первых двух разделах представлены и проанализированы результаты решения задач течения среды Бингама в канале и в каверне, соответственно. Приводятся графики, на которых изображены все собственные значения переобусловленного дополнения по Шуру с использованием как матрицы масс M , так и предлагаемого в работе переобуславливателя M_ν . Приводится количество нелинейных и линейных итераций для разных конфигураций метода решения СЛАУ. Расчеты проводились с обеими регуляризациями с разными значениями регуляризационного параметра ε . Дано также сравнение блочно – диагонального (3) и блочно – треугольного (4) переобуславливателей для матрицы A . Вычисления показали, что для данной модельной задачи численное решение хорошо приближает аналитическое и выбор регуляризации слабо влияет на эффективность метода. При этом, использование блочно – треугольного переобуславливателя (4) приводит к заметно более высокой скорости сходимости, чем использование блочно – диагонального (3).

Для задачи о каверне представлены графики с приближениями жестких зон для различных значений предела пластичности τ_s и регуляризационного параметра ε . Эти результаты (вид и размеры жестких зон) хорошо согласуются с результатами расчетов в других работах. В [44], например, рассматривается регуляризованная задача, а в работах [30] и [50] — нерегуляризованная. Это свидетельствует о том, что выбранные численные параметры позволяют воспроизводить важные физические эффекты.

Из численных экспериментов по решению регуляризованной задачи

Бингама в канале и в каверне можно сделать следующий вывод: предлагаемый в диссертации итерационный метод решения систем линейных алгебраических уравнений показывает практически полное отсутствие зависимости числа итераций как от шага сетки, так и от параметра регуляризации (соответственно, от отношения максимального значения вязкости к минимальному), что хорошо согласуется с теоретическими оценками (в задаче о течении в канале).

В третьем разделе третьей главы обсуждаются результаты численного решения линейной задачи, возникающей при моделировании всплытия раскаленного пузыря в магме. Сравнивается эффективность переобуславливателей M и M_ν . Численные эксперименты показали, что число линейных итераций в задаче моделирования мантийной конвекции с увеличением отношения максимальной вязкости к минимальной растет незначительно. Хотя теоретические оценки, судя по всему, не являются оптимальными в этом случае.

Апробация работы.

1. Международная конференция “X-я Белорусская математическая конференция”. Белоруссия, Минск, 2008.
2. Доклад на семинаре Кафедры вычислительной математики Математического факультета Технического университета Дортмунда под руководством Ш. Турека. Германия, Дортмунд, 2009.
3. XVI Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов”. Москва, 2009.
4. International Workshop on “Computational Mathematics and Applications”. Финляндия, Тампере, 2009.

5. XVII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов”. Москва, 2010.
6. Доклад на семинаре Кафедры вычислительной математики, Механико-математический факультет МГУ под руководством Г.М. Кобелькова. Москва, 2010.
7. Доклад на семинаре Кафедры механики композитов под руководством В.И. Горбачева, Механико-математический факультет МГУ. Москва, 2010.
8. Доклад на семинаре “Технологии математического моделирования течений со свободной границей” под руководством Ю.В. Василевского и М.А. Олышанского, ИВМ РАН. Москва, 2010.
9. Доклад на семинаре Кафедры математического моделирования МЭИ(ТУ) под руководством А.А. Амосова и Ю.А. Дубинского. Москва, 2010.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

1. Доказано обобщенное неравенство Нечаса для случая переменной вязкости. Доказано обобщение неравенства для случая, когда область представлена в виде объединения непересекающихся подобластей.
2. Предложен переобуславливатель для дополнения по Шуру для дискретной задачи Стокса, учитывающий структуру переменной вязкости. Получена оценка на собственные значения переобусловленного дополнения по Шуру. Получена оценка скорости сходимости метода Узавы-сопряженных градиентов.

3. Предлагаемый переобуславливатель применен для численного решения регуляризованной задачи Бингама и линейной задачи, возникающей при моделировании всплытия раскаленного пузыря в магме. Для задачи о течении среды Бингама в канале получены оценки собственных значений переобусловленного дополнения по Шуру и теоретически доказано, что зависимость от параметра регуляризации оценок собственных значений более слабая для предлагаемого метода, чем для стандартного переобуславливателя (матрицы масс).
4. Проведены численные эксперименты, хорошо согласующиеся с теоретическими результатами задачи течения среды Бингама в канале и показавшие практическую независимость числа линейных итераций как от шага сетки, так и от отношения максимального значения вязкости к минимальному для задачи течения среды Бингама в каверне и линейной задачи, возникающей при моделировании всплытия раскаленного пузыря в магме при использовании предлагаемого переобуславливателя.

Публикации.

1. *P.P. Grinevich, M.A. Olshanskii.* An iterative method for the Stokes type problem with variable viscosity // SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 31, Iss. 5, 2009, pp.3959–3978.
2. *П.П. Гриневич, М.А. Ольшанский.* Итерационный метод решения регуляризованной задачи Бингама // Вычислительные методы и программирование, Том 10, 2010, стр. 78–87.
3. *П.П. Гриневич.* Об итерационном методе решения задачи Стокса с

переменной вязкостью // Вестник МГУ, №3, 2010, стр. 38–41.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержащего 70 наименований. Общий объем работы — 104 страницы, работа включает 21 иллюстрацию и 18 таблиц.

Благодарности.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Максиму Александровичу Ольшанскому за постановку задачи и за постоянное внимание к работе.

Глава 1

Задача типа Стокса с переменной вязкостью.

В данной главе предлагается и анализируется итерационный метод решения задачи Стокса с переменной вязкостью, основной идеей которого является использование переобуславливателя для дополнения по Шуру, учитывающего структуру переменной вязкости. Важным свойством предлагаемого итерационного метода является практически полное отсутствие зависимости числ линейных итераций от отношения максимального значения вязкости к минимальному. Для получения оценок эффективности формулируется и доказывается обобщение неравенства Нечаса для случая переменной вязкости, в предположении справедливости его дискретного аналога оцениваются собственные значения переобусловленного дополнения по Шуру.

1.1. Постановка задачи

Сначала приведем постановку задачи, которая решается в первой главе. Пусть задана связная область Ω с кусочно-гладкой границей, удовлетворяющей условию Липшица. В этой области требуется решить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{в } \Omega \\ -\operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \quad \text{в } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 \quad \text{на } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.1}$$

$\boldsymbol{\tau}$ - девиатор тензора напряжений, $\boldsymbol{\tau} = \nu \mathbf{Du}$. Здесь $\mathbf{Du} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})$ - тензор скоростей деформаций, ν — переменная вязкость, которая мо-

жет зависеть, вообще говоря, от нормы тензора скоростей деформаций $|\mathbf{Du}| = (\frac{1}{2}\text{tr}([\mathbf{Du}]^2))^{\frac{1}{2}}$, давления p , температуры T или других параметров (например, [27], [61]). Вектор-функция скоростей $\mathbf{u}$ и функция давления p являются неизвестными. Для простоты рассматриваются краевые условия Дирихле.

Система (1.1) нелинейна, метод ее численного решения, как правило, включает решение линейной системы на каждой нелинейной итерации. Решение линейной системы является наиболее трудоемкой операцией, поэтому выбор эффективного метода решения СЛАУ крайне важен для эффективного решения всей задачи.

В настоящей главе рассматривается линейная задача, имея в виду, что коэффициент вязкости известен (например, из предыдущих нелинейных итераций, суть которых будет изложена во второй главе) и зависит только от пространственных координат:

$$\begin{aligned} -\text{div} \nu(\mathbf{x}) \mathbf{Du} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{в } \Omega \\ -\text{div } \mathbf{u} &= 0 \quad \text{в } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 \quad \text{на } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Теперь перейдем к обобщению неравенства Нечаса на случай переменной вязкости, играющего важную роль в анализе итерационных методов решения системы (1.2). Это неравенство (точнее, его дискретный аналог) в дальнейшем используется для получения оценки скорости сходимости итерационных методов.

1.2. Неравенство Нечаса в весовой норме.

Для численного анализа методов решения задачи Стокса важную роль играет условие LBB (Ладыженской–Бабушки–Бреци), [23]. С его

помощью можно определить, можно ли использовать конечноэлементные пространства $\mathbb{V}_h \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{Q}_h \in L_0^2(\Omega)$ для численного решения задачи Стокса (напомним, что символом $L_0^2(\Omega)$ обозначено пространство функций f из L^2 таких, что $\int_{\Omega} f d\Omega = 0$). Рассмотрим

$$c_{0,h} = \inf_{q_h \in \mathbb{Q}_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbb{V}_h} \frac{(q_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h)}{\|q_h\| \|\nabla \mathbf{v}_h\|}. \quad (1.3)$$

Если константа $c_{0,h}$ равна нулю, или положительна, но не отделена от нуля равномерно по шагу сетки, то использование пространств $\mathbb{V}_h \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{Q}_h \in L_0^2(\Omega)$ приводит к неустойчивой аппроксимации. Если $c_{0,h}$ отделена от нуля, то в такой паре пространств разумно искать решение дискретной задачи, [23]. Напомним, что под равномерным отделением от нуля понимается существование такой константы $c^* > 0$, что при всех h выполняется $c_{0,h} > c^*$.

Непрерывным аналогом условия LBB является неравенство Нечаса [46], формулируемое следующим образом:

$$0 < c_0 \leq \inf_{q \in L_0^2} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1} \frac{(q, \operatorname{div} \mathbf{v})}{\|q\| \|\nabla \mathbf{v}\|}. \quad (1.4)$$

Константа в неравенстве зависит от геометрии области [12], [26]. Это неравенство играет важную роль для получения априорных оценок для решения и исследования сходимости итерационных методов решения задачи Стокса.

В настоящей работе получено обобщение неравенства Нечаса на случай переменной вязкости. Данное обобщение (точнее, его дискретный аналог) используется в разделе 1.6 для оценки собственных значений переобусловленного дополнения по Шуру с применением переобуславливателя, учитывающего переменную вязкость. Эти оценки являются, по сути, обоснованием эффективности предлагаемого в работе итерационно-

го метода. Теперь приведем формулировку и доказательство неравенства Нечаса в весовой норме.

Обозначим через $L^2_\nu(\Omega)$ пространство функций f из $L^2(\Omega)$, для которых выполняется условие $\int_\Omega f\nu^{-1}d\Omega = 0$.

Теорема 1 (Неравенство Нечаса в весовой норме) *Пусть область Ω связна и имеет кусочно-гладкую липшицеву границу. Предположим, что функция $\nu > 0$ достаточно гладкая, чтобы все нормы в (1.6) – (1.7) имели смысл. Тогда для всякой функции $q \in L^2_\nu(\Omega)$, для которой также выполнено $(q, \nu^{-\frac{1}{2}}) = 0$, будет выполнено неравенство*

$$\tilde{c}_\nu \|\nu^{-\frac{1}{2}}q\| \leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1} \frac{(q, \operatorname{div} \mathbf{v})}{\|\nu^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}\mathbf{v}\|}. \quad (1.5)$$

Константа $\tilde{c}_\nu$ в двумерном случае задается формулой

$$\tilde{c}_\nu = \tilde{c}_0(1 + c(k, r)\|\nu^{\frac{1}{2}}\|_{L^k}\|\nabla\nu^{-\frac{1}{2}}\|_{L^r})^{-1} \quad (1.6)$$

с произвольными $k > 2$ и $r > \frac{2k}{k-2}$, константой $c(k, r)$, зависящей от констант неравенств вложения $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ в $L^t(\Omega)$ с $t = t(k, r)$ и константой $\tilde{c}_0$, зависящей от константы в неравенстве Нечаса. В трехмерном случае константа $\tilde{c}_\nu$ определяется по формуле

$$\tilde{c}_\nu = \tilde{c}_0(1 + c\|\nu^{\frac{1}{2}}\|_{L^k}\|\nabla\nu^{-\frac{1}{2}}\|_{L^r})^{-1} \quad (1.7)$$

с произвольными $k > 3$ и $r = \frac{3k}{k-3}$.

Доказательство. Доказательство заключается в явном построении такой функции $\mathbf{v}$ по функции $q \in L^2_\nu$, для которой выполнено $(q, \nu^{-\frac{1}{2}}) = 0$, чтобы было выполнено неравенство (1.5). Для доказательства теоремы используется следующая лемма.

Лемма 1 *Неравенство Нечаса (1.4) эквивалентно утверждению, что для любой функции $r \in L_0^2(\Omega)$ существует $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ такая, что*

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = r \quad \text{и} \quad \|\nabla \mathbf{w}\| \leq C\|r\|, \quad (1.8)$$

где константа C зависит только от геометрии области.

Доказательство Леммы. Очевидно, что из (1.8) следует (1.4). Для доказательства утверждения в обратную сторону (а для доказательства теоремы нужно именно оно) рассмотрим вспомогательную задачу Стокса:

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{w} + \nabla p &= 0 \quad \text{в} \quad \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{w} &= r \quad \text{в} \quad \Omega \\ \mathbf{w} &= 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Умножив скалярно первое уравнение (1.9) на $\mathbf{w}$ и проинтегрировав по области, получаем

$$\|\nabla \mathbf{w}\|^2 \leq \|p\| \cdot \|\operatorname{div} \mathbf{w}\| = \|p\| \cdot \|r\|. \quad (1.10)$$

Теперь то же самое первое уравнение (1.9) умножим скалярно на произвольную функцию $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1$ и снова проинтегрируем по области. Получаем, что

$$(\nabla \mathbf{w}, \nabla \mathbf{v}) = (p, \operatorname{div} \mathbf{v}).$$

Поделив обе части выражения на $\|\nabla \mathbf{v}\|$ получим:

$$\|\nabla \mathbf{w}\| \geq \frac{(\nabla \mathbf{w}, \nabla \mathbf{v})}{\|\nabla \mathbf{v}\|} = \frac{(p, \operatorname{div} \mathbf{v})}{\|\nabla \mathbf{v}\|}$$

Так как $\mathbf{v}$ выбирается произвольно, то можно применить неравенство Нечаса:

$$\|\nabla \mathbf{w}\| \geq \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1} \frac{(p, \operatorname{div} \mathbf{v})}{\|\nabla \mathbf{v}\|} \geq c_0^{-1} \|p\|.$$

Подставляя это неравенство в (1.10), получаем результат Леммы. Лемма доказана.

Теперь для произвольной $q \in L^2_\nu(\Omega)$, для которой выполняется $(q, \nu^{-\frac{1}{2}}) = 0$ возьмем функцию $\mathbf{w}$, удовлетворяющую соотношениям (1.8), где $r = \nu^{-\frac{1}{2}}q \in L^2_0(\Omega)$. Заметим, что выполняется соотношение

$$\operatorname{div}(\nu^{-\frac{1}{2}}\mathbf{w}) = \nu^{-\frac{1}{2}}\operatorname{div}\mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \nabla \nu^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.11)$$

Также отметим выполнение соотношений $(\nu^{-\frac{1}{2}}\operatorname{div}\mathbf{w}, 1) = (\nu^{-1}q, 1) = 0$ и $(\operatorname{div}(\nu^{-\frac{1}{2}}\mathbf{w}), 1) = (\nu^{-\frac{1}{2}}\mathbf{w}, \nabla 1) = 0$. Вместе с (1.11) это дает $(\mathbf{w} \cdot \nabla \nu^{-\frac{1}{2}}, 1) = 0$. Следовательно, можно определить функцию $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1$ как решение вспомогательной задачи Стокса:

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla \xi &= 0 \quad \text{в } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= \mathbf{w} \cdot \nabla \nu^{-\frac{1}{2}} \quad \text{в } \Omega \\ \mathbf{u} &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (1.12)$$

для решения этой задачи Стокса справедлива априорная оценка [62]

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^s} \leq C \|\mathbf{w} \cdot \nabla \nu^{-\frac{1}{2}}\|_{L^s} \quad \forall s > 1. \quad (1.13)$$

Введем теперь $\mathbf{v}$ как $\mathbf{v} = \nu^{-\frac{1}{2}}\mathbf{w} - \mathbf{u}$. Соотношения (1.8) (напомним, что $r = \nu^{-\frac{1}{2}}q$) и (1.11) дают нам

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \mathbf{v}, q) &= (\operatorname{div}(\nu^{-\frac{1}{2}}\mathbf{w} - \mathbf{u}), q) = (\nu^{-\frac{1}{2}}\operatorname{div}\mathbf{w}, q) + (\mathbf{w} \cdot \nabla \nu^{-\frac{1}{2}}) - \\ &\quad - (\mathbf{w} \cdot \nabla \nu^{-\frac{1}{2}}) = (\operatorname{div}\mathbf{w}, \nu^{-\frac{1}{2}}q) = \|\nu^{-\frac{1}{2}}q\|^2 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Остается оценить $\|\nu^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}\mathbf{v}\|$. Справедливы оценки

$$\|\nu^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}\mathbf{v}\| \leq c\|\nu^{\frac{1}{2}}\nabla \mathbf{v}\| \leq c(\|\nu^{\frac{1}{2}}\nabla(\nu^{-\frac{1}{2}}\mathbf{w})\| + \|\nu^{\frac{1}{2}}\nabla \mathbf{u}\|). \quad (1.15)$$

Рассмотрим сначала двумерный случай. Будем использовать неравенство Гельдера и неравенство $\|\mathbf{w}\|_{L^t} \leq c(t)\|\nabla \mathbf{w}\|$, справедливое в силу

вложения $H^1(\Omega)$ в $L^t(\Omega)$ при $\Omega \in \mathbb{R}^2$, для всех $t \in [1, \infty)$ [13]. Оценим первое слагаемое в (1.15):

$$\begin{aligned} \|\nu^{\frac{1}{2}} \nabla(\nu^{-\frac{1}{2}} \mathbf{w})\| &\leq \|\nabla \mathbf{w}\| + \|\nu^{\frac{1}{2}} \mathbf{w} \cdot \nabla \nu^{-\frac{1}{2}}\| \leq \|\nabla \mathbf{w}\| + \|\nu^{\frac{1}{2}} \nabla \nu^{-\frac{1}{2}}\|_{L^{2l}} \|\mathbf{w}\|_{L^{2p}} \leq \\ &\leq (1 + c(l) \|\nu^{\frac{1}{2}} \nabla \nu^{-\frac{1}{2}}\|_{L^{2l}}) \|\nabla \mathbf{w}\| \quad \forall l > 1, p = \frac{l}{l-1} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Для оценки второго слагаемого в (1.15) снова воспользуемся неравенством Гельдера, теоремой вложения, а также априорной оценкой (1.13):

$$\begin{aligned} \|\nu^{\frac{1}{2}} \nabla \mathbf{u}\| &\leq \|\nu^{\frac{1}{2}}\|_{L^{2l}} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^{2p}} \leq c \|\nu^{\frac{1}{2}}\|_{L^{2l}} \|\mathbf{w} \cdot \nabla \nu^{-\frac{1}{2}}\|_{L^{2p}} \leq \\ &\leq c(s) \|\nu^{\frac{1}{2}}\|_{L^{2l}} \|\nabla \nu^{-\frac{1}{2}}\|_{L^{2p+s}} \|\nabla \mathbf{w}\| \quad \forall l > 1, s > 0, p = \frac{l}{l-1}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Неравенство Гельдера влечет выполнение соотношения $\|\nu^{\frac{1}{2}} \nabla \nu^{-\frac{1}{2}}\|_{L^{2l}} \leq \|\nu^{\frac{1}{2}}\|_{L^k} \|\nabla \nu^{-\frac{1}{2}}\|_{L^{\frac{2kl}{k-2l}}}$ для всех $k > 2l$. Для произвольного s можно подобрать такое l , чтобы $2l/(k-2l) \leq 2k/(k-2) + s$ (это обеспечит выполнение неравенства $\|\nabla \nu^{-\frac{1}{2}}\|_{2k/(k-2)+s} \geq \|\nabla \nu^{-\frac{1}{2}}\|_{2l/(k-2l)}$, бóльшую норму выберем для оценки суммы двух слагаемых в неравенстве (1.15)). Следовательно, из (1.15) - (1.17) и (1.8) с $r = \nu^{-\frac{1}{2}} q$ получаем неравенство

$$\|\nu^{\frac{1}{2}} \mathbf{Dv}\| \leq c(1 + c(s) \|\nu^{\frac{1}{2}}\|_{L^k} \|\nabla \nu^{-\frac{1}{2}}\|_{L^{r-s}}) \|\nu^{-\frac{1}{2}} q\| \quad (1.18)$$

с любыми $k > 2$, $s > 0$ и $r = \frac{2l}{l-2}$. Это неравенство вместе с (1.14) влечет утверждение теоремы в двумерном случае.

Теперь перейдем к трехмерному случаю. В этом случае справедливо вложение $H^1(\Omega)$ в $L^6(\Omega)$, имеем $\|\mathbf{w}\|_{L^6} \leq c \|\nabla \mathbf{w}\|$. Проводя те же рассуждения, что и в неравенствах (1.16)-(1.17), получим

$$\|\nu^{\frac{1}{2}} \nabla(\nu^{-\frac{1}{2}} \mathbf{w})\| \leq (1 + c \|\nu^{\frac{1}{2}} \nabla \nu^{-\frac{1}{2}}\|_{L^3}) \|\nabla \mathbf{w}\|$$

и

$$\|\nu^{\frac{1}{2}} \nabla \mathbf{u}\| \leq c \|\nu^{\frac{1}{2}}\|_{L^{2l}} \|\nabla \nu^{-\frac{1}{2}}\|_{L^{2p}} \|\nabla \mathbf{w}\| \quad \forall l \geq \frac{3}{2}, p = \frac{3l}{2l-3}.$$

Из неравенства Гельдера следует, что выполнено неравенство $\|\nu^{\frac{1}{2}}\nabla\nu^{-\frac{1}{2}}\|_{L^3} \leq \|\nu^{\frac{1}{2}}\|_{L^{3l}}\|\nabla\nu^{-\frac{1}{2}}\|_{L^{3l/(l-1)}}$. Значит, справедливо соотношение

$$\|\nu^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}\mathbf{v}\| \leq c(1 + c\|\nu^{\frac{1}{2}}\|_{L^k}\|\nabla\nu^{-\frac{1}{2}}\|_{L^r})\|\nu^{-\frac{1}{2}}q\|, \quad \forall k > 3, r = \frac{3k}{k-3}$$

которое вместе с (1.14) дает условие теоремы для трехмерного случая. Тем самым, доказательство Теоремы 1 завершено.

Замечание. Рассмотрим два линейных функционала на $L^2(\Omega)$: $f_1(q) = (q, \nu^{-1})$ и $f_2(q) = (q, \nu^{-\frac{1}{2}})$. Теорема 1 утверждает, что обобщенное неравенство Нечаса (1.5) выполняется на подпространстве $H = \ker(f_1) \cap \ker(f_2)$. Если $\nu \neq \text{const}$, то $\dim(H^\perp) = 2$, $\dim(H) = \infty$. Если вязкость постоянна, то оба условия ортогональности совпадают с условием $(q, 1) = 0$, которое требуется для классического неравенства Нечаса (1.4).

Часто имеет смысл (например, если вязкость — не гладкая, а кусочно-гладкая функция) использовать обобщение Теоремы 1 на случай, когда область Ω представляется в виде объединения непересекающихся подобластей Ω_i . Удачный выбор разбиения области может обеспечить справедливость соотношения

$$\sum_i \|\nu^{\frac{1}{2}}\|_{L^k(\Omega_i)}\|\nabla\nu^{-\frac{1}{2}}\|_{L^r(\Omega_i)} \ll \|\nu^{\frac{1}{2}}\|_{L^k(\Omega)}\|\nabla\nu^{-\frac{1}{2}}\|_{L^r(\Omega)}.$$

Теорема 2 (Обобщение Теоремы 1 на случай нескольких подобластей) Пусть $\bar{\Omega} = \cup_{i=1}^N \bar{\Omega}_i$, Ω_i — связные непересекающиеся подобласти с кусочно-гладкой липшицевой границей; функция $\nu > 0$ — кусочно-гладкая на всей области Ω (т.е. гладкая на каждой из подобластей Ω_i). Тогда для любой такой $q \in L^2(\Omega)$, для которой выполняются условия $(q, \nu^{-1})_{L^2(\Omega_i)} = (q, \nu^{-\frac{1}{2}})_{L^2(\Omega_i)} = 0$ будет выполнено неравенство (1.5) с константой $\tilde{c}_\nu = \min_{1 \leq i \leq N} \tilde{c}_\nu(\Omega_i)$, где $\tilde{c}_\nu(\Omega_i)$ — константы, определяемые соотношениями (1.6) или (1.7), вычисленные в областях Ω_i .

Доказательство. В каждой подобласти Ω_i построим функцию $\mathbf{v}_i \in \mathbf{H}_0^1(\Omega_i)$, как это сделано при доказательстве Теореме 1. Тогда в каждой подобласти будут выполнены соотношения

$$(\operatorname{div} \mathbf{v}_i)_{L^2(\Omega_i)} = \|\nu^{-\frac{1}{2}} q\|_{L^2(\Omega_i)}^2, \quad \tilde{c}_\nu(\Omega_i)^{\frac{1}{2}} \|\nu^{\frac{1}{2}} \mathbf{D} \mathbf{v}_i\|_{L^2(\Omega_i)} \leq \|\nu^{-\frac{1}{2}} q\|_{L^2(\Omega_i)}$$

Теперь продолжим $\mathbf{v}_i$ на Ω так, что $\mathbf{v}_i = 0$ везде, кроме Ω_i , и определим $\mathbf{v}$ как $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i$. Получим, что

$$(\operatorname{div} \mathbf{v}) = \|\nu^{-\frac{1}{2}} q\|^2, \quad \min_{1 \leq i \leq N} \tilde{c}_\nu(\Omega_i)^{\frac{1}{2}} \|\nu^{\frac{1}{2}} \mathbf{D} \mathbf{v}\| \leq \|\nu^{-\frac{1}{2}} q\|$$

Тем самым, Теорема 2 доказана.

Заметим, что Теоремы 1 и 2 не являются априорными оценками. Они сформулированы на более узких пространствах, чем пространство, которому может принадлежать давление в задаче (1.1).

Прежде чем перейти к приложению результатов настоящего раздела, необходимо дать постановку дискретной задачи.

1.3. Дискретизация задачи.

Настоящий раздел посвящен построению дискретного приближения уравнений 1.1.

Рассматривается два подхода к дискретизации, а именно — метод конечных элементов и конечных разностей. Для конечноэлементной дискретизации брались элементы isoP2-P1 [41], для конечноразностной — использовалась схема на разнесенных сетках (MAC-схема) [7]. Кратко опишем построение дискретных систем.

При использовании конечноэлементной дискретизации использовалась северо-западная триангуляция (1.1).

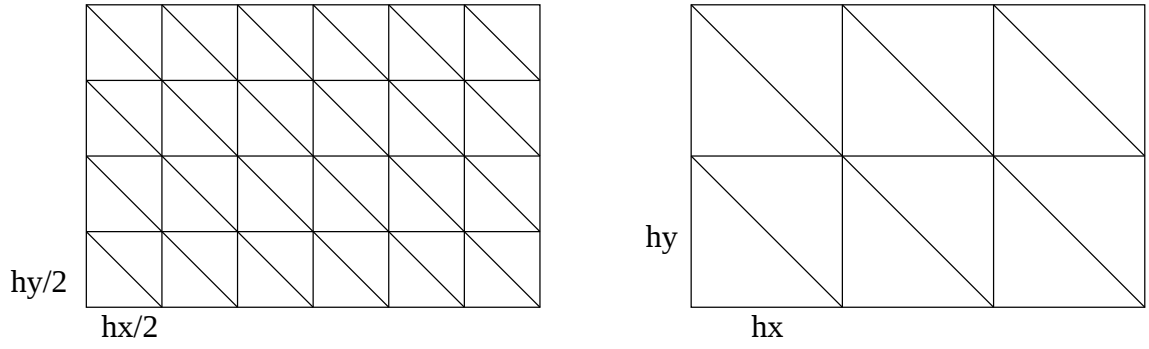


Рис. 1.1. Схематическое изображение расчетных сеток для скорости (слева) и давления (справа) при дискретизации методом конечных элементов.

Давление приближается кусочно–линейной функцией, линейной на каждом треугольнике триангуляции. Скорость также приближается кусочно – линейной функцией, но на вдвое меньших треугольниках. Обозначим конечноэлементные пространства для скорости и давление через $\mathbb{V}_h \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{Q}_h \subset L_\nu^2(\Omega)$ соответственно. Такая пара конечноэлементных пространств удовлетворяет условию LBB. В задаче Стокса давление определяется с точностью до константы. Этому соответствует условие ортогональности $(q_h, \nu^{-1}) = 0$ для всех $q_h \in \mathbb{Q}_h$ в определении конечно-элементного пространства для давления.

При дискретизации методом конечных разностей в двумерном случае для приближения неизвестных скорости, давления и компонент тензора скоростей деформации используются следующие 4 сетки:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{x_{ij} = ((i+1)h_x, (j+0.5)h_y) \mid i = 0, \dots, N_x - 2, j = 0, \dots, N_y - 1\}, \\ \Omega_2 &= \{x_{ij} = ((i+0.5)h_x, (j+1)h_y) \mid i = 0, \dots, N_x - 1, j = 0, \dots, N_y - 2\}, \\ \Omega_3 &= \{x_{ij} = ((i+0.5)h_x, (j+0.5)h_y) \mid i = 0, \dots, N_x - 1, j = 0, \dots, N_y - 1\}, \\ \Omega_4 &= \{x_{ij} = (ih_x, jh_y) \mid i = 0, \dots, N_x, j = 0, \dots, N_y\}.\end{aligned}$$

Схематически сетки изображены на рис. 1.2:

В узлах сеток Ω_1 и Ω_2 приближаются компоненты скорости, градиента давления и векторной дивергенции девиатора тензора напряжений;

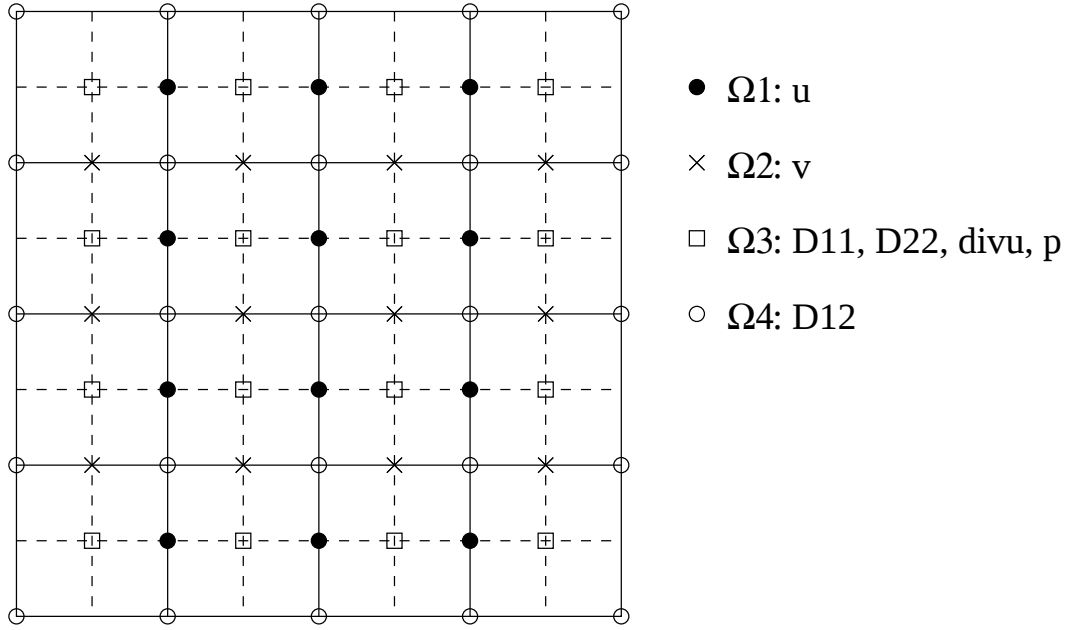


Рис. 1.2. Схематическое изображение расчетных сеток при дискретизации методом конечных разностей с использованием схемы на разнесенных сетках.

в узлах сетки Ω_3 — давление, диагональные компоненты тензора скоростей деформации и дивергенция скорости. В узлах сетки Ω_4 вычисляются внедиагональные компоненты тензора скоростей деформации. Значения вязкости вычисляются там же, где компоненты тензора скоростей деформации, то есть — на сетках Ω_3 и Ω_4 .

При таком определении сеток разностные приближения дифференциальных операторов записываются естественным образом:

$$(\text{div}_h \boldsymbol{\tau}_h)_{i,j} = \left(\frac{\tau_{i+1,j}^{11} - \tau_{i,j}^{11}}{h_x} + \frac{\tau_{i+1,j+1}^{12} - \tau_{i+1,j}^{12}}{h_y}, \right. \\ \left. \frac{\tau_{i+1,j+1}^{21} - \tau_{i,j+1}^{21}}{h_x} + \frac{\tau_{i,j+1}^{22} - \tau_{i,j}^{22}}{h_y} \right); \quad (1.19)$$

$$(D_h^{11} \mathbf{u}_h)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x}, \quad (D_h^{22} \mathbf{u}_h)_{i,j} = \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_y}; \quad (1.20)$$

$$(D_h^{12} \mathbf{u}_h)_{i,j} = (D_h^{21} \mathbf{u}_h)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_y} + \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_x}; \quad (1.21)$$

$$(\operatorname{div}_h \mathbf{u}_h)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x} + \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_y}; \quad (1.22)$$

$$(\nabla_h p_h)_{i,j} = \left(\frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{h_x}, \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{h_y} \right). \quad (1.23)$$

Краевые условия Дирихле $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 = (u_0, v_0)$ на $\partial\Omega$ задаются следующим образом. Рассмотрим только левую границу области, то есть соответствующую условию $x = 0$ (Рис. 1.2), на остальных все делается по аналогии. Узлы сетки Ω_1 расположены на границе, соответственно, на них краевое значение задается явно: $u_{-1,j} = u_0(0, (j+0.5)h_y)$. На сетке Ω_2 краевые условия определяются соотношением $(v_{-1,j} + v_{0,j})/2 = v_0(0, (j+1)h_y)$. Такая формулировка дискретных операторов и краевых условий приводит к аппроксимации задачи (1.1) со вторым порядком точности для скорости и с первым для давления.

Известно [47], что данная разностная схема является устойчивой и может применяться для практических расчетов течений несжимаемых жидкостей.

Оба подхода к дискретизации задачи, как метод конечных элементов, так и метод конечных разностей, приводят к решению системы линейных алгебраических уравнений с седловой точкой. Матрица имеет блочную структуру, оба метода дискретизации приводят к матрицам одного типа. Подробно матричная постановка задачи обсуждается в следующем разделе.

1.4. Матричная постановка дискретной задачи.

Данный раздел посвящен формулировке дискретной задачи в терминах матриц.

Метод конечных элементов для решения (1.2) заключается в нахож-

дении таких $\mathbf{u}_h \in \mathbb{V}_h$ и $p_h \in \mathbb{Q}_h$, что для любых $\mathbf{v}_h \in \mathbb{V}_h$ и $q_h \in \mathbb{Q}_h$ будет выполнено соотношение

$$(\nu \mathbf{D} \mathbf{u}_h, \mathbf{D} \mathbf{v}_h) - (p_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) - (q_h, \operatorname{div} \mathbf{u}_h) = (\mathbf{f}_h, \mathbf{v}_h) + (g_h, q_h).$$

Обозначим через $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq n}$ и $\{\psi_j\}_{1 \leq j \leq m}$ базисы в пространствах $\mathbb{V}_h$ и $\mathbb{Q}_h$, соответственно. Определим $A = \{A_{i,j}\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B = \{B_{i,j}\} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ и $M = \{M_{i,j}\} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ как

$$A_{i,j} = (\nu \mathbf{D} \phi_j, \mathbf{D} \phi_i), \quad B_{i,j} = (-\operatorname{div} \phi_j, \psi_i), \quad M_{i,j} = (\psi_i, \psi_j).$$

С помощью этих обозначений, дискретизированная система уравнений (1.2) запишется в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

Обозначим

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

Замечание. Если дискретизировать непосредственно систему (1.2), то $g = 0$. При анализе методов решения СЛАУ будем, однако, полагать, что $g \neq 0$, но выполнено условие $(g, 1) = 0$, необходимое для совместности системы. Такая правая часть возникает в СЛАУ на каждой нелинейной итерации метода Пикара при решении задачи (1.1). Если проводить дискретизацию (1.2) методом конечных разностей, то матрица получается схожей по структуре. В качестве блоков A и B будут выступать матрицы, соответствующие операторам $\operatorname{div}_h \nu \mathbf{D}_h$ и ∇_h , из (1.19)–(1.23). Вместо u и p будут не коэффициенты разложения по конечноэлементным базисам, а значения скорости и давления на сетках Ω_1 , Ω_2 и Ω_3 .

Подматрица A — симметричная и положительно определенная, однако матрица $\mathcal{A}$ целиком симметрична, но знаконеопределена. Решение системы (1.2) является наиболее трудоемкой операцией при решении нелинейной задачи, поэтому желательно использовать наиболее эффективный метод. Линейные задачи вида (1.24) принято называть задачами с седловой точкой [15]. Выбор метода решения таких СЛАУ не является тривиальным.

1.5. Итерационный метод решения СЛАУ.

Настоящий раздел посвящен построению итерационного метода для решения дискретной задачи Стокса, основанного на применении переобуславливателя для дополнения по Шуру, учитывающего структуру переменной вязкости. Обсуждается вопрос эффективности такого переобуславливателя в зависимости от отношения максимального значения вязкости к минимальному.

Идея решения системы (1.24) заключается в использовании какого-либо метода на подпространствах Крылова (например, MINRES [36]) со специальным переобуславливателем. Естественно, что построение переобуславливателя ведется с использованием специальной блочной структуры матрицы $\mathcal{A}$. Так, типичным выбором переобуславливателя является [35]

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \hat{A} & 0 \\ 0 & \hat{S} \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

где $\hat{A}$ — переобуславливатель для блока A , а $\hat{S}$ — переобуславливатель для дополнения по Шуру относительно давления $S = BA^{-1}B^T$. Для вычислений нет необходимости знать явный вид матриц $\hat{A}^{-1}$ и $\hat{S}^{-1}$, до-

статочно задать процедуру умножения этих матриц на вектора. Так, например, хорошим переобуславливателем для блока A является приближенное решение линейной системы с матрицей A и заданным вектором в правой части при помощи фиксированного числа циклов геометрического многосеточного метода [11]. Выбор переобуславливателя для дополнения по Шуру является менее очевидным. В случае задачи Стокса (случай $\nu = \text{const}$) стандартным переобуславливателем для дополнения по Шуру является матрица масс. Как будет показано дальше, использование матрицы масс (или ее диагональной части), в случае переменной вязкости дает плохие результаты, число обусловленности $\hat{S}^{-1}S$ зависит от отношения максимальной вязкости к минимальной. В некоторых приложениях отношение максимальной вязкости к минимальной может быть очень большим. В данной работе предлагается переобуславливатель для дополнения по Шуру, учитывающий переменную вязкость, и дается оценка его эффективности.

Отметим также, что можно брать не блочно-диагональный переобуславливатель, а блочно-треугольный вида

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} \hat{A} & 0 \\ B & -\hat{S} \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

В этом случае необходимо использовать итерационный метод, допускающий несимметричный переобуславливатель, например GMRES [59]. В Главе 3 приводятся результаты вычислений с переобуславливателем вида (1.27) из которых видно, что его эффективность достаточно высока. Однако, известные результаты о сходимости методов на подпространствах Крылова для несимметричных матриц недостаточны для доказательства содержательных оценок сходимости в случае использования переобуславливателя вида $\mathcal{P}_1$ из (1.27).

Далее приведем оценку эффективности использования матрицы масс в роли переобуславливателя для дополнения по Шуру, а также построим переобуславливатель, учитывающий переменную вязкость. Скобками $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначается евклидово скалярное произведение, запись $A \geq B$, примененная к матрицам, означает, что разность $A - B$ неотрицательно определена. Символами $\nu_{\min}$ и $\nu_{\max}$ будем обозначать минимум и максимум значений вязкости на всей области. Также будем обозначать через $\mathbf{v}$ и q компоненты разложения по конечноэлементным базисам векторов $\mathbf{v}_h$ и q_h , соответственно.

Отметим также, что, вообще говоря, оператор S имеет ядро, соответствующее постоянному давлению. Поэтому далее мы будем рассматривать S как оператор на $m - 1$ -мерном пространстве, которое может быть описано как множество всех $q \in \mathbb{R}^m$, таких, что соответствующая конечноэлементная функция q_h принадлежит пространству $\mathbb{Q}_h$.

Когда вязкость постоянна, то хорошие результаты дает применение матрицы масс M в качестве переобуславливателя для дополнения по Шуру. Лемма 2 показывает, что этот подход при переменной вязкости приводит к росту числа обусловленности пропорционально отношению максимального значения вязкости к минимальному.

Лемма 2 *Если выполняется условие LBB , то есть для константы $c_{0,h}$ из (1.3) выполнено $c_{0,h} \geq c^* > 0$, где c^* не зависит от h , то справедливы неравенства*

$$c^{*2} \nu_{\max}^{-1} M \leq S \leq \nu_{\min}^{-1} M \quad \text{на пространстве } \mathbb{Q}_h.$$

Доказательство. Легко убедиться в справедливости тождеств

$$\begin{aligned}\langle Sq, q \rangle &= \langle A^{-1}B^T q, B^T q \rangle = \|A^{-1}B^T q\|_A^2 = \sup_{v \in \mathbb{R}^n} \frac{\langle A^{-1}B^T q, v \rangle_A^2}{\|v\|_A^2} = \\ &= \sup_{v \in \mathbb{R}^n} \frac{\langle B^T q, v \rangle^2}{\langle Av, v \rangle} = \sup_{v \in \mathbb{R}^n} \frac{\langle q, Bv \rangle^2}{\langle Av, v \rangle} = \sup_{v \in \mathbb{R}^n} \frac{(q_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h)^2}{\|\nu^{\frac{1}{2}} \mathbf{D} \mathbf{v}_h\|^2}\end{aligned}$$

$$\langle Mq, q \rangle = \|q_h\|^2$$

С помощью соотношений $-\operatorname{rot}^2 + \nabla \operatorname{div} = \Delta = 2\operatorname{div} \mathbf{D} - \nabla \operatorname{div}$ и интегрирования по частям получаем тождества

$$\|\operatorname{rot} \mathbf{v}\|^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|^2 = \|\nabla \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{D} \mathbf{v}\|^2 - \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega). \quad (1.28)$$

Действительно, применив операторы к произвольной функции $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, умножив результат на $\mathbf{v}$, проинтегрировав по Ω и применив формулы интегрирования по частям, получаем (1.28). Следовательно,

$$\|\operatorname{div} \mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{D} \mathbf{v}\|^2 \leq \|\nabla \mathbf{v}\|^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \quad (1.29)$$

Используя (1.29), неравенство Коши и вложение $\mathbb{V}_h \subset \mathbf{H}_0^1$, получим соотношения

$$\|\nu^{\frac{1}{2}} \mathbf{D} \mathbf{v}_h\|^2 \leq \nu_{\max} \|\mathbf{D} \mathbf{v}_h\|^2 \leq \nu_{\max} \|\nabla \mathbf{v}_h\|^2 \quad (1.30)$$

и

$$(q_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) \leq \|q_h\| \|\operatorname{div} \mathbf{v}_h\| \leq \|q_h\| \|\mathbf{D} \mathbf{v}_h\| \leq \nu_{\min}^{-\frac{1}{2}} \|q_h\| \|\nu^{\frac{1}{2}} \mathbf{D} \mathbf{v}_h\| \quad (1.31)$$

Из (1.30) и (1.31) немедленно вытекает формулировка теоремы:

$$c^{*2} \nu_{\max}^{-1} \langle Mq, q \rangle \leq \langle Sq, q \rangle \leq \nu_{\min}^{-1} \langle Mq, q \rangle$$

Таким образом, Лемма 2 доказана.

Следствие. Из Леммы 2 вытекает, что

$$\text{cond}(\hat{S}^{-1}S) \leq \frac{1}{c^{*2}} \frac{\nu_{\max}}{\nu_{\min}}, \quad \text{если } \hat{S} = M.$$

Замечание. Матрица M^{-1} может быть, вообще говоря, не разреженной, поэтому часто используют $\hat{M} = \text{diag}(M)$ вместо M . Если триангуляция удовлетворяет условию ограниченности минимального угла треугольника, то тогда $\hat{M}$ и M — спектрально эквивалентны с константами, не зависящими от шага сетки [66]. При больших отношениях $\frac{\nu_{\max}}{\nu_{\min}}$ (а во многих приложениях это отношение как раз большое) оба переобуславливателя неэффективны.

В данной работе предлагается переобуславливатель для дополнения по Шуру, учитывающий переменную вязкость и, как показывают теоретические оценки и численные эксперименты, являющийся более эффективным.

Определение 1 Определим переобуславливатель $M_\nu = \{(M_\nu)_{i,j}\} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ как модифицированную матрицу масс

$$\{M_\nu\}_{i,j} := (\nu^{-1}\psi_j, \psi_i)$$

в случае дискретизации методом конечных элементов и

$$M_\nu = \text{diag}\{\nu^{-1}(x_{i,j})\},$$

если дискретизация проводится методом конечных разностей; $x_{i,j}$ — узлы сетки Ω_3 .

Обсудим теперь эффективность переобуславливателя M_ν . Нас интересуют константы c_ν и C_ν в соотношении

$$c_\nu M_\nu \leq S \leq C_\nu M_\nu \quad \text{на пространстве } \mathbb{Q}_h. \quad (1.32)$$

Из Леммы 2 можно получить оценку на c_ν , которая сформулирована в виде следующей леммы.

Лемма 3

$$c_\nu \geq c^{*2} \frac{\nu_{\min}}{\nu_{\max}},$$

c^* — константа из условия LBB (1.3).

Доказательство. Распишем подробно $\langle M_\nu q, q \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle M_\nu q, q \rangle &= \sum_{i=1}^m q_i \sum_{j=1}^m q_j (M_\nu)_{i,j} = \sum_{i=1}^m q_i \sum_{j=1}^m q_j \int_{\Omega} \nu^{-1} \psi_i \psi_j d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \nu^{-1} \sum_{i=1}^m q_i \psi_i \sum_{j=1}^m q_j \psi_j d\Omega = \left\| \nu^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^m q_i \psi_i \right\|^2 = \left\| \nu^{-\frac{1}{2}} q_h \right\|^2 \leq \\ &\leq \max \nu^{-1} \|q_h\|^2 = \nu_{\min}^{-1} \langle M q, q \rangle \quad (1.33) \end{aligned}$$

Следовательно,

$$c^{*2} \frac{\nu_{\min}}{\nu_{\max}} \langle M_\nu q, q \rangle \leq \langle S q, q \rangle.$$

Оценку константы C_ν дает Теорема 3.

Теорема 3 Пусть $\nu \in L^\infty(\Omega)$ и $\Omega \in \mathbb{R}^d$. Тогда $C_\nu = d$.

Доказательство. Напрямую можно проверить, что для любой $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ выполняется $\|\nu^{\frac{1}{2}} \operatorname{div} \mathbf{v}\| \leq \sqrt{d} \|\nu^{\frac{1}{2}} \mathbf{D} \mathbf{v}\|$. Из этого неравенства и неравенства Коши сразу получаем

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbb{V}_h} \frac{(q_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h)^2}{\|\nu^{\frac{1}{2}} \mathbf{D} \mathbf{v}_h\|^2} \leq \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbb{V}_h} \frac{\|\nu^{-\frac{1}{2}} q_h\|^2 \|\nu^{\frac{1}{2}} \operatorname{div} \mathbf{v}_h\|^2}{\|\nu^{\frac{1}{2}} \mathbf{D} \mathbf{v}_h\|^2} \leq d \|\nu^{-\frac{1}{2}} q_h\|^2 = d \langle M_\nu q_h, q_h \rangle$$

Теорема доказана.

В оценка на c_ν , даваемая Леммой 3, не является оптимальной. Заметно лучшую оценку можно получить, предположив справедливость

дискретного аналога Теорем, 1 и 2, сформулированных в виде Предположения 1 и следствия из него.

Предположение 1 *Предположим, что выполнен дискретный аналог Теоремы 1, а именно справедливо следующее.*

Пусть рассматриваемая расчетная область — многоугольник и $\{\tau_h\}$ — семейство регулярных (то есть таких, где треугольники могут либо иметь общее ребро, либо общую вершину, либо не пересекаться вовсе) триангуляций. При этом $\bar{\Omega} = \cup_{K \in \tau_h} \bar{K}$. Пусть также для каждой триангуляции τ_h определены пространства $\mathbb{V}_h$ и $\mathbb{Q}_h$ и для пары пространств $\mathbb{V}_h$ и $\mathbb{Q}_h$ выполнено LBB -условие (1.3). Предположим, что для всех $q_h \in \mathbb{Q}_h \subset L^2_\nu(\Omega)$, для которых также выполнено условие ортогональности $(q_h, \nu^{-\frac{1}{2}}) = 0$, справедливо неравенство

$$\tilde{c}_{\nu,h} \|\nu^{-\frac{1}{2}} q_h\| \leq \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbb{V}_h} \frac{(q_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h)}{\|\nu^{\frac{1}{2}} \mathbf{D} \mathbf{v}_h\|} \quad (1.34)$$

с некоторой константой $\tilde{c}_{\nu,h}$, которая выражается в двумерном случае как

$$\tilde{c}_{\nu,h} = \tilde{c}_{0,h} (1 + c(k, r) \|\nu^{\frac{1}{2}}\|_{L^k} \|\nabla \nu^{-\frac{1}{2}}\|_{L^r})^{-1} \quad (1.35)$$

с произвольными $k > 2$ и $r > \frac{2k}{k-2}$, константой $c(k, r)$, зависящей от оптимальных констант неравенств вложения $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ в $L^t(\Omega)$ с $t = t(k, r)$ и константой $\tilde{c}_{0,h}$, зависящей от константы c^ в неравенстве LBB и не зависящей от h . Предположим, что в трехмерном случае константа $\tilde{c}_\nu$ записывается как*

$$\tilde{c}_{\nu,h} = \tilde{c}_{0,h} (1 + c \|\nu^{\frac{1}{2}}\|_{L^k} \|\nabla \nu^{-\frac{1}{2}}\|_{L^r})^{-1} \quad (1.36)$$

с произвольными $k > 3$ и $r = \frac{3k}{k-3}$ и константой $\tilde{c}_{0,h}$, зависящей от константы в неравенстве LBB и не зависящей от h .

Замечание. Хотя Предположение 1 не является строго доказанным, оно представляется разумным в силу существования аналогии со случаем постоянной вязкости, где неравенство LVB (1.3) можно рассматривать как дискретный аналог неравенства Нечаса (1.4). Численные эксперименты, приведенные в третьей главе, также подтверждают состоятельность Предположения 1.

Если Предположение 1 справедливо, то можно сформулировать дискретный аналог Теоремы 2 для случая, когда расчетная область представлена в виде объединения подобластей.

Теорема 4 (Дискретный аналог Теоремы 2) Пусть расчетная область Ω представлена в виде объединения связанных подобластей Ω_i , то есть $\bar{\Omega} = \cup_{i=1}^N \bar{\Omega}_i$. Пусть также границы подобластей проходят только по ребрам треугольников. Тогда неравенство (1.34) будет выполняться для всех функций $q_h \in \mathbb{Q}_h$, для которых справедливы соотношения $(q_h, \nu^{-1})_{L^2(\Omega_i)} = (q_h, \nu^{-\frac{1}{2}})_{L^2(\Omega_i)} = 0$, с константой $\tilde{c}_{\nu,h} = \min_{1 \leq i \leq N} \tilde{c}_{\nu,h}(\Omega_i)$, где $\tilde{c}_{\nu,h}(\Omega_i)$ — константа, вычисленная на i -й подобласти.

Доказательство. Доказательство полностью совпадает с доказательством Теоремы 2.

Если справедливо Предположение 1 и, как следствие, Теорема 4, то можно сформулировать Теорему 5. Хотя формально она и не дает оценку константы c_ν из неравенства (1.32) (это связано с тем, что на функции q_h накладываются дополнительные условия ортогональности), но из нее в следующем разделе будет получена оценка на собственные значения переобусловленного дополнения по Шуру. Из-за дополнительных условий ортогональности на q_h эта оценка не обязательно выполняется для

нескольких наименьших собственных значений, для остальных собственных значений она оказывается намного лучше, чем следует из Леммы 3.

Теорема 5 Пусть функция $q_h \in \mathbb{Q}_h \subset L^2_\nu(\Omega)$ удовлетворяет условиям ортогональности $(q_h, \nu^{-1})_{L^2(\Omega_i)} = (q_h, \nu^{-\frac{1}{2}})_{L^2(\Omega_i)} = 0$ на каждой подобласти. Если справедливо Предположение 1, то выполняется соотношение $\tilde{c}_{\nu,h}^2 \langle M_\nu q, q \rangle \leq \langle Sq, q \rangle$, где $\tilde{c}_{\nu,h}$ — константа из Теоремы 4.

Доказательство. Справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \langle Sq, q \rangle &= \langle A^{-1} B^T q, B^T q \rangle = \|A^{-1} B^T q\|_A^2 = \sup_{v \in \mathbb{R}^n} \frac{\langle A^{-1} B^T q, v \rangle_A^2}{\|v\|_A^2} \\ &= \sup_{v \in \mathbb{R}^n} \frac{\langle B^T q, v \rangle}{\langle Av, v \rangle} = \sup_{v \in \mathbb{R}^n} \frac{\langle q, Bv \rangle}{\langle Av, v \rangle} = \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbb{V}_h} \frac{(q_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h)^2}{\|\nu^{\frac{1}{2}} \mathbf{D} \mathbf{v}_h\|^2}, \end{aligned}$$

а и из (1.33) имеем

$$\langle M_\nu q, q \rangle = \|\nu^{-\frac{1}{2}} q_h\|^2.$$

Отсюда немедленно получаем неравенство

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{\nu,h}^2 \langle M_\nu q, q \rangle &\leq \langle Sq, q \rangle \quad \forall q \in \mathbb{R}^m : \quad q_h \in \mathbb{Q}_h \subset L^2_\nu(\Omega); \\ &\quad (q_h, \nu^{-1})_{L^2(\Omega_i)} = (q_h, \nu^{-\frac{1}{2}})_{L^2(\Omega_i)} = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Применение Теоремы 5 рассматривается в следующем разделе.

1.6. Оценка собственных значений и сходимость итерационных методов.

В последнем разделе первой главы получены оценки собственных значений для переобусловленного дополнения по Шуру (если допустить

справедливость Предположения 1). Исследуется скорость сходимости метода Узавы-сопряженных градиентов и влияние малых собственных значений переобусловленного дополнения по Шуру, не подпадающих под оценку. Рассмотрим следующую задачу на собственные значения:

$$Sq = \lambda M_\nu q.$$

Собственные значения вещественны и для них справедливо представление Куранта-Фишера [14]:

$$\lambda_k = \max_{\mathcal{K} \in \mathcal{V}_{k-1}} \min_{q \in \mathcal{K}^\perp} \frac{\langle Sq, q \rangle}{\langle M_\nu q, q \rangle}, \quad (1.37)$$

где символом $\mathcal{V}_{k-1}$ обозначены все $(k-1)$ -мерные подпространства $\mathbb{R}^m$.

Допустим, что Предположение 1 и, следовательно, Теорема 4 верны. Тогда для всех функций $q_h \in \mathbb{Q}_h \subset L_\nu^2(\Omega)$ таких, что $(q_h, \nu^{-1})_{L^2(\Omega_i)} = (q_h, \nu^{-\frac{1}{2}})_{L^2(\Omega_i)} = 0$, выполняется неравенство

$$\tilde{c}_{\nu,h}^2 \|\nu^{-\frac{1}{2}} q_h\|^2 \leq \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbb{V}_h} \frac{(q_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h)^2}{\|\nu^{\frac{1}{2}} \mathbf{D} \mathbf{v}_h\|^2}. \quad (1.38)$$

Выбирая в качестве $\mathcal{K}^\perp$ в (1.37) $(m - 2N)$ -мерное подпространство векторов коэффициентов конечноэлементных функций давления q_h , удовлетворяющих условиям ортогональности $(q_h, \nu^{-1})_{L^2(\Omega_i)} = (q_h, \nu^{-\frac{1}{2}})_{L^2(\Omega_i)} = 0$ общим числом $2N$, немедленно получаем оценку на собственные значения $M_\nu^{-1}S$:

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \cdots \leq \lambda_m \leq d \quad \text{и} \quad \tilde{c}_{\nu,h}^2 \leq \lambda_{2N+1}. \quad (1.39)$$

Оценка на второе собственное значение матрицы $M_\nu^{-1}S$ следует из Леммы 3: $\lambda_2 \geq c^{*2} \frac{\nu_{\min}}{\nu_{\max}}$.

То, что матрица S имеет одно нулевое собственное значение, не делает систему несовместной, т.к. правая часть ортогональна $\ker(S^*) =$

$\ker(S) = 1$. Символом 1 здесь обозначен вектор единичных коэффициентов. Более того, если начальное приближение $\{u^0, p^0\}$ удовлетворяет условию $p^0 \perp M_\nu 1$, то и все дальнейшие приближения давления в процессе итераций метода на подпространствах Крылова также будут принадлежать подпространству $(M_\nu 1)^\perp$ [52], нулевое собственное значение на сходимость не повлияет. Скорость сходимости итерационных методов на подпространствах Крылова, тем не менее, зависит от распределения остальных собственных значений матрицы линейной системы.

Рассмотрим метод Узавы – сопряженных градиентов [34]. Предположим, что мы умеем точно вычислять $A^{-1}v$ для произвольного вектора $v \in \mathbb{R}^n$. Система уравнений для нахождения давления имеет вид:

$$Sp = BA^{-1}f - g. \quad (1.40)$$

Метод Узавы-сопряженных градиентов состоит в применении переобусловленного метода сопряженных градиентов для приближенного решения СЛАУ (1.40). После нахождения давления p , неизвестное поле скоростей u находится из решения системы $Au = f - B^T p$.

Для ошибки $e^k = p - p^k$ метода сопряженных градиентов для (1.40) с переобуславливателем M_ν справедлива оценка [14] (здесь и далее предполагаем, что $p^0 \perp \hat{S}1$):

$$\|e^k\|_S \leq \min_{P_k \in \mathcal{P}_k} \left\{ \max_{\lambda \in \text{sp}(\hat{M}_\nu^{-1}S)/\lambda_1} |P_k(\lambda)| \right\} \|e^0\|_S,$$

где $\|a\|_S = \langle Sa, a \rangle^{\frac{1}{2}}$. Через $\mathcal{P}_k$ обозначено множество всех многочленов степени k , таких, что $P_k(0) = 1$. Нам надо оценить, какое влияние на сходимость оказывают $2N - 1$ (не считая $\lambda_1 = 0$) малых собственных значений. Для этого рассмотрим многочлен

$$\psi(\lambda) = (1 - \lambda_2^{-1}\lambda) \cdots (1 - \lambda_{2N}^{-1}\lambda)$$

Очевидно, что при $k > 2N$ для всех $Q(x) \in \mathcal{P}_{k-2N+1}$ выполняется неравенство

$$\min_{P_k \in \mathcal{P}_k} \left\{ \max_{\lambda \in \text{sp}(M_\nu^{-1}S)/\lambda_1} |P_k(\lambda)| \right\} \leq \max_{\lambda \in \text{sp}_c(M_\nu^{-1}S)} |\psi(\lambda)| |Q(\lambda)|, \quad (1.41)$$

где $\text{sp}_c(M_\nu^{-1}S)$ — кластеризованный спектр $M_\nu^{-1}S$, т.е. собственные значения $\lambda_{2N+1} \dots \lambda_m$. В качестве $Q(x)$ выберем многочлен Чебышева степени $k - 2N + 1$ на отрезке $[\tilde{c}_{\nu,h}^2, d]$, где $\tilde{c}_{\nu,h}$ — константа из Теоремы 5. Тогда в силу (1.39) оценка (1.41) примет вид

$$\min_{P_k \in \mathcal{P}_k} \left\{ \max_{\lambda \in \text{sp}(M_\nu^{-1}S)/\lambda_1} |P_k(\lambda)| \right\} \leq 2 \left(\frac{1 - \sqrt{\tilde{c}_{\nu,h}^2/d}}{1 + \sqrt{\tilde{c}_{\nu,h}^2/d}} \right)^{k-2N+1} \max_{\lambda \in \text{sp}_c(M_\nu^{-1}S)} |\psi(\lambda)|.$$

Заметим, что $\max_{\lambda \in \text{sp}_c(M_\nu^{-1}S)} |\psi(\lambda)|$ можно оценить сверху через $(\lambda_m \lambda_2^{-1})^{k-2N+1}$. Это значит, что выполнены соотношения

$$\|e^k\|_S \leq 2 \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_2} \right)^{2N-1} \left(\frac{1 - \sqrt{\tilde{c}_{\nu,h}^2/d}}{1 + \sqrt{\tilde{c}_{\nu,h}^2/d}} \right)^{k-2N+1} \|e^0\|_S.$$

Подставив оценки на λ_2 и λ_m из Леммы 3 и Теоремы 3, соответственно, получаем, что доказана следующая теорема.

Теорема 6 *Пусть система с матрицей A решается точно. Тогда погрешность на k -й итерации метода Узава-сопряженных градиентов решения задачи (1.24) при использовании переобуславливателя M_ν может быть записана как*

$$\|e^k\|_S \leq c \left(\frac{d}{c^{*2}} \frac{\nu_{\max}}{\nu_{\min}} \right)^{2N-1} \left(\frac{1 - \sqrt{\tilde{c}_{\nu,h}^2/d}}{1 + \sqrt{\tilde{c}_{\nu,h}^2/d}} \right)^{k-2N+1} \|e^0\|_S,$$

где c^* — константа из LBB -условия (1.3).

Теперь можно оценить количество дополнительных итераций, вызванных малыми собственными значениями. Если бы *все* собственные значения были кластеризованы, то скорость сходимости метода сопряженных градиентов была бы

$$\rho = \left(\frac{1 - \sqrt{\tilde{c}_{\nu,h}^2/d}}{1 + \sqrt{\tilde{c}_{\nu,h}^2/d}} \right). \quad (1.42)$$

Разумно считать, что влияние малых собственных значений устранено, если число итераций r настолько велико, что выполняется соотношение $\|e^{r+k}\|_S \leq \rho^k \|e^0\|_S$. Это равносильно выполнению неравенства

$$\left(\frac{d}{c^{*2}} \frac{\nu_{\max}}{\nu_{\min}} \right)^{2N-1} \rho^{r-2N+1} < 1.$$

Выражая из этого неравенства r , получаем, что

$$r > \frac{\log 2}{\log \rho^{-1}} + (2N - 1) \left(\frac{\log(\frac{d}{c^{*2}} \frac{\nu_{\max}}{\nu_{\min}})}{\log \rho^{-1}} + 1 \right). \quad (1.43)$$

Таким образом, если значения N и $\log(\frac{d}{c^{*2}} \frac{\nu_{\max}}{\nu_{\min}})$ невелики, то скорость сходимости существенным образом определяется границами кластера собственных значений.

Сделаем замечание о том, на сколько проведенные выше рассуждения остаются в силе, если вместо метода Узавы-сопряженных градиентов применяются блочные переобуславливатели $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}_1$, определенные в разделе 1.5. Блочные переобуславливатели являются более практичным выбором, так как допускают замену точного решения системы с матрицей A на каждой итерации на применение подходящего переобуславливателя $\hat{A}^{-1}$. Для получения оценок сходимости в этом случае важен ответ на вопрос о наследовании спектром матрицы $\mathcal{P}A$ или $\mathcal{P}_1A$ свойств кластеризации собственных значений матрицы $M_\nu^{-1}S$ (при условии спектральной эквивалентности $\hat{A}$ и A). К сожалению, на сегодняшний момент

полный ответ можно дать только в случае блочно-диагонального переобуславливателя $\mathcal{P}$ и при условии $\hat{A} = A$. Действительно, в этом случае собственными числами переобусловленной матрицы $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}$ являются 0, 1 и $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda_i^2})$, см. [36]. Теперь наличие $2N$ малых собственных значений λ влечет существование $2N$ отрицательных и малых по модулю собственных значений матрицы $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}$. Остальные $n + m - 2N$ собственных значений $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}$ остаются кластеризованными на положительной и отрицательных полуосях. Следовательно, аналогичные выводы можно сделать о сходимости метода MINRES для решения системы с матрицей $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}$. В случае отказа от условия $\hat{A} = A$ вопрос о сохранении структуры спектра переобусловленной матрицы остается, насколько известно диссертанту, на сегодняшний день открытым. Хорошо известно [35], что блочно-треугольный переобуславливатель $\mathcal{P}_1$ сохранит структуру спектра, в том смысле, что собственные значения переобусловленной матрицы будут состоять из собственных значений матриц $\hat{A}^{-1}A$ и $M_\nu^{-1}S$. Однако применить оценку сходимости для метода GMRES на основе имеющейся информации о спектре мы не можем, так как точно не известно, является ли матрица $\mathcal{P}_1^{-1}\mathcal{A}$ диагонализуемой.

Основные результаты первой главы можно сформулировать следующим образом:

1. Сформулировано и доказано обобщение неравенства Нечаса на случай переменной вязкости. Обобщение сформулировано также в случае, когда область представлена в виде объединения непересекающихся подобластей. Этот случай важен, поскольку, при удачном выборе разбиения области, константа в обобщенном неравенстве Нечаса может быть значительно улучшена ценой нескольких дополнительных условий ортогональности.

2. Предложен переобуславливатель для дополнения по Шуру, учитывающий структуру переменной вязкости. Когда вязкость постоянна, то предлагаемый переобуславливатель M_ν совпадает с масштабированной матрицей масс, которая является хорошим выбором. Если вязкость переменна, то предлагаемый переобуславливатель оказывается намного более эффективным и приводит к скорости сходимости, практически не зависящей от отношения максимального значения вязкости к минимальному.
3. Из обобщенного неравенства Нечаса и соотношений Куранта – Фишера в непрерывном случае получена оценка на собственные значения переобусловленного дополнения по Шуру. Под эту оценку попадают собственные значения, начиная с $2N + 1$ -го, где N — число подобластей, на которые разбита расчетная область. Несмотря на то, что оценки получены в непрерывном случае, из численных экспериментов следует, что дискретный аналог, скорее всего, состоятелен. Также в работе получена оценка числа дополнительных итераций метода Узавы-сопряженных градиентов, вызванных не более чем $2N$ малыми собственными значениями.

Приложение теоретических результатов к конкретным модельным задачам рассматривается в следующей главе.

Глава 2

Задача Бингама и задача мантийной конвекции.

В этой главе рассматривается приложение результатов первой главы к двум задачам механики сплошной среды — задаче Бингама и задаче моделирования конвекции в мантии. Для задачи Бингама дается описание регуляризации и нелинейных итераций, а также приводится оценка эффективности предложенного в первой главе итерационного метода. В задаче мантийной конвекции исследуется эффективность решения линейаризованной задачи с использованием переобуславливателя M_ν для дополнения по Шуру.

2.1. Постановка задачи Бингама.

Среда Бингама [20], [4] является классической моделью вязкопластичной среды. Качественное поведение среды вкратце можно описать следующим образом: при отсутствии механических напряжений или при не превышающих некоторого предельного значения напряжениях среда ведет себя как твердое тело. Такие области называются жесткими зонами. При превышении напряжением порогового значения среда проявляет свойства жидкости, такие области называются жидкими зонами. Соответственно, в области Ω могут присутствовать оба типа поведения среды одновременно.

Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{в } \Omega \\ -\operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \quad \text{в } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 \quad \text{на } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.1}$$

зависимость тензора скоростей деформации $\mathbf{Du}$ и девиатора тензора напряжений $\boldsymbol{\tau}$ задается соотношениями

$$\begin{aligned} \tau^{ij} &= 2\mu D^{ij} \mathbf{u} + \tau_s \frac{D^{ij} \mathbf{u}}{|\mathbf{Du}|}, \quad \text{если } |\mathbf{Du}| > 0, \\ |\boldsymbol{\tau}| &\leq \tau_s, \quad \text{если } |\mathbf{Du}| = 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где τ_s — предел пластичности. При этом в жестких зонах эффективную вязкость можно формально считать бесконечной.

Заметим, что уравнения (2.2) обратимы (см., например, [5]) если модуль девиатора тензора напряжений в некоторой точке пространства превышает пороговое значение τ_s . В этом случае $|\mathbf{Du}| > 0$ и среда ведет себя как жидкость, иначе $|\mathbf{Du}| = 0$ и эта точка находится в так называемой жесткой зоне. Особенность модели заключается в том, что она не дает никакой информации о напряжениях в жесткой зоне, известно лишь только то, что там $|\boldsymbol{\tau}|$ не превышает предел пластичности. Уравнения (2.1) выполняются только в жидкой зоне. Основная трудность численного решения задачи Бингама заключается в том, что граница жестких зон заранее не известна и, соответственно, нахождение границы раздела между жесткими и жидкими зонами является частью задачи.

Можно ввести понятие *эффективная вязкость*, которая в жидкой зоне будет записываться как

$$\nu = 2\mu + \frac{\tau_s}{|\mathbf{Du}|},$$

в жесткой зоне эффективную вязкость *формально* можно считать бесконечной.

Формулировка (2.1)–(2.2) является механической формулировкой задачи Бингама. Математически строго задача может быть поставлена при помощи вариационных неравенств. Для нулевых краевых условий Дирихле такая постановка приведена в [3] и заключается в следующем: сначала определим функционал

$$j(\mathbf{v}) = \sqrt{2} \int_{\Omega} |\mathbf{D}\mathbf{v}| d\mathbf{x}$$

и билинейную форму

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 2 \int_{\Omega} D^{ij} \mathbf{v} D^{ij} \mathbf{w} d\mathbf{x}.$$

Решение вариационной задачи состоит в нахождении такой функции $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1$, удовлетворяющей условию $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, для которой выполняется соотношение

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + \frac{\tau_s}{\sqrt{2}} j(\mathbf{v}) - \frac{\tau_s}{\sqrt{2}} j(\mathbf{u}) \geq \int_{\Omega} f(\mathbf{v} - \mathbf{u}) d\mathbf{x} \quad (2.3)$$

при любых $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1$ таких, что $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Задача о свободной границе автоматически включена в вариационную постановку.

В настоящей работе рассматривается решение задачи Бингама при помощи регуляризации, подробно описанной в следующем разделе.

2.2. Регуляризованная задача Бингама

На практике есть несколько подходов к численному решению задачи Бингама. В данной работе применяется регуляризация — подход, заключающийся в следующем: вводится малый параметр ε и на всей области

Ω среда рассматривается как жидкая, при этом в жестких зонах эффективная вязкость ν_ε вместо бесконечной считается большой, но конечной. При этом $\nu_\varepsilon \rightarrow \nu$ почти всюду при $\varepsilon \rightarrow 0$. Таким образом, чем меньше параметр ε , тем больше максимальное значение вязкости. Границы жестких зон при этом подходе определяются после решения системы (2.1), например, из анализа величины второго инварианта тензора скоростей деформации $|\mathbf{Du}|$.

Такой подход имеет ряд недостатков, среди которых надо отметить отсутствие результатов о сходимости границ жестких зон, плохую обусловленность СЛАУ при малых ε и необходимость определения границ жестких зон. Тем не менее, данный подход получил весьма широкое распространение (см., например, [25], [31], [64]) , в частности, благодаря простоте реализации в рамках уже существующих программных пакетов.

Имеется несколько вариантов введения регуляризованной эффективной вязкости. В данной работе рассматриваются регуляризации Берковьера–Энгельмана [19] и Папанастасио [53].

$$\begin{aligned}\nu_\varepsilon(|\mathbf{Du}|) &= 2\mu + \frac{\tau_s}{\sqrt{|\mathbf{Du}|^2 + \varepsilon^2}} && \text{— Берковьер–Энгельман;} \\ \nu_\varepsilon(|\mathbf{Du}|) &= 2\mu + \tau_s \frac{1 - \exp(-\frac{|\mathbf{Du}|}{\varepsilon})}{|\mathbf{Du}|} && \text{— Папанастасио.}\end{aligned}$$

Известна оценка погрешности регуляризованного решения [39] для регуляризации Берковьера–Энгельмана :

$$\|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\varepsilon)\| \leq c\sqrt{\varepsilon}, \quad (2.4)$$

где $\mathbf{u}$ — поле скоростей, полученное в результате решения вариационного неравенства (2.3), $\mathbf{u}_\varepsilon$ — скорость, полученная в результате решения регуляризованной задачи. Отметим, что неизвестно, является ли оценка

(2.4) оптимальной по ε .

Способы решения полученной регуляризованной задачи обсуждаются в следующем разделе.

2.3. Нелинейный итерационный метод для задачи Бингама.

В случае, когда вязкость зависит от скорости или давления, система уравнений (2.1) нелинейна. Ее можно записать в более абстрактном виде

$$F(\mathbf{u}, p) \circ \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix},$$

где символом $F(\mathbf{u}, p)$ обозначен блочный оператор

$$F(\mathbf{a}, \xi) = \begin{pmatrix} -\operatorname{div} \nu(|\mathbf{D}\mathbf{a}|, \xi) \mathbf{D} & \nabla \\ -\operatorname{div} & 0 \end{pmatrix}.$$

При фиксированных $\mathbf{a}$ и ξ оператор $F(\mathbf{a}, \xi)$ линеен. Так же, как и в первой главе, рассматриваем краевые условия Дирихле

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_b \quad \text{на} \quad \partial\Omega.$$

Нелинейную задачу будем решать методом Пикара:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^n \\ p^n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{n-1} \\ p^{n-1} \end{pmatrix} - \tilde{F}(\mathbf{u}^{n-1}, p^{n-1})^{-1} \circ \\ &\circ \left[F(\mathbf{u}^{n-1}, p^{n-1}) \circ \begin{pmatrix} \mathbf{u}^{n-1} \\ p^{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $\tilde{F}(\mathbf{u}^{n-1}, p^{n-1})^{-1}$ - приближенное решение линейной задачи

$$F(\mathbf{u}^{n-1}, p^{n-1}) \circ \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} res_{\mathbf{u}}^{n-1} \\ res_p^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{с условием} \quad \mathbf{v} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega,$$

символами $res_{\mathbf{u}}^{n-1}$ и res_p^{n-1} обозначены невязки скоростей и давления на предыдущей итерации метода Пикара (2.5).

Замечание 1. Привлекательной альтернативой методу Пикара служит метод Ньютона. В этом случае (рассматриваем регуляризацию Берковьера–Энгельмана и считаем, что вязкость не зависит от давления) вместо оператора $F(\mathbf{a}, \xi)$ на каждой нелинейной итерации приближенно обращается оператор

$$F'(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} -\operatorname{div} \left(2\mu + \frac{\tau_s}{\sqrt{\varepsilon^2 + |\mathbf{Da}|^2}} \left[1 - \frac{\mathbf{Da}\mathbf{Da}^\top}{\varepsilon^2 + |\mathbf{Da}|^2} \right] \right) \mathbf{D} & \nabla \\ -\operatorname{div} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

здесь через $A : B$ для квадратных матриц A и B обозначена их свертка, $\operatorname{tr}(AB)$. Метод Ньютона имеет квадратичную сходимость, однако его использование связано с некоторыми трудностями. Во-первых, область сходимости метода уменьшается при $\varepsilon \rightarrow 0$. Действительно, норма матрицы вторых производных растет как $O(\varepsilon^{-1})$ [29], накладывая теоретическое ограничение на выбор начального приближения из $O(\varepsilon)$ -окрестности неизвестного решения. Одна из возможностей использования метода Ньютона в данной ситуации – это найти достаточно хорошее начальное приближение, например, тем же самым методом Пикара [40]. Во-вторых, обусловленность блока $(1, 1)$ в операторе F' (2.6) оказывается существенно хуже, чем в методе Пикара, что также затрудняет решение линейной системы.

Замечание 2. Существуют и другие подходы к решению регуляризованной задачи Бингама. Например, в [8] рассматривается решение задачи Бингама при помощи трехпараметрического итерационного метода. Подбор оптимального набора параметров является отдельной нетривиальной задачей. Важным свойством предлагаемого в настоя-

щей диссертации метода является отсутствие параметров, требующих тонкой настройки.

В нелинейных итерациях наиболее трудоемкой частью является решение линейной задачи. Эффективность метода решения СЛАУ, предлагаемого в первой главе, обсуждается далее.

2.4. Применение оценок на собственные значения к задаче течения среды Бингама в канале.

Течение в канале является хорошей модельной задачей для исследования методов решения задачи Бингама, так как известно [5] аналитическое решение (здесь и далее полагаем $\mu = 1$):

$$u = \begin{cases} \frac{1}{8}(1 - 2\tau_s)^2, & \text{если } \frac{1}{2} - \tau_s \leq y \leq \frac{1}{2} + \tau_s, \\ \frac{1}{8} [(1 - 2\tau_s)^2 - (1 - 2\tau_s - 2y)^2], & \text{если } 0 \leq y < \frac{1}{2} - \tau_s, \\ \frac{1}{8} [(1 - 2\tau_s)^2 - (2y - 2\tau_s - 1)^2], & \text{если } 1 \geq y > \frac{1}{2} + \tau_s, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$v = w = 0,$$

$$p = -x.$$

Область $\frac{1}{2} - \tau_s \leq y \leq \frac{1}{2} + \tau_s$ занимает жесткая зона, среда движется с постоянной скоростью. Очевидно, что если $\tau_s \geq 0.5$, то вся область становится жесткой зоной и течение, таким образом, запирается. На Рис. 2.1 изображено значение компонент скорости u в зависимости от координаты y при постоянном $x = \frac{1}{2}$, полученных в результате численных экспериментов при различных значениях параметра регуляризации ε , в сравнении с аналитическим решением. Профиль скорости, задаваемый

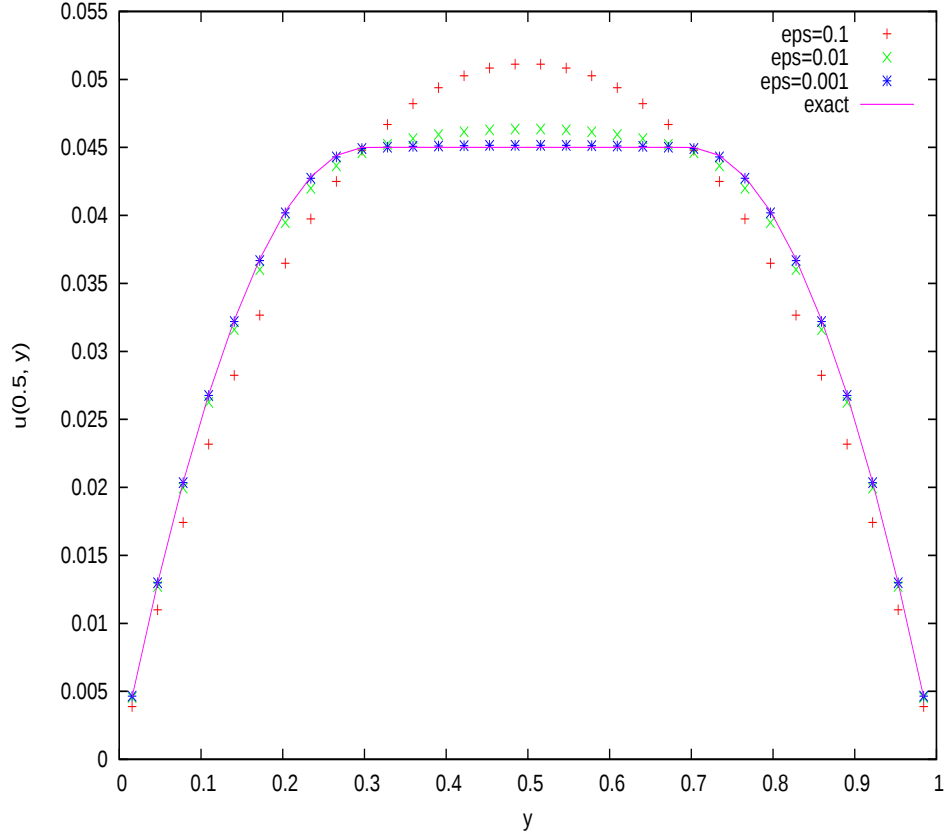


Рис. 2.1. Приближение профиля скорости регуляризованной моделью Берковьера–Энгельмана при разных значениях параметра регуляризации ε .

аналитическим решением (2.7), изображен сплошной линией. Значение предела пластичности τ_s бралось равным 0.2.

Зная аналитическое решение, можно явно найти тензор скоростей деформации и, как следствие, точно вычислить регуляризованную вязкость на всей области. Если известна функция вязкости, то несложно оценить эффективность переобуславливателя для дополнения по Шуру, предлагаемого в первой главе.

К данной модельной задаче можно применить Теорему 4 и оценить, таким образом, эффективность предлагаемого в первой главе итерационного метода. Разбиение Ω на подобласти проведем естественным образом: обозначим жесткую зону $\frac{1}{2} - \tau_s \leq y < \frac{1}{2} + \tau_s$ через Ω_1 , а зоны текучести

$0 \leq y < \frac{1}{2} - \tau_s$ и $\frac{1}{2} + \tau_s \leq y \leq 1$ через Ω_2 и Ω_3 , соответственно. Требуется получить оценку снизу на $\tilde{c}_{\nu,h} = \min_{i=1\dots 3} \tilde{c}_{\nu,h}(\Omega_i)$. В двумерном случае $\tilde{c}_{\nu,h}(\Omega_i)$ вычисляются по формуле (1.35):

$$\tilde{c}_{\nu,h}(\Omega_i) = \tilde{c}_{0,h}(1 + c(k, r) \|\nu_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|_{L^k(\Omega_i)} \|\nabla \nu_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|_{L^r(\Omega_i)})^{-1}$$

с произвольными $k > 2$ и $r > \frac{2k}{k-2}$. Рассмотрим сначала регуляризацию Берковьера–Энгельмана. Напомним, что в этом случае регуляризованная эффективная вязкость имеет вид

$$\nu_\varepsilon = 2\mu + \frac{\tau_s}{\sqrt{|\mathbf{Du}|^2 + \varepsilon^2}}.$$

В жесткой зоне Ω_1 вязкость постоянная, значит $\nabla \nu_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} = 0$. Соответственно, константа $\tilde{c}_{\nu,h}(\Omega_1)$ может быть оценена как $O(1)$. В подобластях Ω_2 и Ω_3 требуется получить оценку сверху на нормы $\|\nabla \nu_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|_\infty$ и $\|\nu_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|_{L^k(\Omega_2)}$. В подобласти Ω_2 тензор скоростей деформации зависит только от пространственной переменной y и

$$|\mathbf{Du}| = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - 2\tau_s - 2y).$$

Норму $\|\nabla \nu_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\|_\infty$ нетрудно оценить как $O(1)$. Для оценки $\|\nu_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|_{L^k(\Omega_2)}$ введем функцию $\hat{\nu}_\varepsilon$, которая является мажорантой для эффективной вязкости ν_ε :

$$\nu_\varepsilon \leq \hat{\nu}_\varepsilon = 2\mu + \tau_s \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{1-2\tau_s-2y}, & \text{если } y \leq 0.5 - \tau_s - \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon \\ \varepsilon^{-1}, & \text{если } y \geq 0.5 - \tau_s - \frac{\sqrt{2}}{2}\varepsilon. \end{cases} \quad (2.8)$$

Непосредственно вычислив $\|\hat{\nu}_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|_{L^k}$ можно оценить $\|\nu_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|_{L^k}$ сверху как $O(\varepsilon^{\frac{2-k}{2k}})$ для любого $k > 2$. В подобласти Ω_3 все вычисляется аналогично подобласти Ω_2 в силу симметрии. Обозначим величину $\frac{k-2}{2k}$ через s . Тогда из оценок на нормы $\|\nabla \nu^{-\frac{1}{2}}\|_\infty$ и $\|\nu^{\frac{1}{2}}\|_{L^k(\Omega_2)}$ получим, что $\tilde{c}_{\nu,h}^2(\Omega_2) \geq c\varepsilon^s$

для любого $s \in (0, 1]$, а значит и $\tilde{c}_{\nu,h}^2 \geq c\varepsilon^s$, где константа s может зависеть от ε . Если справедлива Теорема 4, то по формуле (1.39) получаем оценку на собственные значения матрицы $M_\nu^{-1}S$: для любого $s \in (0, 1]$ существует такая положительная константа c_2 , не зависящая от ε , что

$$c_1\varepsilon < \lambda_2, \quad c_2\varepsilon^s \leq \lambda_7 \leq \dots \leq \lambda_m \leq d = 2. \quad (2.9)$$

Оценка $c_1\varepsilon < \lambda_2$ вытекает из Леммы 3 и того факта, что для задачи о течении среды Бингама в канале справедливо соотношение $\frac{\nu_{\min}}{\nu_{\max}} = O(\varepsilon)$.

Отметим также, что эти рассуждения остаются в силе, если берется регуляризация Папанастасио. Функция $\hat{\nu}_\varepsilon$ (2.8) остается мажорантой для регуляризованной вязкости и в этом случае. Значит, оценка (2.9) остается в силе.

Используя формулу (2.9), можно получить оценку для скорости сходимости метода Узавы-сопряженных градиентов [34]. Этот результат сформулирован в виде Теоремы 7.

Теорема 7 *Асимптотическая скорость сходимости метода Узавы-сопряженных градиентов может быть оценена величиной*

$$\rho = \frac{1 - \sqrt{c_2\varepsilon^s/d}}{1 + \sqrt{c_2\varepsilon^s/d}} \quad \forall s \in (0, 1],$$

где константа c_2 не зависит от ε . Для ошибки метода справедлива оценка

$$\|p^k - p\|_S \leq 2 \left(\frac{d}{c_1} \varepsilon^{-1} \right)^{2N-1} \rho^k \|p^0 - p\|_S,$$

константы c_1 и c_2 — те же самые, что в цепочке неравенств (2.9)

Доказательство. Утверждение теоремы сразу вытекает из формул (1.42), (1.43) и (2.9).

Замечание. Из формулы (1.43) следует, что число дополнительных итераций, вызванных малыми собственными значениями, будет не более

$$r = \frac{\log 2}{\log(\rho^{-1})} + 6 \left(\frac{\log(\frac{d}{c_1} \varepsilon^{-1})}{\log(\rho^{-1})} + 1 \right), \quad d = 2.$$

Таким образом, в данном разделе получена оценка эффективности метода решения СЛАУ, предложенного в первой главе. Оценка получена для задачи течения в канале, так как в этом случае известно аналитическое решение. В следующем разделе рассматривается эффективность метода в задаче мантийной конвекции.

2.5. Применение оценок на собственные значения к задаче мантийной конвекции.

В данном разделе описано применение результатов Главы 1 к задаче конвекции в земной мантии. Рассматриваются уравнения вида (2.1), однако теперь вязкость не зависит от тензора скоростей деформаций, а зависит от температуры среды. В качестве модельной мы рассматриваем задачу о всплытии раскаленного пузыря в мантии Земли. Данная задача предложена в [24] для тестирования численных методов решения задачи Стокса с переменной вязкостью. Данный пример характеризуется следующей зависимостью вязкости от температуры и набором параметров:

$$\nu = e^{-\alpha T}, \quad T(x, y) = e^{-\beta((x-0,5)^2 + (y-0,2)^2)}, \quad (2.10)$$

где через $T(x, y)$ обозначено поле температур на области $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, а α и β — параметры среды. В настоящей диссертации рассматриваются только линеаризованные уравнения из [24]. Далее, в численных экспе-

риментах α и β выбирались такими же, как в [24]. Считая, что распределение температуры задано (на самом деле, оно находится из системы нелинейных уравнений, однако в настоящей работе этот вопрос оставим за скобками), рассматриваемая задача линейна. На Рис. 2.2 и 2.3 изображены температура и вязкость в единичном квадрате при $\alpha = 7.5$ и $\beta = 200$, вычисленные из соотношений 2.10.

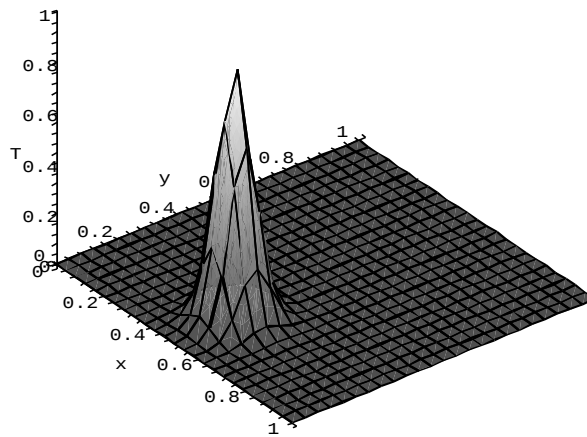


Рис. 2.2. Распределение температуры в задаче моделирования конвекции магмы при $\alpha = 7.5$ и $\beta = 200$.

К данной задаче можно применить дискретный аналог Теоремы 2 и получить оценку эффективности переобуславливателя M_ν в случае вязкости, задаваемой соотношениями (2.10).

Оценки норм удобно проводить в полярной системе координат с центром $(x = 0, 5; y = 0, 2)$, тогда температура и вязкость будут зависеть только от расстояния до центра. Область Ω расширим до области Ω' — окружности с центром $(x = 0, 5; y = 0, 2)$, полностью охватывающей область Ω . Поскольку на Ω нас интересуют оценки норм сверху, а нормы

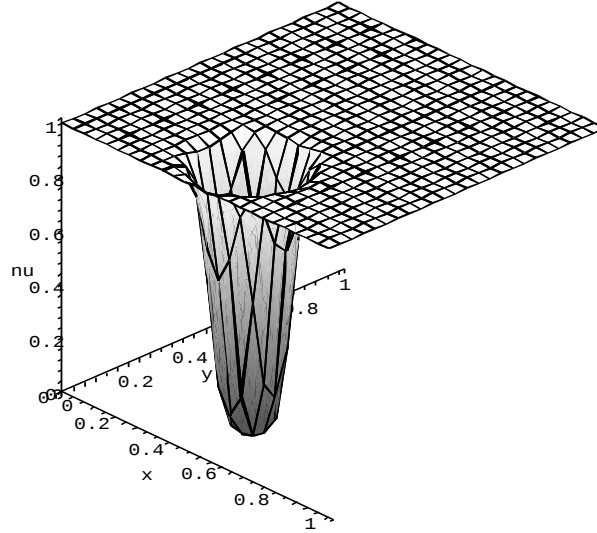


Рис. 2.3. Коэффициент вязкости в задаче моделирования конвекции магмы при $\alpha = 7.5$ и $\beta = 200$.

на Ω' не меньше, то такое расширение вполне допустимо.

Представим Ω' в виде объединения непересекающихся подобластей Ω'_1 и Ω'_2 , определим Ω'_1 как круг радиуса r с центром $(x = 0, 5; y = 0, 2)$, а Ω'_2 — как кольцо, дополняющее Ω'_1 до Ω' . На каждой из двух подобластей можно вычислить $\tilde{c}_{\nu,h}(\Omega_i)$, полагая константы в формуле (1.35) равными 1. Радиус r круга Ω'_1 заранее неизвестен и подбирается для каждой пары α и β экспериментально из условия $\tilde{c}_{\nu,h}(\Omega_1) = \tilde{c}_{\nu,h}(\Omega_2)$. Очевидно, что такое условие выбора r обеспечивает наилучшую оценку $\tilde{c}_{\nu,h}$ на всей области Ω' . Такой подход позволяет оценить влияние параметров α и β , а значит и отношения максимального значения вязкости к минимальному, на эффективность переобуславливателя для дополнения по Шуру M_ν .

В Таб. 2.1 приводятся вычисленные значения минимальной вязкости (максимальная в силу (2.10) не больше 1), $\tilde{c}_{\nu,h}$, и оптимальный радиус Ω'_1 для различных значений параметров α и β . Сравнение Таб. 2.1 с

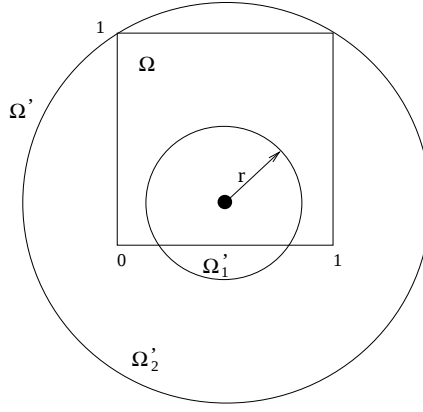


Рис. 2.4. Разбиение на подобласти при вычислении $\tilde{c}_{\nu,h}$.

численными экспериментами в Главе 3 показывает, что на практике преобуславливатель M_ν дает лучшие результаты, чем гарантируют вычисленные значения $\tilde{c}_{\nu,h}$. Данное наблюдение дает основание предположить, что оценка константы $\tilde{c}_{\nu,h}$ из Теоремы 4 не является оптимальной. Тем не менее, теоретическая оценка дает улучшение на несколько порядков.

α	β	ν_{min}	$\tilde{c}_{\nu,h}^2$	r
0	0	1	1	0
3	200	4.98e-2	9.89e-2	0.105
7,2	20	5.53e-4	9.77e-3	0.255
7,2	200	5.53e-4	4.68e-3	0.09
7,2	2000	5.53e-4	2.18e-3	0.032
12	200	6.14e-6	3.06e-4	0.082
15	200	3.06e-7	5.06e-5	0.079

Таблица 2.1. Минимальное значение вязкости, оценка $\tilde{c}_\nu^2$ и радиус круга Ω_1' при разных значениях параметров α и β .

Результаты второй главы можно вкратце сформулировать следующим образом:

1. Дана постановка задачи Бингама и приведен метод ее решения,

использующий регуляризацию.

2. Для задачи течения среды Бингама в канале получена оценка собственных значений переобусловленного матрицей M_ν дополнения по Шуру S и оценка скорости сходимости метода Узавы-сопряженных градиентов. Данные оценки обладают заметно более слабой зависимостью от параметра регуляризации ε по сравнению с использованием стандартного переобуславливателя M .
3. Для линейной задачи мантийной конвекции исследована эффективность переобуславливателя M_ν для дополнения по Шуру S . Хотя оценки, полученные для данной задачи, судя по всему, не являются оптимальными, они, тем не менее, свидетельствуют в пользу заметно большей эффективности переобуславливателя M_ν в сравнении с M .

Глава 3

Численные эксперименты.

В данной главе приводятся результаты численных экспериментов на примере ряда модельных задач. Численные эксперименты проводились при помощи программ, написанных на языке Си на персональных ЭВМ. Программа для решения задачи методом конечных разностей написана с использованием свободной библиотеки решения разреженных систем PETSc; код для конечноэлементных вычислений написан М.А. Ольшанским.

Целью численных экспериментов является:

- изучение эффективности линейных итераций в зависимости от параметра регуляризации ε , предела пластичности τ_s и шага регуляризации h
- проверка и сравнение эффективности линейных итераций в зависимости от выбора регуляризации, переобуславливателя для дополнения по Шуру S и переобуславливателя для матрицы A
- получение численных оценок на собственные значения линеаризованных задач и, как следствие, численная верификация теоретических оценок на собственные значения (1.39).

Достоверность численных экспериментов подтверждается как сходимостью численных решений к известному аналитическому решению, так и сравнением с известными результатами.

Рассматриваются следующие модельные задачи: течение среды Бингама в канале, течение среды Бингама в каверне и всплытие раскаленно-

го пузыря в мантии Земли.

3.1. Течение среды Бингама в канале.

В первом разделе приведены результаты расчетов для течения в среде Бингама в канале. На границах втекания и вытекания и на стенках канала задавались краевые условия Дирихле, соответствующие аналитическому решению (2.7). Вычисления велись от начального приближения, полученного в результате решения задачи Стокса с теми же краевыми условиями и с вязкостью, равной 1.

Для начала рассмотрим результаты численного решения задачи на собственные значения переобусловленного дополнения по Шуру. В Таб. 3.1 указаны собственные значения переобусловленного дополнения по Шуру при использовании переобуславливателей M и M_ν . Расчеты методом конечных разностей велись на сетке с шагом $h = 1/32$, расчеты методом конечных элементов — на сетке с шагом $h = 1/16$. Значение предела пластичности бралось равным 0.3. Использовалась регуляризация Берковьера – Энгельмана, значения ε брались от 10^{-1} до 10^{-5} . На Рис. 3.1 и Рис. 3.2 изображены все собственные значения матриц $M^{-1}S$ и $M_\nu^{-1}S$, вычисленные при $h = 1/32$, $\tau_s = 0.3$ и с параметрами регуляризации $\varepsilon = 10^{-3}$ и $\varepsilon = 10^{-5}$, соответственно.

ε	$\lambda_2(M^{-1}S)$	$\lambda_{\max}(M^{-1}S)$	$\lambda_2(M_\nu^{-1}S)$	$\lambda_3(M_\nu^{-1}S)$	$\lambda_{\max}(M_\nu^{-1}S)$
	MAC				
0.1	3.258e-1	0.284	3.428e-1	3.465e-1	1.042
0.01	7.982e-2	0.265	1.129e-1	1.129e-1	1.460
1e-3	8.705e-3	0.264	2.969e-2	3.457e-2	1.873
1e-4	8.783e-4	0.264	3.240e-3	2.526e-2	1.983
1e-5	8.791e-5	0.264	3.271e-4	2.427e-2	1.998
	isoP2-P1				
0.1	3.027e-2	0.233	1.116e-1	1.160e-1	1.010
0.01	1.385e-2	0.189	1.101e-1	1.109e-1	1.362
1e-3	1.470e-3	0.185	6.164e-2	6.208e-2	1.707
1e-4	1.480e-4	0.185	7.543e-3	4.456e-2	1.687
1e-5	1.481e-5	0.184	7.725e-4	4.260e-2	1.494

Таблица 3.1. Течение в канале: собственные значения матриц $M^{-1}S$ и $M_\nu^{-1}S : h = \frac{1}{32}$ при использовании МКР, $h = \frac{1}{16}$ при использовании МКЭ; $\tau_s = 0.3$.

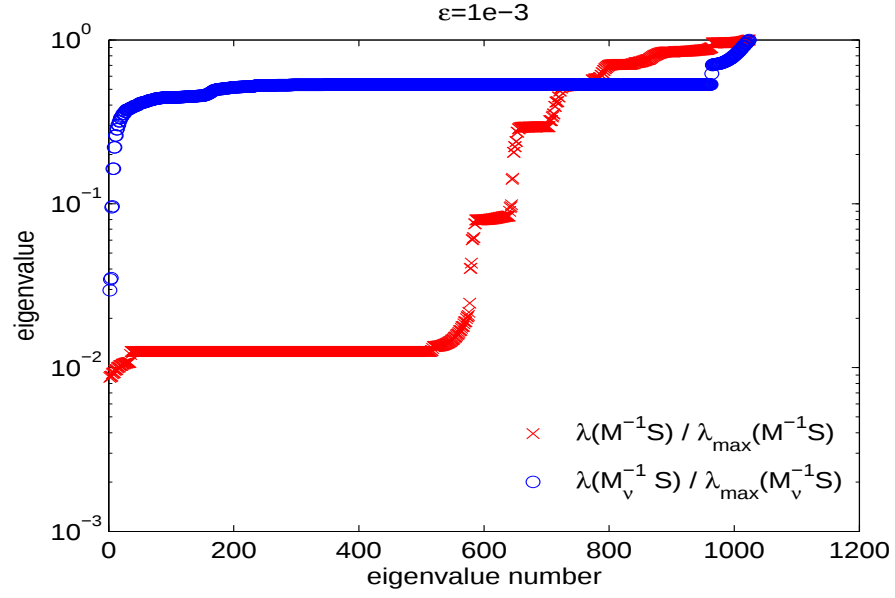


Рис. 3.1. Течение в канале: все собственные значения переобусловленного дополнения по Шуру при $\varepsilon = 10^{-3}$, $h = \frac{1}{32}$ и $\tau_s = 0.3$.

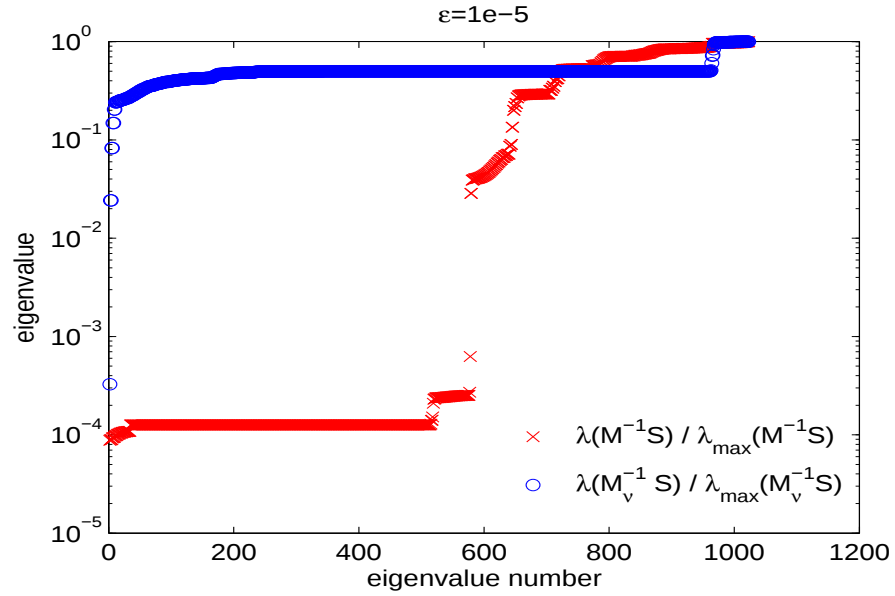


Рис. 3.2. Течение в канале: все собственные значения переобусловленного дополнения по Шуру при $\varepsilon = 10^{-5}$, $h = \frac{1}{32}$ и $\tau_s = 0.3$.

Хотя минимальные ненулевые собственные значения в обоих случаях имеют величину порядка $O(\varepsilon)$, но собственные значения матрицы $M_\nu^{-1}S$, начиная с 3-го, имеют порядок $O(1)$. В то же время $\lambda_k(M^{-1}S) = O(\varepsilon)$ для достаточно большого k . Эти результаты оказываются несколько лучше, чем предсказывает теоретическая оценка (1.39): она гарантирует, что только собственные значения, начиная с седьмого, ограничены снизу величиной $c(s)\varepsilon^s$ для всех $s > 0$. Заметим, что вычислить собственные значения переобусловленного дополнения по Шуру с шагом сетки мельче, чем $h = 1/32$ трудно, так как для явного вычисления дополнения по Шуру требуется точно обращать матрицу A . Однако проведенные численные эксперименты дают основание полагать, что зависимость λ_3 от шага сетки h практически отсутствует.

Вообще говоря, матрица масс (и, соответственно, матрица M_ν) не диагональна. Это означает, что обратная матрица может не быть разреженной, что делает ее применение как переобуславливатель проблематичным. На практике, если расчетная сетка изотропна, то можно использовать диагональное приближение $\widehat{M}_\nu$ матрицы M_ν . В Таб. 3.2 приведены минимальные и максимальные собственные значения матрицы $\widehat{M}_\nu^{-1}M_\nu$, вычисленной при шаге сетки $h = 1/16$ и различных значениях параметра регуляризации ε . Из таблицы видно, что отношение $\lambda_{\max}$ к $\lambda_{\min}$ невелико и практически не зависит от параметра регуляризации ε . Это означает, что в практических расчетах методом конечных элементов имеет смысл использовать в качестве переобуславливателя диагональное приближение $\widehat{M}_\nu$ матрицы M_ν . При других шагах сетки константы спектральной эквивалентности оставались практически такими же.

Как уже упоминалось во второй главе, в задаче течения среды Бингама в канале известно аналитическое решение (2.7). Значит, можно про-

ε	0.1	0.01	1e-3	1e-4	1e-5
$\lambda_1(\widehat{M}_\nu^{-1}M_\nu)$	0.500	0.499	0.498	0.498	0.497
$\lambda_{\max}(\widehat{M}_\nu^{-1}M_\nu)$	2.000	2.002	2.004	2.004	2.005

Таблица 3.2. Течение в канале: минимальное и максимальное собственные значения матрицы $\widehat{M}_\nu^{-1}M_\nu$ при использовании МКЭ с шагом сетки $h = \frac{1}{16}$ и значением предела пластичности $\tau_s = 0.3$.

вести анализ сходимости численного решения к аналитическому. Ниже приведены результаты, полученные при помощи метода конечных разностей на сетке с шагом $h = 1/32$. Линейная система, соответствующая блоку A матрицы $\mathcal{A}$, переобуславливалась при помощи полной факторизации. Использование полной факторизации гарантирует отсутствие влияния на число линейных итераций в зависимости от шага сетки h и параметра регуляризации ε . Однако, арифметическая сложность при использовании полной факторизации растет настолько, что проводить расчеты на сетках с $h < 1/32$ становится затруднительно. Линейная система с матрицей $\mathcal{A}$ решалась при помощи метода MINRES, критерий остановки — уменьшение невязки в 10^5 раз. Нелинейные итерации Пикара останавливались при достижении нормой невязки значения 10^{-4} . Опыт показал, что усиление критерия остановки нелинейных итераций практически не оказывает влияния на точность приближенного решения. Ошибки скорости и давления считались по формулам

$$err_u = \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|}{\|\mathbf{u}\|}, \quad err_p = \frac{\|p - p_h\|_{l^2(\Omega_f)}}{\|1\|}, \quad (3.1)$$

где Ω_f — зона текучести. Нормы считались естественным образом: $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|_{l^2} = \sqrt{\sum_{\Omega_1} u_{i,j}^2 + \sum_{\Omega_2} v_{i,j}^2}$, $\|p\| = \|p\|_{l^2} = \sqrt{\sum_{\Omega_3} p_{i,j}^2}$. Результаты рас-

четов с пределом текучести $\tau_s = 0.3$ приведены в Таб. 3.3 (под числом линейных итераций понимается усредненное число за одну нелинейную). Использовалась регуляризация Берковьера–Энгельмана.

	ε				
	0.1	0.01	1e-3	1e-4	1e-5
err_u	1.38e-1	3.77e-2	5.73e-3	1.53e-3	1.34e-3
err_p	3.79e-1	1.33e-1	4.48e-2	2.30e-2	2.03e-2
Итер. Пикара	10	24	51	61	81
Лин. итер. $\hat{S} = M$	13.8	27.0	56.7	92.3	147
Лин. итер. $\hat{S} = M_\nu$	13.7	19.8	25.8	26.5	25.9

Таблица 3.3. Течение в канале: погрешность решения и количество итераций при $\tau_s = 0.3$, $h = \frac{1}{32}$; критерий остановки линейного метода — падение невязки в 10^5 раз.

Хорошо заметна разница в эффективности переобуславливателей M и M_ν : в случае матрицы масс наблюдается сильный рост среднего числа линейных итераций при уменьшении регуляризационного параметра ε , в то время как при использовании M_ν рост незначителен. Это хорошо соответствует оценкам на собственные значения и оценкам сходимости из раздела 1.6.

В Таб. 3.4—3.7 приводятся результаты расчетов, где блок A переобуславливался при помощи одного V-цикла геометрического многосеточного метода. Делалось по 4 сглаживающие итерации с помощью неполного разложения Холеского, на грубой сетке система решалась точно. В качестве метода решения полной системы (1.25) с матрицей A выбран метод GMRES, т.к. он позволяет применить блочно-треугольный переобуславливатель типа $\mathcal{P}_1$ (использовался переобуславливатель $\mathcal{P}_1^T$, примененный справа) (1.27) и, соответственно, дает возможность провести сравнение

переобуславливателя $\mathcal{P}_1$ с блочно–диагональным переобуславливателем $\mathcal{P}$ (1.26). Критерием остановки служило уменьшение нормы невязки в 10^2 раз. Замена полной факторизации на многосеточный метод при переобуславливании блока A приводит к незначительному росту числа линейных итераций в зависимости от параметра регуляризации ε . Зависимость числа линейных итераций от шага сетки практически отсутствует, что хорошо согласуется с теорией многосеточных методов. Основным достоинством многосеточного метода по сравнению с полной факторизацией является малая вычислительная сложность, что позволяет вести расчеты на гораздо более мелких сетках.

τ_s	h	$\varepsilon = 10^{-1}$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-5}$
0.1	$\frac{1}{32}$	6(10.3)	14(14.1)	41(16.4)	94(22.0)	127(26.4)
	$\frac{1}{64}$	6(10.3)	14(14.4)	43(17.6)	104(21.7)	164(36.3)
	$\frac{1}{128}$	6(11.0)	15(14.4)	54(21.5)	152(21.9)	216(31.3)
0.3	$\frac{1}{32}$	8(11.3)	24(24.1)	70(25.1)	74(29.7)	103(75.0)
	$\frac{1}{64}$	8(12.3)	24(24.4)	87(29.4)	231(29.8)	459(41.3)
	$\frac{1}{128}$	9(12.6)	26(20.0)	98(25.8)	237(29.8)	425(36.9)

Таблица 3.4. Течение в канале: число нелинейных итераций (среднее число линейных итераций). Блочно–диагональный переобуславливатель, регуляризация Берковьера–Энгельмана.

τ_s	h	$\varepsilon = 10^{-1}$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-5}$
0.1	$\frac{1}{32}$	5(9.8)	12(13.7)	34(16.3)	95(22.2)	125(26.4)
	$\frac{1}{64}$	6(10.3)	12(14.0)	42(18.1)	110(21.2)	166(33.5)
	$\frac{1}{128}$	6(10.7)	13(14.2)	54(20.7)	165(22.0)	226(28.5)
0.3	$\frac{1}{32}$	7(10.7)	21(25.9)	79(23.8)	58(29.4)	88(65.2)
	$\frac{1}{64}$	7(11.9)	23(34.7)	106(29.2)	179(28.9)	366(41.1)
	$\frac{1}{128}$	8(12.0)	25(16.7)	121(35.1)	257(29.3)	337(45.7)

Таблица 3.5. Течение в канале: число нелинейных итераций (среднее число линейных итераций). Блочнo–диагональный переобуславливатель, регуляризация Папанастасио.

τ_s	h	$\varepsilon = 10^{-1}$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-5}$
0.1	$\frac{1}{32}$	6(2.2)	15(1.3)	42(1.2)	94(2.0)	127(2.0)
	$\frac{1}{64}$	9(1.7))	16(1.2)	43(1.0)	105(1.5)	169(2.0)
	$\frac{1}{128}$	10(1.5)	16(1.2)	55(1.0)	153(1.1)	221(2.6)
0.3	$\frac{1}{32}$	11(1.4)	26(1.3)	62(1.3)	77(1.3)	104(1.2)
	$\frac{1}{64}$	14(1.3)	26(1.2)	83(1.1)	232(1.9)	460(1.8)
	$\frac{1}{128}$	14(1.3)	27(1.3)	98(1.1)	233(1.1)	427(1.2)

Таблица 3.6. Течение в канале: число нелинейных итераций (среднее число линейных итераций). Блочнo–треугольный переобуславливатель, регуляризация Берковьера–Энгельмана.

τ_s	h	$\varepsilon = 10^{-1}$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-5}$
0.1	$\frac{1}{32}$	6(2.2)	14(1.3)	35(1.1)	95(2.0)	126(2.0)
	$\frac{1}{64}$	9(1.7)	14(1.3)	43(1.0)	110(1.7)	172(2.0)
	$\frac{1}{128}$	10(1.5)	15(1.3)	56(1.0)	165(1.1)	231(2.4)
0.3	$\frac{1}{32}$	11(1.7)	25(1.2)	69(1.2)	63(1.4)	88(1.3)
	$\frac{1}{64}$	11(1.5)	24(1.3)	103(1.1)	180(1.4)	367(1.5)
	$\frac{1}{128}$	12(1.3)	26(1.3)	120(1.1)	245(1.1)	339(1.2)

Таблица 3.7. Течение в канале: число нелинейных итераций (среднее число линейных итераций). Блочнo–треугольный переобуславливатель, регуляризация Папанастасио.

3.2. Течение среды Бингама в каверне.

Другим важным тестовым примером является задача о течении в каверне. Расчетная область представляет собой единичный квадрат, на верхней грани задается течение с единичной скоростью вдоль грани, на остальных гранях скорость нулевая, см Рис. 3.3.

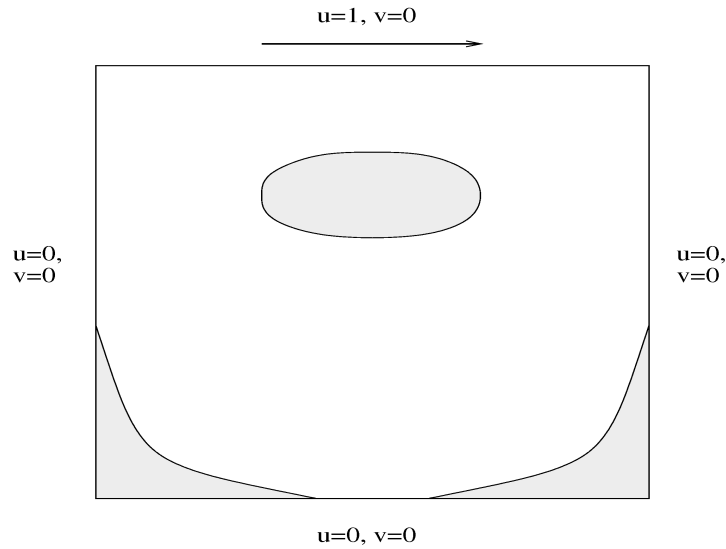


Рис. 3.3. Каверна: краевые условия и схематическое изображение жестких зон.

В качестве иллюстрации поведения коэффициента эффективной вязкости ν на Рис. 3.4 изображено распределение вязкости в задаче о течении среды Бингама в каверне для $\tau_s = 5$ и $\varepsilon = 10^{-5}$, полученное в результате численного решения задачи. Хорошо заметно, что есть области с вязкостью порядка $O(1)$ — это жидкие зоны, и области, где эффективная вязкость принимает большие значения. Более того, рассматриваемая задача характеризуется большими значениями градиента эффективной вязкости в жестких зонах.

Так же, как и в задаче течения среды Бингама в канале, приведем сначала собственные значения переобусловленного дополнения по Шуру

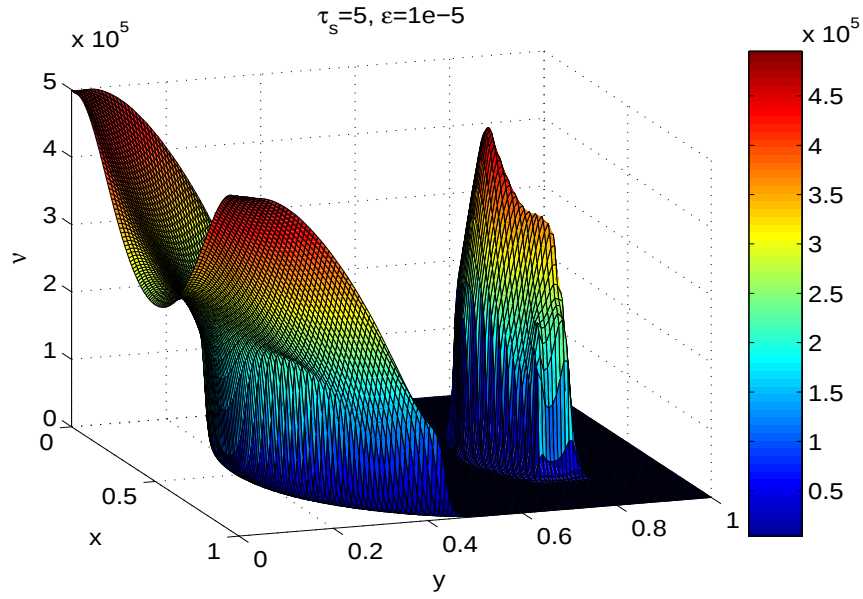


Рис. 3.4. Каверна: распределение вязкости при $\tau = 5$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

на последней нелинейной итерации методом Пикара с использованием M и M_ν . Из Таб. 3.8 и 3.9 видно, что при использовании переобуславливателя M_ν уже второе (т.е. первое ненулевое) собственное значение практически не зависит от параметра регуляризации ε , в то время, как при использовании матрицы масс $\lambda_2 = O(\varepsilon)$. Это наблюдение подтверждается графиками 3.5 и 3.6, на которых изображены все собственные значения матриц $M^{-1}S$ и $M_\nu^{-1}S$ для $\varepsilon = 10^{-3}$ и 10^{-4} и $\tau_s = 2$ и 5 .

	$\tau_s = 2$			
ε	0.1	0.01	1e-3	1e-4
$h = \frac{1}{16}$				
$\lambda_2(M^{-1}S)$	5.45e-3	5.96e-4	6.02e-5	6.03e-6
$\lambda_{\max}(M^{-1}S)$	0.377	0.376	0.376	0.376
$\lambda_2(M_\nu^{-1}S)$	1.13e-1	1.12e-1	1.12e-1	1.12e-1
$\lambda_{\max}(M_\nu^{-1}S)$	1.435	1.678	1.626	1.358
$h = \frac{1}{28}$				
$\lambda_2(M^{-1}S)$	5.44e-3	5.93e-4	5.98e-5	5.99e-6
$\lambda_{\max}(M^{-1}S)$	0.409	0.408	0.408	0.408
$\lambda_2(M_\nu^{-1}S)$	1.16e-1	1.15e-1	1.15e-1	1.15e-1
$\lambda_{\max}(M_\nu^{-1}S)$	1.487	1.799	1.814	1.690

Таблица 3.8. Каверна: собственные значения матриц $M^{-1}S$ и $M_\nu^{-1}S$ на последней нелинейной итерации; МКЭ с шагом сетки $h = \frac{1}{16}$ и $h = \frac{1}{28}$, $\tau_s = 2$. Регуляризация Берковьера–Энгельмана.

	$\tau_s = 5$			
ε	0.1	0.01	1e-3	1e-4
$h = \frac{1}{16}$				
$\lambda_2(M^{-1}S)$	2.30e-3	2.39e-4	2.34e-5	2.40e-6
$\lambda_{\max}(M^{-1}S)$	0.307	0.306	0.306	0.306
$\lambda_2(M_\nu^{-1}S)$	1.02e-1	9.83e-2	9.30e-2	9.14e-2
$\lambda_{\max}(M_\nu^{-1}S)$	1.566	1.790	1.749	1.688
$h = \frac{1}{28}$				
$\lambda_2(M^{-1}S)$	2.30e-3	2.38e-4	2.39e-5	2.39e-6
$\lambda_{\max}(M^{-1}S)$	0.351	0.350	0.350	0.350
$\lambda_2(M_\nu^{-1}S)$	1.09e-1	1.06e-1	1.02e-1	1.00e-1
$\lambda_{\max}(M_\nu^{-1}S)$	1.622	1.860	1.893	1.882

Таблица 3.9. Каверна: собственные значения матриц $M^{-1}S$ и $M_\nu^{-1}S$ на последней нелинейной итерации; МКЭ с шагом сетки $h = \frac{1}{16}$ и $h = \frac{1}{28}$, $\tau_s = 5$. Регуляризация Берковьера-Энгельмана.

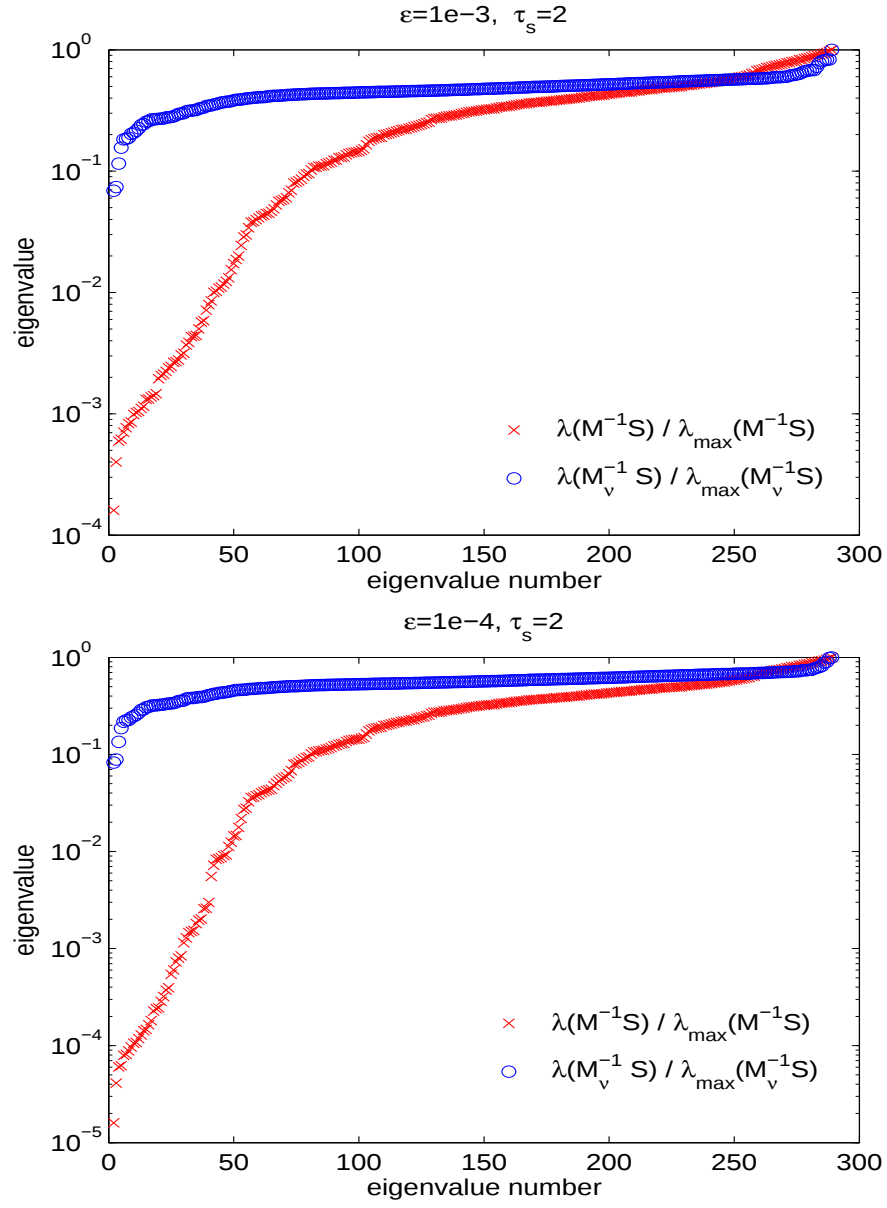


Рис. 3.5. Каверна: все ненулевые собственные значения переобусловленного дополнения по Шуру на последней нелинейной итерации при $\tau = 2$, $\varepsilon = 10^{-3}$ (сверху) $\varepsilon = 10^{-4}$ (снизу); МКЭ с шагом сетки $h = \frac{1}{16}$.

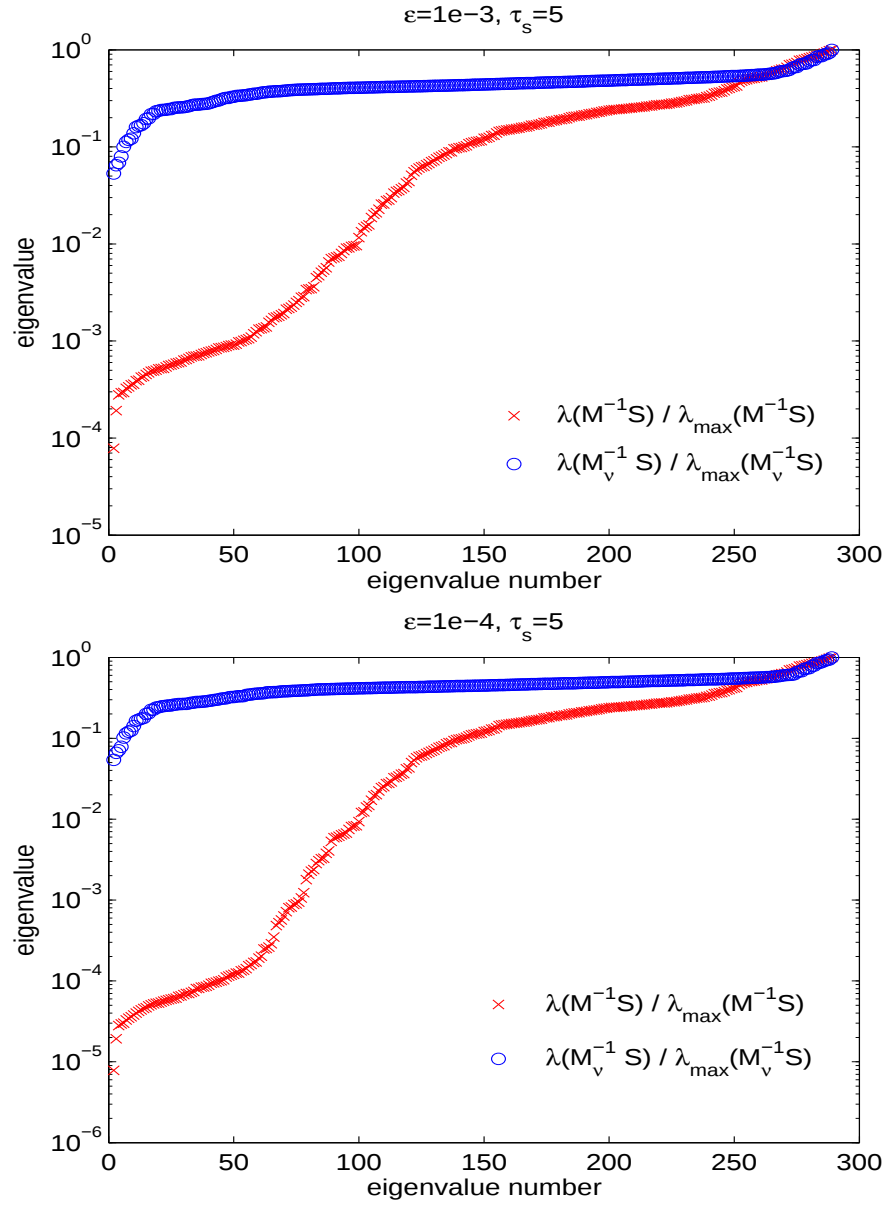


Рис. 3.6. Каверна: все ненулевые собственные значения переобусловленного дополнения по Шуру на последней нелинейной итерации при $\tau = 5$, $\varepsilon = 10^{-3}$ (сверху) $\varepsilon = 10^{-4}$ (снизу); МКЭ с шагом сетки $h = \frac{1}{16}$.

Важной частью решения регуляризованной задачи Бингама является определение границ жестких зон. Одним из возможных способов является выделение областей, где $|\mathbf{Du}|$ не превышает некоторого значения. Далее приводятся графики, на которых для вычисленных дискретных решений изображены линии уровня $|\mathbf{Du}|$ ($10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$) при значениях $\tau_s = 2$, $\tau_s = 5$ и $\varepsilon = 10^{-1} \dots 10^{-5}$. Расчеты велись методом конечных разностей на сетке с шагом $h = 1/128$. Из графиков можно сделать вывод, что для определения границ жестких зон желательно расчеты проводить с $\varepsilon < 10^{-3}$. Похожие результаты для регуляризованной модели Бингама имеются, например, в [33] и [44]. При расчетах методом конечных элементов картина качественно не менялась.

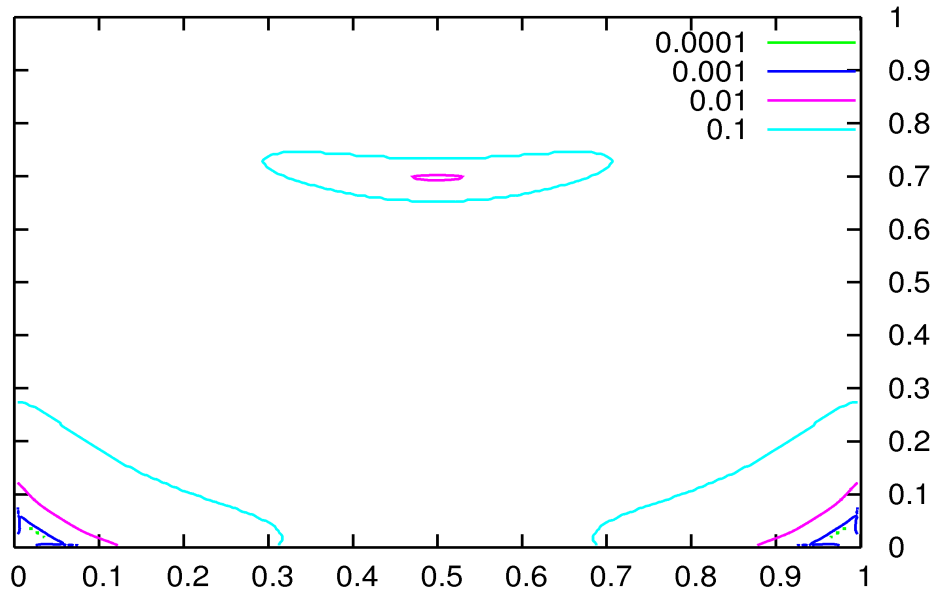


Рис. 3.7. Каверна: линии уровня $|\mathbf{Du}|$ при $\tau = 2$, $\varepsilon = 10^{-1}$; МКР с шагом сетки $h = \frac{1}{128}$.

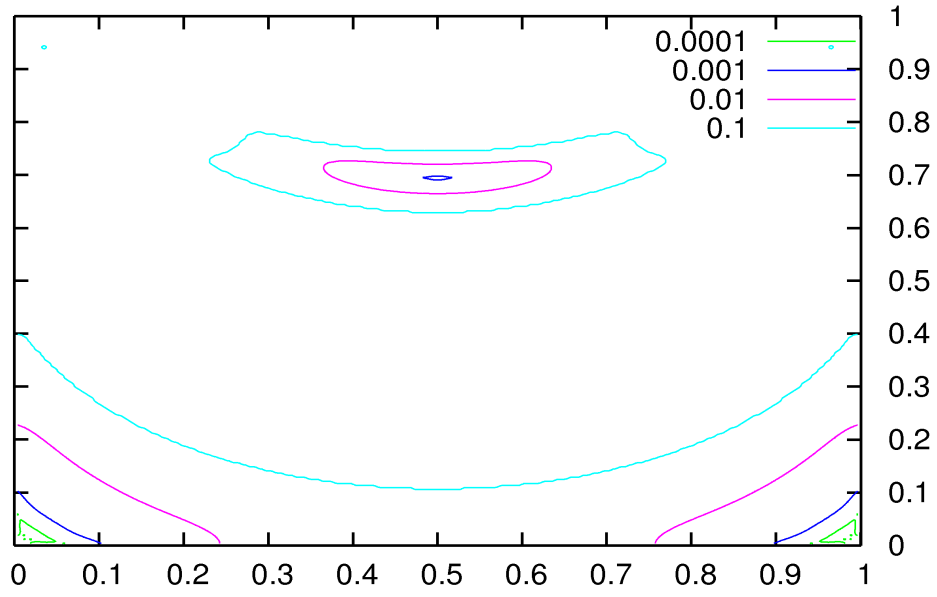


Рис. 3.8. Каверна: линии уровня $|\mathbf{Du}|$ при $\tau = 2$, $\varepsilon = 10^{-2}$; МКР с шагом сетки $h = \frac{1}{128}$.

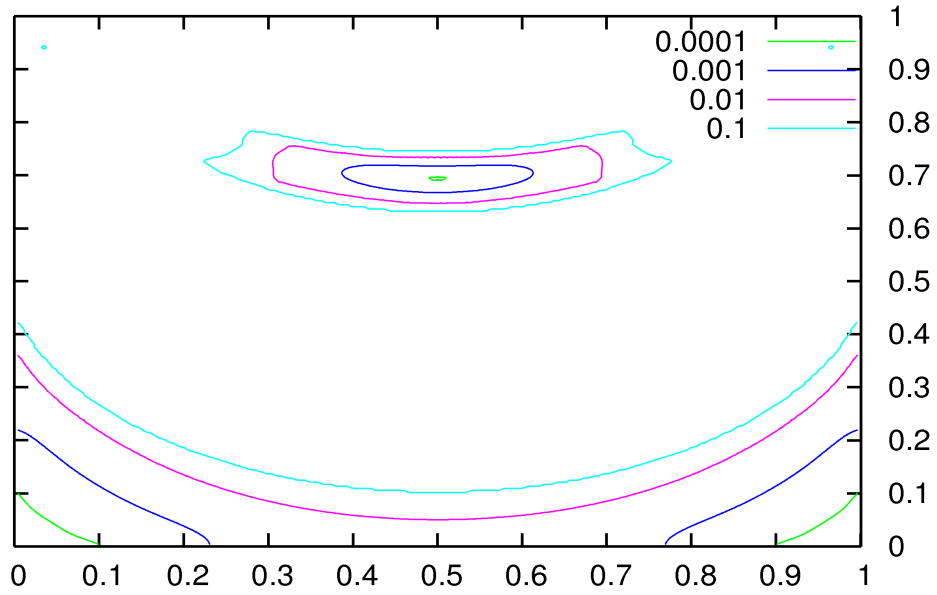


Рис. 3.9. Каверна: линии уровня $|\mathbf{Du}|$ при $\tau = 2$, $\varepsilon = 10^{-3}$; МКР с шагом сетки $h = \frac{1}{128}$.

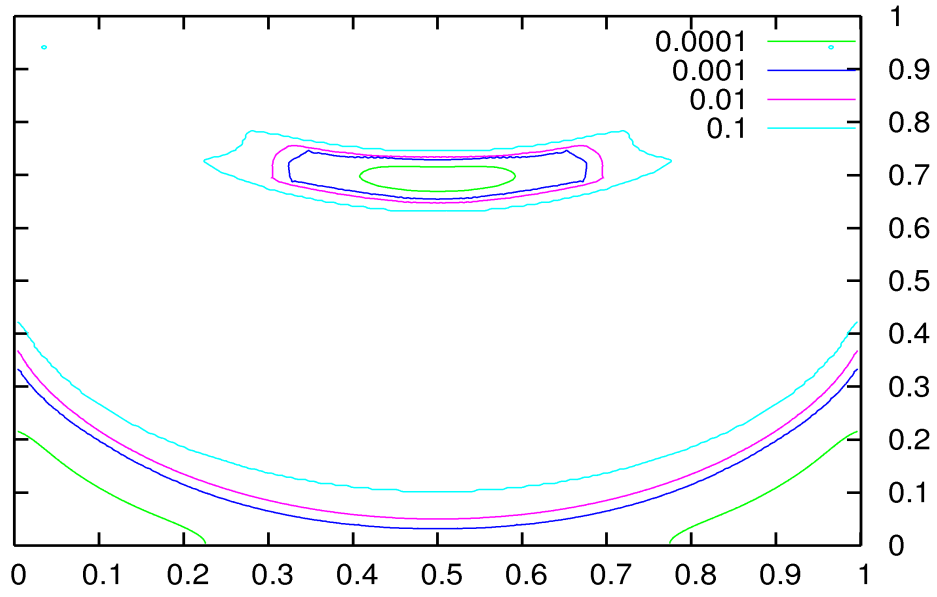


Рис. 3.10. Каверна: линии уровня $|\mathbf{Du}|$ при $\tau = 2$, $\varepsilon = 10^{-4}$; МКР с шагом сетки $h = \frac{1}{128}$.

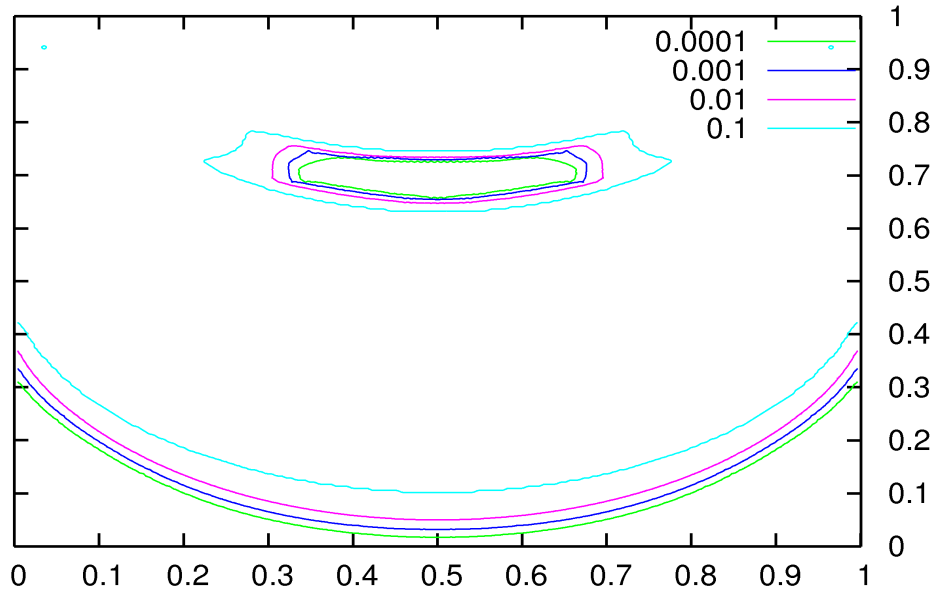


Рис. 3.11. Каверна: линии уровня $|\mathbf{Du}|$ при $\tau = 2$, $\varepsilon = 10^{-5}$; МКР с шагом сетки $h = \frac{1}{128}$.

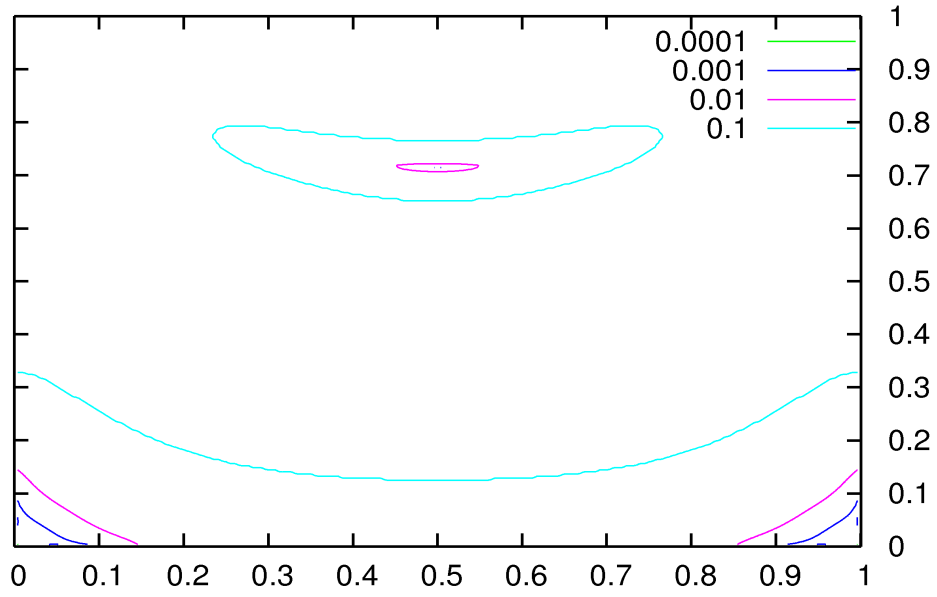


Рис. 3.12. Каверна: линии уровня $|\mathbf{Du}|$ при $\tau = 5$, $\varepsilon = 10^{-1}$; МКР с шагом сетки $h = \frac{1}{128}$.

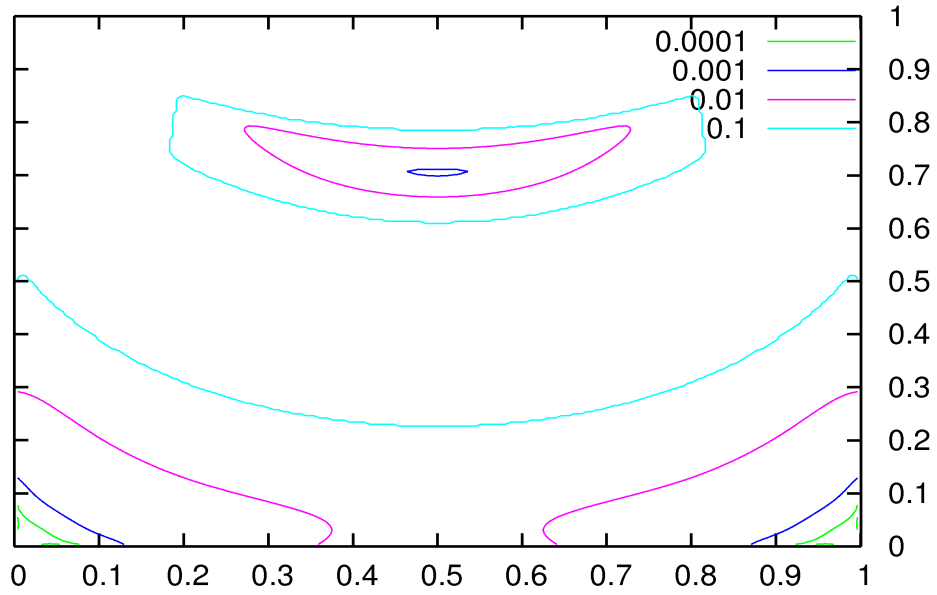


Рис. 3.13. Каверна: линии уровня $|\mathbf{Du}|$ при $\tau = 5$, $\varepsilon = 10^{-2}$; МКР с шагом сетки $h = \frac{1}{128}$.

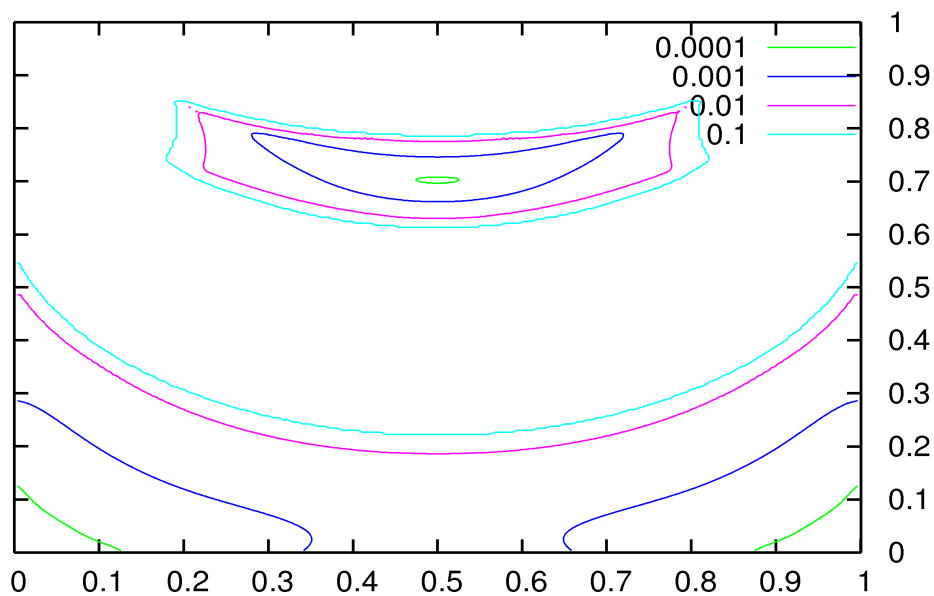


Рис. 3.14. Каверна: линии уровня $|\mathbf{Du}|$ при $\tau = 5$, $\varepsilon = 10^{-3}$; МКР с шагом сетки $h = \frac{1}{128}$.

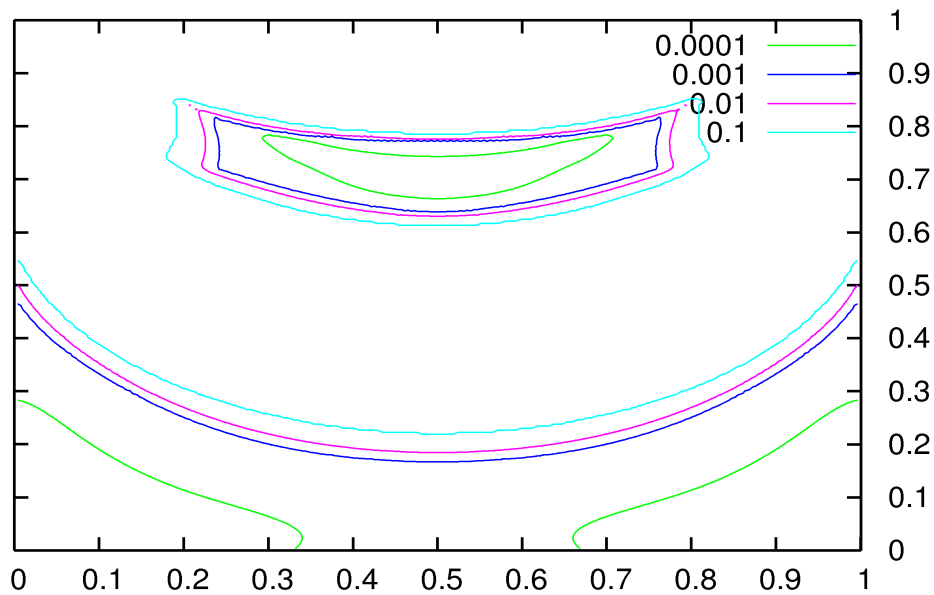


Рис. 3.15. Каверна: линии уровня $|\mathbf{Du}|$ при $\tau = 5$, $\varepsilon = 10^{-4}$; МКР с шагом сетки $h = \frac{1}{128}$.

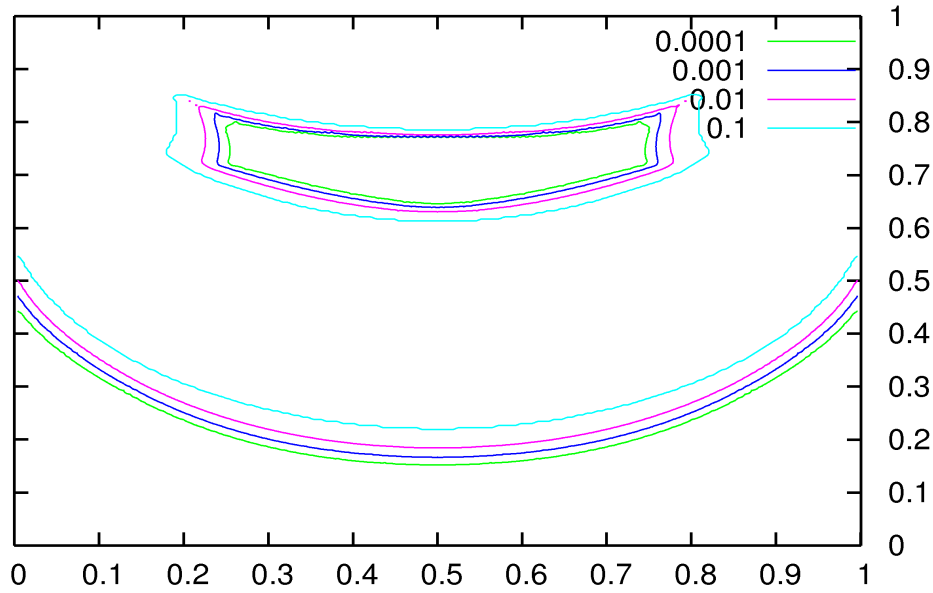


Рис. 3.16. Каверна: линии уровня $|\mathbf{Du}|$ при $\tau = 5$, $\varepsilon = 10^{-5}$; МКР с шагом сетки $h = \frac{1}{128}$.

Теперь перейдем к рассмотрению эффективности нелинейных итераций и линейных переобусловленных методов для данной задачи. В Таб. 3.10 приводятся результаты применения переобуславливателей M и M_ν при разных значениях ε на сетке с шагом $h = 1/32$, дискретизация проводилась методом конечных разностей. Нелинейные итерации останавливались по достижении нормой невязки значения 10^{-4} , линейаризованная система решалась методом MINRES. Блок A переобуславливался при помощи полного разложения Холецкого. В качестве начального приближения брался результат решения задачи Стокса с постоянной вязкостью $\nu = 1$ и с теми же краевыми условиями. Также, как и в задаче о течении среды Бингама в канале, при использовании переобуславливателя M_ν среднее число линейных итераций практически не зависит от параметра регуляризации ε , что хорошо согласуется с теоретическими результатами. Регуляризация проводилась методом Берковьера–Энгельмана.

В Таб. 3.11 приведены результаты вычислений методом конечных элементов для различных сеток при $\varepsilon = 10^{-3}$, блок A переобуславливался многосеточным методом. Линеаризованная система решалась методом GMRES с блочно-треугольным переобуславливателем, критерий остановки — уменьшение нормы невязки в 10^2 раз. Критерий остановки нелинейных итераций — уменьшение нормы невязки в 10^5 раз.

	MAC			
ε	0.1	0.01	1e-3	1e-4
	$\tau_s = 2$			
Итер. Пикара	22	63	103	119
Лин. итер. $\hat{S} = M$	8.8	12.3	22.8	46.1
Лин. итер. $\hat{S} = M_\nu$	7.5	6.6	5.9	6.0
	$\tau_s = 5$			
Итер. Пикара	34	81	117	127
Лин. итер. $\hat{S} = M$	9.4	15.2	28.8	54.4
Лин. итер. $\hat{S} = M_\nu$	7.4	7.2	6.6	6.4

Таблица 3.10. Каверна: число итераций при $h = \frac{1}{32}$ и различных ε . Критерий остановки линейного метода: падение невязки в 10^{-2} раз.

В Таб. 3.12 — 3.13 приведено число итераций (вне скобок — нелинейных итераций, в скобках — линейных). Дискретизация проводилась методом конечных разностей на разных сетках с разными значениями параметра регуляризации. Использовались регуляризации Берковьера–Энгельмана и Папанастасио, блочно–диагональный и блочно–треугольный переобуславливатели для матрицы $\mathcal{A}$, линейная система решалась методом GMRES. Блок A переобуславливался с помощью одного V–цикла геометрического многосеточного метода, делалось по 4 сгла-

h	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$
	$\tau_s = 2$					$\tau_s = 5$				
Итер. Пикара	169	214	246	196	170	230	287	365	339	308
Лин. итер. $\hat{S} = M_\nu$	2.2	2.1	2.0	2.1	2.1	2.4	2.3	2.2	2.3	2.3

Таблица 3.11. Каверна: количество итераций при расчетах МКЭ на различных сетках с $\varepsilon = 1e - 3$

живающие итерации при помощи неполного разложения Холецкого, на грубой сетке система решалась точно. Критерий остановки GMRES такой же, как и в задаче о течении в канале — уменьшение невязки в 10^2 раз (в случаях, отмеченных символом (*), критерий — уменьшение невязки в 10^3 раз). Заметна небольшая разница количества нелинейных итераций при использовании разных регуляризаций: при использовании регуляризации Берковьера–Энгельмана метод Пикара сходится быстрее. В задаче о течении в канале, наоборот, регуляризация Папанастасио дает несколько лучший результат в смысле количества нелинейных итераций методом Пикара.

τ_s	h	$\varepsilon = 10^{-1}$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-5}$
2	$\frac{1}{32}$	23(15.7)	66(17.3)	98(20.3)	115(23.5)	123(25.1)
	$\frac{1}{64}$	24(18.2)	80(18.1)	176(18.6)	197(21.0)	230(30.8)
	$\frac{1}{128}$	26(15.9)	91(19.1)	237(18.6)	509(24.3)	599(26.0)
5	$\frac{1}{32}$	39(16.9)	99(20.7))	123(23.4)	140(29.3)	147(56.8)
	$\frac{1}{64}$	42(27.5)	126(27.0)	205(23.1)	260(28.5)	257(36.0)
	$\frac{1}{128}$	46(27.0)	153(27.0)	323(23.1)	405(25.5)	422(27.0)

Таблица 3.12. Каверна: число нелинейных итераций (среднее число линейных итераций). Блочно-диагональный переобуславливатель, регуляризация Берковьера-Энгельмана.

τ_s	h	$\varepsilon = 10^{-1}$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-5}$
2	$\frac{1}{32}$	21(13.9)	72(16.5)	103(28.3)	125(29.3)	129(29.7)
	$\frac{1}{64}$	22(16.0)	86(18.1)	197(18.5)	245(32.9)	237(72.2)
	$\frac{1}{128}$	24(15.0)	99(18.7)	290(18.9)	561(24.1)	600(26.5)
5	$\frac{1}{32}$	37(16.5)	110(21.0)	137(29.8)	154(57.2)	150(48.3)
	$\frac{1}{64}$	40(21.6)	138(24.3)	259(24.1)	251(28.0)	295(40.6)
	$\frac{1}{128}$	44(18.6)	178(24.4)	455(24.2)	586(26.4)	605(27.0)

Таблица 3.13. Каверна: число нелинейных итераций (среднее число линейных итераций). Блочно-диагональный переобуславливатель, регуляризация Папанастасио.

τ_s	h	$\varepsilon = 10^{-1}$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-5}$
2	$\frac{1}{32}$	24(1.3)	65(1.1)	97(1.1)	114(1.4)	123(1.4)
	$\frac{1}{64}$	24(1.1)	79(1.0)	175(1.2)	196(1.6)	230(1.8)
	$\frac{1}{128}$	25(1.1)	90(1.0)	236(1.1)	508(1.5)	599(1.4)
5	$\frac{1}{32}$	39(1.6)	98(1.1)	123(2.1)*	140(1.5)	147(1.7)
	$\frac{1}{64}$	42(1.1)	125(1.1)	204(1.3)	259(1.7)	257(1.9)
	$\frac{1}{128}$	44(1.0)	152(1.0)	322(1.0)	404(1.7)	422(2.0)

Таблица 3.14. Каверна: число нелинейных итераций (среднее число линейных итераций). Блочнo–треугольный переобуславливатель, регуляризация Берковьера–Энгельмана.

τ_s	h	$\varepsilon = 10^{-1}$	$\varepsilon = 10^{-2}$	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-5}$
2	$\frac{1}{32}$	21(1.3)	71(1.0)	102(1.1)	124(1.3)	128(1.4)
	$\frac{1}{64}$	24(1.2)	85(1.0)	195(1.1)	245(1.4)	236(2.6)
	$\frac{1}{128}$	24(1.1)	98(1.0)	289(1.0)	561(1.6)	600(1.4)
5	$\frac{1}{32}$	36(1.4)	109(1.1)	137(1.9)*	149(3.2)	150(1.7)
	$\frac{1}{64}$	40(1.1)	137(1.1)	258(1.1)	250(1.7)	294(1.6)
	$\frac{1}{128}$	43(1.0)	177(1.0)	454(1.0)	585(1.4)	604(1.5)

Таблица 3.15. Каверна: число нелинейных итераций (среднее число линейных итераций). Блочнo–треугольный переобуславливатель, регуляризация Папанастасио.

3.3. Задача моделирования мантийной конвекции.

В разделе 2.5 описано приложение теоретических результатов первой главы к задаче моделирования мантийной конвекции. В отличие от предыдущих двух модельных задач, в задаче о всплытии раскаленного рассматривается только система линейных уравнений. Численные эксперименты проводились при помощи метода конечных разностей, расчет велся в единичном квадрате. Задавались краевые условия Дирихле: $\mathbf{u} = 0$ на $\partial\Omega$. Начальное приближение бралось нулевое, в правой части для компонент скорости задавалось постоянное значение, равное 100.

Линейная система решалась при помощи метода GMRES, критерием остановки служило уменьшение невязки в 10^{10} раз. Блок A переобуславливался с помощью одного V -цикла геометрического многосеточного метода, на каждом сеточном уровне делалось по 4 сглаживающие итерации с помощью неполного разложения Холецкого с нулевым заполнением. На грубой сетке система решалась точно. В Таб. 3.16 и 3.17 приводится количество итерация при использовании переобуславливателей M и M_ν для дополнения по Шуру. Хорошо видно, что использование матрицы масс ведет к увеличению числа итераций на несколько порядков при увеличении отношения максимальной вязкости к минимальной. В то же время, при использовании M_ν — всего в два раза, что оказывается даже несколько лучше, чем предсказывают оценки на $\tilde{c}_{\nu,h}$ и, соответственно, оценки на собственные значения из в пятого раздела второй главы, приведенные в Таб. 2.1.

α	β	$\nu_{\min}$	h=1/64	h=1/128
0	0	1	51	49
3	200	4.98e-2	270	312
7,2	20	5.53e-4	4966	4341
7,2	200	5.53e-4	4829	4458
12	200	6.14e-6	> 10000	> 10000
15	200	3.06e-7	> 10000	> 10000

Таблица 3.16. Мантийная конвекция: $\hat{S} = M$

α	β	$\nu_{\min}$	h=1/64	h=1/128
0	0	1	51	49
3	200	4.98e-2	82	81
7,2	20	5.53e-4	83	83
7,2	200	5.53e-4	89	90
12	200	6.14e-6	103	103
15	200	3.06e-7	90	103

Таблица 3.17. Мантийная конвекция: $\hat{S} = M_\nu$

3.4. Выводы из численных экспериментов.

Из результатов численных экспериментов можно сделать следующие выводы:

- Предлагаемый в диссертации переобуславливатель для дополнения по Шуру M_ν показал высокую эффективность как при изменении шага сетки h , так и при изменении параметра регуляризации ε (а значит, отношения максимального значения вязкости к минимальному).
- Нелинейные итерации методом Пикара показывают сильную зависимость от параметра регуляризации ε . Вопрос об оптимальном методе решения нелинейной системы пока остается открытым.
- Теоретические оценки хорошо предсказывают поведение линейных итерационных методов для рассмотренных примеров (несколько лучше для вязко-пластичной жидкости и несколько хуже для конвекции), хотя, судя по всему, не являются оптимальными в смысле зависимости от ν .
- Вид и размер жестких зон, изображенных на Рис.3.7–3.16, хорошо согласуются с результатами расчетов в других работах (в [44], например, рассматривается регуляризованная задача, в работах [30] и [50] — нерегуляризованная), что говорит о том, что выбранные численные параметры позволяют воспроизводить важные физические эффекты.

Заключение

Основные результаты, полученные в диссертации, могут быть сформулированы следующим образом:

1. Доказано обобщенное неравенство Нечаса для случая переменной вязкости. Доказано обобщение неравенства для случая, когда область представлена в виде объединения непересекающихся подобластей.
2. Предложен переобуславливатель для дополнения по Шуру для дискретной задачи Стокса, учитывающий структуру переменной вязкости. Получена оценка на собственные значения переобусловленного дополнения по Шуру. Получена оценка скорости сходимости метода Узавы-сопряженных градиентов.
3. Предлагаемый переобуславливатель применен для численного решения регуляризованной задачи Бингама и линейной задачи, возникающей при моделировании всплытия раскаленного пузыря в магме. Для задачи о течении среды Бингама в канале получены оценки собственных значений переобусловленного дополнения по Шуру и теоретически доказано, что зависимость от параметра регуляризации оценок собственных значений более слабая для предлагаемого метода, чем для стандартного переобуславливателя (матрицы масс).
4. Проведены численные эксперименты, хорошо согласующиеся с теоретическими результатами задачи течения среды Бингама в канале и показавшие практическую независимость числа линейных итераций как от шага сетки, так и от отношения максимального значе-

ния вязкости к минимальному для задачи течения среды Бингама в каверне и линейной задачи, возникающей при моделировании всплытия раскаленного пузыря в магме при использовании предлагаемого переобуславливателя.

Литература

- [1] *И.А. Боровиков, Ю.А. Дубинский.* Некоторые разложения модулей Соболева-Клиффорда и нелинейные вариационные задачи // Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Том 260, 2008, с. 57–74.
- [2] *Г. Генки.* Пространственная задача упругого и пластического равновесия // Известия Академии наук СССР. Отдел технических наук, № 2, 1937.
- [3] *Г. Дюво, Ж.–Л. Лионс.* Неравенства в механике и физике. Москва: Наука, 1980.
- [4] *А.А. Ильющин.* Деформация вязко-пластичного тела // Ученые записки МГУ. Механика, № 39, 1940, с. 3–81.
- [5] *Д.М. Климов, А.Г. Петров, Д.В. Георгиевский.* Вязкопластические течения. Динамический хаос, устойчивость, перемешивания. Москва: Наука, 2005.
- [6] *А.М. Красногорский.* О разложении пространства гармонических функций и некоторых приложениях // Доклады Академии наук, Том 411, № 4, 2006, с. 452–454.
- [7] *В.И. Лебедев.* Разностные аналоги ортогональных разложений, основных дифференциальных операторов и некоторых краевых задач математической физики // Журнал вычислительной математики и математической физики, Том 4, № 3, 1964, с. 449–465.
- [8] *С.В. Милютин.* Исследование трёхпараметрического итерационно-

го метода, ориентированного на решение двух классов задач с нелинейными седловыми операторами. Диссертация на соискание степени кандидата физико–математических наук. Москва, 2010.

- [9] *П.П. Мосолов, В.П. Мясников.* Вариационные методы в теории жёстковязкопластической среды. Москва: Наука, 1971.
- [10] *П.М. Огибалов, А.Х. Мирзаджанадзе.* Нестационарные движения вязкопластичных сред. Москва: Наука, 1970.
- [11] *М.А. Ольшанский.* Лекции и упражнения по многосеточным методам. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
- [12] *М.А. Ольшанский, Е.В. Чижонков.* О наилучшей константе в inf-sup-условии для вытянутых прямоугольных областей // Математические заметки, Том 67, № 3, 2001, с. 387–396.
- [13] *С.Л. Соболев.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Москва: Наука, 1988.
- [14] *Е.Е. Тыртышников.* Методы численного анализа. Издательский центр “Академия”, 2007.
- [15] *Е.В. Чижонков.* Релаксационные методы решения седловых задач. Москва: ИВМ РАН, 2002.
- [16] *K. Arrow, L. Hurwitz, H. Uzawa.* Studies in Linear and Nonlinear Programming. Stanford, California: Stanford University Press, 1958.
- [17] *A. Battermann, M. Heinkenschloss.* Preconditioners for Karush–Kuhn–Tucker systems arising in the optimal control of distributed systems // in Optimal Control of Partial Differential

Equations, W.Desch, F.Kappel, and K.Kunisch (Eds.), Vol.126 of International Series of Numerical Mathematics, Birkhäuser Verlag, 1998, pp.15–32.

- [18] *A. Battermann, E.W. Sachs.* Block preconditioners for KKT systems arising in PDE-governed optimal control problems // in Fast Solution of Discretized Optimization Problems, K.H. Hoffmann, R.H.W. Hoppe, V. Schulz. (Eds.), Birkhäuser Verlag, 2001, pp. 1-18.
- [19] *M. Bercovier, M. Engelman.* A finite element method for incompressible non-newtonian flows // Journal of Computational Physics, Vol. 36, Iss. 3, 1980, pp. 313-326.
- [20] *E.C. Bingham.* Fluidity and Plasticity. New-York: Mcgraw-Hill Book Company, Inc., 1922.
- [21] *A. Bossavit.* “Mixed” systems of algebraic equations in computational electromagnetism // COMPEL, Vol. 17, Iss. 1, 1998, pp. 59–63.
- [22] *D. Braess.* Finite Elements. Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [23] *F. Brezzi, M. Fortin.* Mixed and hybrid finite element methods. Springer Series In Computational Mathematics, New-York: Springer Vol.15, 1991.
- [24] *C. Burstedde, O. Ghattas, G. Stadler, T. Tu, L.C. Wilcox.* Parallel scalable adjoint-based adaptive solution of variable-viscosity Stokes flow problems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 198, Iss. 21–26, 2009, pp. 1691–1700.

- [25] *M. Chatzimina, C. Xenophontos, G.C. Georgiou, I. Argyropaidas, E. Mitsoulis.* Cessation of annular Poiseuille flows of Bingham plastics // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, Vol. 142, Iss. 1–3, 2007, pp. 135–142.
- [26] *E.V. Chizhonkov, M.A. Olshanskii.* On the domain geometry dependence of the LBB condition // Mathematical Modeling and Numerical Analysis, Vol. 34, Iss. 5, 2000, pp. 935–951.
- [27] *U. Christensen, H. Harder.* 3-D Convection With Variable Viscosity // Geophysical Journal International, Vol. 104, Iss. 1, 2007, pp. 213–220.
- [28] *P.G. Ciarlet.* Mathematical Elasticity, Vol 1: Three Dimensional Elasticity. Amsterdam: North Holland, 1998.
- [29] *E.J. Dean, R. Glowinski.* Operator-splitting methods for the simulation of Bingham visco-plastic flow // Chinese Annals of Mathematics, Vol. 23, Iss. 2, 2002, pp. 187–204.
- [30] *E.J. Dean, R. Glowinski, G. Guidoboni.* On the numerical simulation of Bingham visco-plastic flow: Old and New results // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, Vol. 142, Iss. 1–3, 2007, pp. 36–62.
- [31] *Y. Dimakopoulos, J. Tsamopoulos.* Transient displacement of a viscoplastic material by air in straight and suddenly constricted tubes // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, Vol. 112, Iss. 1, 2003, pp. 43–75
- [32] *F. Duchin, D.B. Szyld.* Application of sparse matrix techniques to inter-regional input-output analysis // Economics of planning, Vol. 15, No. 2/3, 1979, pp. 142–167.

- [33] *R.N. Elias, M.A.D. Martins, A.L.G.A. Coutinho.* Parallel edge-based solution of viscoplastic flows with the SUPG/PSPG formulation // Computational Mechanics, Vol. 38, No. 4/5, 2006, pp. 365–381.
- [34] *H.C. Elman, G.H. Golub.* Inexact and preconditioned Uzawa algorithms for saddle point problems // SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 31, Iss. 6, 1994, pp. 1645–1661.
- [35] *H.C. Elman, D.J. Silvester, A.J. Wathen.* Finite Elements and Fast Iterative Solvers: with Applications in Incompressible Fluid Dynamics. Oxford: Oxford University Press, 2005.
- [36] *B. Fischer, A. Ramage, D.J. Silvester, A.J. Wathen.* Minimum residual methods for augmented systems // BIT Numerical Mathematics, Vol. 38, No. 3, 1998, pp. 527–543.
- [37] *R.W. Freund.* Model reduction methods based on Krylov subspaces // Acta Numerica, Vol. 12, 2003, pp. 267–319.
- [38] *M. Garbey, Yu. V. Vassilevski.* A parallel solver for unsteady incompressible 3D Navier–Stokes equations // Parallel Computing, Vol. 27, Iss. 4, 2001, pp. 363–389.
- [39] *R. Glowinski.* Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems. New-York: Springer, 1984.
- [40] *P.P. Grinevich, M.A. Olshanskii.* An iterative method for the Stokes type problem with variable viscosity // SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 31, Iss. 5, 2009, pp. 3959–3978.
- [41] *M. Gunzburger.* Finite Element Methods for Viscous Incompressible

Flows: A Guide to Theory, Practice, and Algorithms. Academic Press, 1989.

- [42] *W. Leontief, F. Duchin, D.B. Szyld.* New approaches in economic analysis // Science, Vol. 228, No. 4698, 1985, pp. 419–422.
- [43] *D. McKenzie.* The generation and compaction of partially molten rock // Journal of Petrology, Vol. 25, No. 3, 1984, pp. 713–765.
- [44] *E. Mitsoulis, Th. Zisis.* Flow of Bingham plastics in a lid-driven square cavity // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, Vol. 101, Iss. 1–3, 2001, pp. 173–180.
- [45] *L.N. Moresi, S.J. Zhong, M. Gurnis.* The accuracy of finite element solutions of Stokes' flow with strongly varying viscosity // Physics of the Earth and Planetary Interiors, Vol. 97, Iss. 1–4, 1996, pp. 83–94.
- [46] *J. Nečas.* Les Méthodes Directes en Théorie des Équations Elliptiques. Paris: Masson, 1967.
- [47] *R.A. Nicolaides.* Analysis and Convergence of the MAC scheme I. The Linear Problem // SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 29, No. 6, 1992, pp. 1579–1591.
- [48] *E.J. O'Donovan, R.I. Tanner.* Numerical study of the Bingham squeeze-film problem // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, Vol 15, Iss. 1, 1984, pp. 75–83.
- [49] *K. Ohmori, N. Saito.* On the convergence of finite element solutions to the interface problem for the Stokes system // Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 198, Iss. 1, 2007, pp. 116–128.

- [50] *M.A. Olshanskii* Analysis of semi-staggered finite-difference method with application to Bingham flows // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 198, Iss. 9–12, 2009, pp. 975–985.
- [51] *M.A. Olshanskii, J. Peters, A. Reusken.* Uniform preconditioners for a parameter dependent saddle point problem with application to generalized Stokes interface equations // Numerische Mathematik, Vol. 105, Iss. 1, 2006, pp. 159–191.
- [52] *M.A. Olshanskii, A. Reusken.* Analysis of a Stokes interface problem // Numerische Mathematik, Vol. 103, Iss. 1, 2006, pp. 129–149.
- [53] *T.C. Papanastasiou.* Flows of materials with yield // Journal of Rheology, Vol. 31, Iss. 5, 1987, pp. 385–404.
- [54] *I. Perugia.* A field-based mixed formulation for the two-dimensional magnetostatic problem // SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 34, No. 6, 1997, pp. 2387–2391.
- [55] *A. Quarteroni, A. Valli.* Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Springer Series in Computational Mathematics, Berlin: Springer, Vol. 23, 1994.
- [56] *M. ur Rehman, T. Geenen, C. Vuik, G. Segal, S.P. MacLachlan.* On iterative methods for the incompressible Stokes problem // International Journal for Numerical Methods in Fluids, To appear in 2010; DOI:10.1002/fld.2235.
- [57] *N. Roquet, P. Saramito.* An adaptive finite element method for Bingham fluid flows around a cylinder // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 192, Iss. 31–32, 2003, pp. 3317–3341.

- [58] *L. Saad*. Iterative Methods for Sparse Linear Systems, Boston: PWS, 1996.
- [59] *Y. Saad, M.H. Schultz*. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, Vol. 7, Iss. 3, 1986, pp. 856–869.
- [60] *F.N. Shwedow*. La rigidite de liquides // Rapports au Congrès de Physique à Paris, Vol. 1, 1900, pp. 478–486.
- [61] *P.J. Tackley*. Effects of strongly variable viscosity on three-dimensional compressible convection in planetary mantles // Journal of Geophysical Research, Vol. 101, 1996, pp. 3311–3332.
- [62] *R. Temam*. Navier–Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis. New-York: North Holland, 1979.
- [63] *S. Turek*. Efficient Solvers for incompressible Flow Problems: An Algorithmic and Computational Approach. Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Berlin: Springer, Vol. 6, 1999.
- [64] *S. Turek, A. Ouazzi, J. Hron*. A computational comparison of two FEM solvers for nonlinear incompressible flow // in Challenges in Scientific Computing CISC 2002, E. Bänsch (Editor). Lecture notes in computational science and engineering, Berlin: Springer, Vol. 35, 2003, pp. 87–109.
- [65] *D. Vola, L. Boscardin, J.C. Latché*. Laminar unsteady flows of Bingham fluids: a numerical strategy and some benchmark results // Journal of Computational Physics, Vol. 187, Iss. 2, 2003, pp. 441–456.

- [66] *A.J. Wathen*. Realistic eigenvalues bounds for the Galerkin mass matrix
// IMA Journal of Numerical Analysis, Vol. 7, 1987, pp. 449–457.
- [67] *P. Wesseling*. Principles of Computational Fluid Dynamics. Springer
Series in Computational Mathematics, Berlin: Springer, Vol. 29, 2001.
- [68] *X. Xie, J. Xu, G. Xue*. Uniformly-stable finite element methods
for Darcy–Stokes–Brinkman models // Journal of Computational
Mathematics, Vol. 26, No 3, 2008, pp. 437–455.
- [69] *S.J. Zhong, D.A. Yuen, L.N. Moresi*. Numerical Methods for Mantle
Convection // Treaties on Geophysics, Vol. 7, 2007, pp. 227–252.
- [70] *S.J. Zhong, M.T. Zuber, L. Moresi, M. Gurnis*. Role of
temperature-dependent viscosity and surface plates in spherical
shell models of mantle convection // Journal of Geophysical Research,
Vol. 105, Iss. B5, 2000, pp. 11063–11082.