Две разностные схемы для расчета течений среды Бингама в каверне*

Е.А.Муравлева М.А.Ольшанский †

Аннотация

В работе предложены две разностные схемы для расчета течений несжимаемой вязкой жидкости Бингама. В качестве математической модели среды рассматривается вариационное неравенство Дюво-Лионса. Одна из разностных схем является обобщением известной MAC схемы на разнесенных сетках. Другая схема использует одну сетку для аппроксимации всех компонент скорости и одну сетку для всех компонент тензора скоростей деформации и давления. Для этой схемы вводится специальная стабилизационная добавка, которая обеспечивает устойчивость, сохраняя второй порядок сходимости разностной схемы. В статье приводятся дополнительные условия согласованности сеточных операторов, необходимые для корректности разностного метода. В качестве модельного примера рассматривается численное решение задачи о течении бингамовской жидкости в каверне.

1 Введение

В природе и технике существует широкий круг материалов, таких как свежий бетон, геоматериалы (глинистые почвы, нефтесодержащие материалы, сель, магма), коллоидные растворы, порошкообразные смеси, смазочные материалы, металлы при обработке давлением, кровь в капиллярах, пищевые продукты, зубная паста, которые обладают поведением среды Бингама, а именно: ниже определенного предельного значения напряжений среда ведет себя как жесткое тело, выше этого предела - как несжимаемая вязкая жидкость. Поэтому построение эффективных численных методов для расчета течений среды Бингама является важной задачей, привлекающей в последнее время интерес многих исследователей, см., например, [7] и цитированную там литературу.

Пусть Ω – ограниченное связная область в $R^n, (n = 2, 3), \Gamma$ – граница области. Изотермическое течение несжимаемой вязкопластической среды (среды Бингама, или бингамовской жидкости) в течении временного интервала $(0, T)$ описывается следующей системой уравнений и определяющих соотношений:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} \right] = \mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} \qquad \text{в} \quad \Omega\times(0,T), \tag{1.1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \qquad \text{в} \quad \Omega\times(0,T), \tag{1.2}$$

тензор напряжений Коши $\boldsymbol{\sigma}$ может быть записан в виде

$$\sigma_{ij} = -p\cdot\delta_{ij} + \boldsymbol{\tau}_{ij},$$

*Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований и Немецким Научным Исследовательским Обществом через проекты 06-01-04000-ННИО и 08-01-00159

†Механико-математический факультет, Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова, 119899 Москва. email: `catmurav(at)gmail.com`, `Maxim.Olshanskii(at)mtu-net.ru`

где p - давление, $\boldsymbol{\tau}$ - тензор напряжений, подчиняющийся соотношениям

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij}(\mathbf{v}) + \tau_s \frac{D_{ij}(\mathbf{v})}{|\mathbf{D}(\mathbf{v})|}, \text{ если } |\mathbf{D}(\mathbf{v})| \neq 0, \qquad (1.3)$$
$$|\boldsymbol{\tau}| \leq \tau_s, \text{ если } |\mathbf{D}(\mathbf{v})| = 0,$$

Систему (1.1)–(1.3) необходимо дополнить начальными и краевыми условиями. Для простоты будем рассматривать только краевые условия Дирихле.

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0, \qquad (1.4)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_B \quad \text{на} \quad \Gamma \times (0,T), \qquad \int_\Gamma \mathbf{v}_B(t) \cdot \mathbf{n}\, d\Gamma = 0 \quad \text{для всех} \quad t \in (0,T). \qquad (1.5)$$

$\mathbf{n}$ – вектор внешней единичной нормали на Γ. В уравнениях (1.1)-(1.5) используются стандартные обозначения: ρ, μ – положительные константы, – плотность, коэффициент вязкости, и $\tau_s \geq 0$ – предел текучести бингамовской среды, соответственно; $\mathbf{v}$ – неизвестное поле скоростей, $\mathbf{f}$ – заданное поле внешних сил; $\mathbf{D}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T]$ – тензор скоростей деформаций и

$$|\mathbf{D}(\mathbf{v})| = \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} |D_{ij}(\mathbf{v})|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

Заметим, что если $\tau_s = 0$, система (1.1)-(1.5) сводится к системе уравнений Навье-Стокса, моделирующей изотермическое течение несжимаемой ньютоновской вязкой жидкости. В случае $\tau_s > 0$ система (1.1)-(1.5) выполняется в области движения (т.е. $\mathbf{D}(\mathbf{v}) > 0$) и, вообще говоря, не имеет смысла в жесткой зоне Ω_0:

$$\Omega_0 = \{\{\mathbf{x}, t\} \in \Omega \times (0,T) \,|\, \mathbf{D}(\mathbf{v})(\mathbf{x}, t) = 0\}. \qquad (1.6)$$

Определяющие соотношения (1.3) эквивалентны следующим

$$D_{ij}(\mathbf{v}) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\tau_s}{|\boldsymbol{\tau}|}\right) \frac{\tau_{ij}}{2\mu}, & \text{если} |\boldsymbol{\tau}| > \tau_s, \\ 0, \quad \text{если } |\boldsymbol{\tau}| \leq \tau_s. \end{cases}$$

Если $\tau_s > 0$, то в потоке могут быть зоны, в которых жидкость ведет себя как твердое тело (жесткие зоны). При возрастании τ_s эти зоны увеличиваются, а при достаточно большом τ_s блокируют течение. Когда существуют оба вида движения, то можно говорить о наличии "предельной поверхности". Эта поверхность разделяет две области с разным движением материала.

Таким образом, в задачах о течении вязко-пластической среды характерной особенностью является необходимость находить решения уравнений в областях с неизвестной границей. Это обстоятельство создает большие трудности при построении эффективных методов их исследования. Основная сложность при численном моделировании течения вязкопластической среды связана с сингулярностью определяющих соотношений (1.3) и невозможностью определить напряжения в тех областях, где скорость деформации равна нулю. Для того чтобы преодолеть отмеченные трудности, вводятся различные модификации (регуляризации) модели бингамовской жидкости. Например, среда рассматривается как нелинейная вязкая жидкость (без возникновения предельной поверхности):

$$\tau_{ij} = \eta_\epsilon(|\mathbf{D}|) D_{ij}, \quad \epsilon \ll 1,$$

где $\eta_\epsilon(|\mathbf{D}|) \to \eta(|\mathbf{D}|)$ при $\epsilon \to 0$. Наиболее популярные модели – Берковьера-Энгельмана [2]

$$\eta_\epsilon = 2\mu + \tau_s \left(\frac{1}{[\epsilon^2 + |\mathbf{D}|^2]^{1/2}} \right),$$

и Папанистоса [19]

$$\eta_\epsilon = 2\mu + \tau_s \left(\frac{1 - e^{-|\mathbf{D}|/\epsilon}}{|\mathbf{D}|} \right).$$

Кроме гладких регуляризованных моделей, широко используется модель с кусочно-постоянной вязкостью ("biviscosity") [18]. Регуляризованные модели имеют ряд недостатков. Так при $\epsilon \to 0$ (т.е. когда модель приближает модель Бингама) численные методы для регуляризованных моделей становятся менее эффективными и время вычислений быстро растет. Другим недостатком регуляризованной модели является следующее: при значениях функции $\mathbf{f}$ в правой части (1.1) меньших некоторого ненулевого критического значения в среде Бингама течение в области отсутствует. При использовании регуляризованных моделей течение имеет место всегда, хотя и с малыми скоростями. В случае нестационарной задачи регуляризованная модель может неправильно воспроизводить поведение решения при $t \to \infty$, [7]. Кроме того, для регуляризованных моделей не определено понятие жесткой зоны и наличие жесткой зоны вводится условием малости деформаций или условием Мизеса: ($|\boldsymbol{\tau}| = \tau_s$).

Альтернативой регуляризованным моделям могут служить вариационные методы. Применение теории вариационных неравенств к задачам течения жидкостей Бингама изложено в книге [8]. В монографиях [11] и [12] разработаны численные методы решения вариационных неравенств для среды Бингама, основанные на нерегуляризованной модели Бингама и множителях Лагранжа. Однако вначале более широкое распространение среди инженеров получил подход основанный на регуляризации. Одной из причин, по всей видимости, является то, что численные методы на основе вариационных неравенств требуют многократного решения систем уравнений седлового типа для нахождения приближенного решения вариационного неравенства на каждом шаге по времени, в то время как регуляризованная система, хотя и является иногда менее адекватной математической моделью среды, хорошо подходит для применения схем расщепления. Тем не менее, значительный прогресс последних двух десятилетий в численных методах для задач с седловой точкой, см., например, обзор [1], делает подход на основе вариационных неравенств все более привлекательным. О росте интереса к нему говорят многочисленные публикации последних лет: см., например, [15, 21, 22, 25, 26, 27] и обзор [7].

При численном моделировании бингамовских сред традиционно используется метод конечных элементов в качестве метода дискретизации. Однако, происходящее включение модели Бингама (вместе с другими неньютоновскими моделями сплошных сред), как составной части гидродинамических пакетов требует внимание к методу конечных разностей и конечных объемов, традиционным в вычислительной гидродинамике. В настоящей работе рассматривается нерегуляризованная модель среды Бингама на основе вариационных неравенств. Для нахождения приближенного решения модели строятся две разностные схемы. Одна из разностных схем является обобщением хорошо известной МАС схемы на разнесенных сетках. МАС схема была изначально предложена для расчета уравнений Навье-Стокса несжимаемой жидкости, и ее описание можно найти в большинстве книг по вычислительной гидродинамике, например [9]. Вторая схема использует одну сетку (одни и те же узлы) для аппроксимации всех компонент скорости и одну сетку для всех компонент тензора скоростей деформации и давления. Данная схема удобнее с технологической точки зрения и задания краевых условий. Так в трех-мерном случае первая схема требует работы со структурами на семи различных сетках, а вторая только на двух. Однако схема на неразнесенных сетках является неустойчивой в смысле Ладыженской-Бабу́шки-Брецци. Для преодоления этой трудности нами вводится специальная стабилизационная добавка, которая обеспечивает устойчивость схемы, сохраняя второй порядок сходимости в L^2 норме для скорости и первый в L^2 норме для давления. Стабилизированную схему можно использовать как в двумерном, так и в трехмерном случае.

Заметим, что при использовании нерегуляризованной модели Бингама не вполне понятно, как применить метод конечных разностей для аппроксимации вариационных неравенств. Поэтому нам представляется разумным следующий подход: сначала выписывается итерационный метод для нахождения седловой точки пополненного лагранжиана задачи в дифференциальной форме. Далее для дискретизации соответствующих вспомогательных дифференциальных задач, возникающих на каждом шаге метода, строятся разностные схемы. При этом оказывается, что для корректности метода требуется дополнительное условие согласованности для разностных операторов.

В качестве модельного примера в работе рассматривается численное решение задачи о течении бингамовской жидкости в каверне. Полученные результаты (функции скорости, давления и жесткие зоны) хорошо согласуются с известными из литературы.

2 Вариационная постановка и итерационный метод

Дюво и Лионс в [8] доказали, что любое решение нелинейной системы (1.1)–(1.5) удовлетворяет следующей вариационной задачи: найти $\mathbf{v}(t), p(t) \in (H^1(\Omega))^n \times L^2(\Omega)$ такие, что для каждого $t \in (0,T)$ справедливо

$$\rho \int_\Omega \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}(t))\mathrm{d}\mathbf{x} + \rho \int_\Omega (\mathbf{v}(t) \cdot \nabla)\mathbf{v}(t) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}(t))\mathrm{d}\mathbf{x} + \mu \int_\Omega \nabla \mathbf{v}(t) \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{v}(t))\mathrm{d}\mathbf{x} +$$
$$+ \sqrt{2} g \int_\Omega |\mathbf{D}(\mathbf{u})| - |\mathbf{D}(\mathbf{v}(t))|)\mathrm{d}\mathbf{x} \geq \int_\Omega \mathbf{f}(t) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}(t))\mathrm{d}\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{U}_B \tag{2.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(t) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{2.2}$$

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0, \tag{2.3}$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_B(t) \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{2.4}$$

$$\mathbf{U}_B = \{\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^n \,|\, \mathbf{u} = \mathbf{v}_B \text{ на } \Gamma, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\}. \tag{2.5}$$

Там же показывается, что решение (2.1)–(2.5) может быть формально рассмотрено, как решение (1.1)–(1.5). Таким образом задача (2.1)–(2.5) является вариационной постановкой для (1.1)–(1.5), при этом она автоматически включает в себя задачу о предельной поверхности. Давление можно ввести в вариационную формулировку, как множитель лагранжа, соответствующий ограничению $\nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}(t)) = 0$.

Предположим, что течение является установившимся и медленным, т.е. конвективным слагаемым и слагамым, включающим $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$, можно пренебречь. Тогда вариационная постановка принимает вид:

$$\mu \int_\Omega \nabla \mathbf{v} : \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{v})\mathrm{d}\mathbf{x} + \tau_s \int_\Omega |\mathbf{D}(\mathbf{u})| - |\mathbf{D}(\mathbf{v})|\mathrm{d}\mathbf{x} \geq \int_\Omega \mathbf{f} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})\mathrm{d}\mathbf{x}, \forall\, \mathbf{u} \in \mathbf{U}_B, \tag{2.6}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{2.7}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_B \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{2.8}$$

Введем следующий функционал

$$J(\mathbf{u}) = \mu \int_\Omega |\mathbf{D}(\mathbf{u})|^2 \mathrm{d}\mathbf{x} + \tau_s \int_\Omega |\mathbf{D}(\mathbf{u})|\mathrm{d}\mathbf{x} - 2 \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}\, \mathrm{d}\mathbf{x}\ .$$

В работе [8] доказано, что решение $\mathbf{v}$ задачи (2.6)–(2.8) является точкой минимума функционала J на U_B^*:

$$\mathbf{v} = \arg \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}_B} J(\mathbf{u})\ .$$

Главная сложность при нахождении численного решения вариационной задачи (2.6)–(2.8) связана с недифференцируемостью слагаемого $\int_\Omega |\mathbf{D}(\mathbf{v})|\mathrm{d}\mathbf{x}$. В монографии [11] предложено несколько способов преодоления этой трудности. Широкое распространение получил метод множителей

Лагранжа. Основная идея данного подхода заключается в разделении нелинейности и дифференцирования, которое происходит следующим образом. Введем независимую переменную $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{D}(\mathbf{v}) \in Q$, где $Q = \{\mathbf{q} \mid \mathbf{q} \in (L^2(\Omega))^{n\times n}; \mathbf{q}^T = \mathbf{q}\}$. Определим функциональное пространство

$$W = \{\{\mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}\} \mid \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^n,\ \boldsymbol{\gamma} \in Q,\ \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{D}(\mathbf{v})\} \tag{2.9}$$

и лагранжиан

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}; \boldsymbol{\gamma}; \boldsymbol{\tau}) = \mu \int_\Omega |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2 \mathrm{d}\mathbf{x} + \tau_s \int_\Omega |\gamma| \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega (\mathbf{D}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\gamma}) : \boldsymbol{\tau}\, \mathrm{d}\mathbf{x} - 2\int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\, \mathrm{d}\mathbf{x},$$

где $\boldsymbol{\tau} \in Q$ является множителем Лагранжа, соответствующим ограничению $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{D}(\mathbf{v})$; $\boldsymbol{\tau}$ можно интерпретировать как девиатор тензора напряжений. Тогда решение $\mathbf{v}$ является седловой точкой $\mathcal{L}$, т.е. решением задачи

$$\min_{\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{v}} \max_{\boldsymbol{\tau}} \mathcal{L}(\mathbf{v}; \boldsymbol{\gamma}; \boldsymbol{\tau})$$

При фиксированных $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ лагранжиан не является коэрцитивным по переменной $\mathbf{v}$. Поэтому в вычислительных целях используется метод штрафа относительно ограничения $\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{D}(\mathbf{v}) = 0$. Для этого определим расширенный лагранжиан $\mathcal{L}_r : (H^1(\Omega))^2 \times Q \times Q \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}_r(\mathbf{v}; \boldsymbol{\gamma}; \boldsymbol{\tau}) = \mathcal{L}(\mathbf{v}; \boldsymbol{\gamma}; \boldsymbol{\tau}) + r\int_\Omega |\mathbf{D}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\gamma}|^2 \mathrm{d}\mathbf{x}, \quad r \geq 0. \tag{2.10}$$

Расширенный лагранжиан является коэрцитивным по отношению к $\mathbf{v}$ при всех $r > 0$. Следовательно, при фиксированных $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\gamma}$, $\mathcal{L}_r$ можно минимизировать по $\mathbf{v}$ на $\mathbf{U}_B$, несмотря на то, что эта операция невозможна практически при $r = 0$. Для решения задачи (2.6)–(2.8) в [12] предлагется итерационный метод нахождения седловой точки $\mathcal{L}_r$. Алгоритм, приведенный ниже, можно рассматривать как аналог метода Узавы для линейных задач с седловой точкой.

Пусть заданы произвольные $\boldsymbol{\gamma}^0, \boldsymbol{\tau}^0$. Для $n = 0, 1, 2, \ldots$ последовательно выполняем следующие шаги. Найти $\mathbf{v}^{n+1} \in \mathbf{U}_B$, такую что

$$\mathcal{L}_r(\mathbf{v}^{n+1}; \boldsymbol{\gamma}^n; \boldsymbol{\tau}^n) \leq \mathcal{L}_r(\mathbf{u}; \boldsymbol{\gamma}^n; \boldsymbol{\tau}^n) \quad \forall\ \mathbf{u} \in\ \mathbf{U}_B$$

Далее найти $\boldsymbol{\gamma}^{n+1}$, такую что

$$\mathcal{L}_r(\mathbf{v}^{n+1}; \boldsymbol{\gamma}^{n+1}; \boldsymbol{\tau}^n) \leq \mathcal{L}_r(\mathbf{v}^{n+1}; \boldsymbol{\mu}; \boldsymbol{\tau}^n) \quad \forall\ \boldsymbol{\mu} \in\ Q.$$

Наконец, положить

$$\boldsymbol{\tau}^{n+1} := \boldsymbol{\tau}^n + 2\tilde{r}_n(\mathbf{D}(\mathbf{v}^{n+1}) - \boldsymbol{\gamma}^{n+1}). \tag{2.11}$$

Используя вариационный анализ, алгоритм можно переписать в следующем виде, см. [12].

Шаг 1: Предполагая $\boldsymbol{\gamma}^n$ и $\boldsymbol{\tau}^n$ известными, найти $\mathbf{v}^{n+1}$ и p^{n+1} как решение задачи:

$$-r\triangle\mathbf{v}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \mathbf{div}\ (\boldsymbol{\tau}^n - 2r\boldsymbol{\gamma}^n) + \mathbf{f}, \tag{2.12}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v}^{n+1} = 0, \tag{2.13}$$

$$\mathbf{v}^{n+1}|_\Sigma = \mathbf{v}_B. \tag{2.14}$$

Шаг 2: Вычислить $\boldsymbol{\gamma}^{n+1}$ как

$$\boldsymbol{\gamma}^{n+1} := \begin{cases} 0, & \text{если } |\boldsymbol{\tau}^n + 2r\mathbf{D}(\mathbf{v}^{n+1})| < \tau_s, \\ (1 - \frac{\tau_s}{|\boldsymbol{\tau}^n + 2r\mathbf{D}(\mathbf{v}^{n+1})|})\frac{\boldsymbol{\tau}^n + 2r\mathbf{D}(\mathbf{v}^{n+1})}{2(r+\mu)}, & \text{иначе} \end{cases} \tag{2.15}$$

Шаг 3: Вычислить $\boldsymbol{\tau}^{n+1}$ согласно (2.11).

Если $\|\boldsymbol{\tau}^{n+1} - \boldsymbol{\tau}^n\| > \varepsilon$ для некоторого заданного $\varepsilon > 0$, то переходим к шагу 1.

Сходимость алгоритма гарантируется теоремами из [12] для всех $r > 0$. Что касается выбора параметров $\tilde{r}_n$, то в большинстве известных нам работ использовалось значение $\tilde{r}_n = r/2$ для всех n. Основным достоинством данного алгоритма является то, что нахождение седловой точки недифференцируемого функционала сводится к последовательности стандартных задач. Шаги 2 и 3 сводятся к явным вычислениям поточечно. Первый шаг алгоритма требует решения задачи Стокса. В настоящее время это является стандартной задачей, для нахождения численного решения которой существует ряд эффективных методов [20, 1].

3 Две разностные схемы

Как уже отмечалось во введении, большинство работ по численному моделированию бингамовских сред на основе нерегуляризованной модели и вариационных неравенств применяет для дискретизации метод конечных элементов. В настоящей работе для этой цели рассматриваются две разностные схемы. Одна из разностных схем является обобщением хорошо известной MAC схемы на разнесенных сетках. Вторая схема использует одну сетку (одни и те же узлы) для аппроксимации всех компонент скорости и тензора скоростей деформации.

Непосредственная дискретизация системы (1.1)–(1.3) затруднительна, поскольку заранее неизвестна область $\Omega\backslash\Omega_0$, в которой выполняются уравнения системы. Поэтому разумным представляется построение разностной схемы непосредственно для приближения задач, возникающих на шагах 1–3 алгоритма из предыдущего раздела. Отметим, что подобный подход также использован в работах [26, 27] для построения дискретизации методом конечных объемов. Применив этот подход, мы столкнулись со следующим эффектом – в некоторых случаях разностное решение заметно зависело от выбора конкретного значения параметра r. Параметр r не входит в исходную постановку задачи и является вспомогательным, поэтому такого рода зависимость трудно считать приемлемой. Ниже, в лемме 1 приводится достаточное условие того, что разностное решение не зависит от параметра r.

Пусть Δ_h, $\mathbf{div}_h$, $\mathbf{D}_h$, ∇_h аппроксимируют векторные дифференциальные операторы, и $\nabla_h\cdot$ аппроксимирует (скалярный) оператор дивергенции на соответствующих пространствах разностных функций и тензор-функций. Рассмотрим систему разностных уравнений

$$
\begin{aligned}
-\mathbf{div}_h \boldsymbol{\tau}_h + \nabla_h p_h &= \mathbf{f}_h, && (3.1)\\
\nabla_h \cdot \mathbf{v}_h &= 0, && (3.2)\\
\mathbf{v}_h|_\Sigma &= \mathbf{v}_B. && (3.3)
\end{aligned}
$$

и определяющих соотношений

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{\tau}_h = 2\mu \mathbf{D}_h(\mathbf{v}_h) + \tau_s \frac{\mathbf{D}_h(\mathbf{v}_h)}{|\mathbf{D}_h(\mathbf{v}_h)|}, \text{ если } |\mathbf{D}_h(\mathbf{v}_h)| \neq 0, \qquad (3.4)\\
|\boldsymbol{\tau}_h| \leq \tau_s, \text{ если } |\mathbf{D}_h(\mathbf{v}_h)| = 0.
\end{gathered}
$$

Примеры разностных пространств и операторов, которые придадут смысл системе (3.1)–(3.4) будут приведены далее в этом разделе. Сейчас докажем следующий результат.

Лемма 1 *Предположим, что система разностных уравнений и определяющих соотношений* (3.1)–(3.4) *может иметь только одно решение. Потребуем выполнения условия*

$$
\Delta_h = 2\mathbf{div}_h \mathbf{D}_h \quad \textit{на} \;\; \mathrm{Ker}(\nabla_h\cdot) \qquad (3.5)
$$

Пусть для разностного аналога Алгоритма (A1) выполнено $\|\boldsymbol{\tau}_h^{n-1} - \boldsymbol{\tau}_h^n\| = 0$ *и* $\|\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n\| = 0$ *для некоторого достаточно большого* n. *Тогда набор разностных функций* $\mathbf{v}_h^{n+1}, p_h^{n+1}, \boldsymbol{\tau}_h^{n+1}$ *не зависят от параметра* $r > 0$ *и удовлетворяет системе* (3.1)–(3.4).

Доказательство. Равенства $\|\boldsymbol{\tau}_h^{n+1} - \boldsymbol{\tau}_h^n\| = 0$, $\|\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n\| = 0$ и (2.11) влекут

$$\mathbf{D}_h(\mathbf{v}_h^{n+1}) = \boldsymbol{\gamma}_h^n. \tag{3.6}$$

В силу (2.13) имеем $\mathbf{v}_h \in \mathrm{Ker}(\nabla_h \cdot)$. Поэтому с помощью равенств (3.5) и (3.6) система (2.12)–(2.14) влечет:

$$\begin{aligned}
\mathbf{div}_h \boldsymbol{\tau}_h^n + \nabla_h p_h^{n+1} &= \mathbf{f}_h, && (3.7)\\
\nabla_h \cdot \mathbf{v}_h^{n+1} &= 0, && (3.8)\\
\mathbf{v}_h^{n+1}|_\Sigma &= \mathbf{v}_B. && (3.9)
\end{aligned}$$

Для удобства введем следующее обозначение

$$\mathbf{T}_h = \boldsymbol{\tau}_h^n + 2r\mathbf{D}_h(\mathbf{v}_h^{n+1}) \tag{3.10}$$

Учитывая (3.6), получаем из (2.15)

$$\mathbf{D}_h(\mathbf{v}_h^{n+1}) := \begin{cases} 0, & \text{если } |\mathbf{T}_h| < \tau_s, \\ (1 - \frac{\tau_s}{|\mathbf{T}_h|})\frac{\mathbf{T}_h}{2(r+\mu)}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Данное соотношение эквивалентно следующему

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_h = 2(\mu + r)\mathbf{D}_h(\mathbf{v}_h^{n+1}) + \tau_s \frac{\mathbf{D}_h(\mathbf{v}_h^{n+1})}{|\mathbf{D}_h(\mathbf{v}_h^{n+1})|}, &\text{ если } |\mathbf{D}_h(\mathbf{v}_h^{n+1})| \neq 0,\\
|\mathbf{T}_h| \leq \tau_s, &\text{ если } |\mathbf{D}_h(\mathbf{v}_h^{n+1})| = 0, .
\end{aligned}$$

Благодаря (3.10) получаем

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau}_h^n = 2\mu\mathbf{D}_h(\mathbf{v}_h^{n+1}) + \tau_s \frac{\mathbf{D}_h(\mathbf{v}_h^{n+1})}{|\mathbf{D}_h(\mathbf{v}_h^{n+1})|}, &\text{ если } |\mathbf{D}_h(\mathbf{v}_h^{n+1})| \neq 0,\\
|\boldsymbol{\tau}_h^n| \leq \tau_s, &\text{ если } |\mathbf{D}_h(\mathbf{v}_h^{n+1})| = 0.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Таким образом, разностное решение $\mathbf{v}_h^{n+1}, p_h^{n+1}, \boldsymbol{\tau}_h^n$ удовлетворяет системе разностных уравнений и определяющих соотношений (3.7)–(3.9), (3.11), которая эквивалентна (3.1)–(3.3), (3.4). Теперь утверждение теоремы следует из предположения о единственности разностного решения (3.1)–(3.1), (3.4).
□

Хорошо известно (см., например, [13]), что для устойчивости методов дискретизации уравнений (Навье-)Стокса несжимаемой вязкой жидкости важным является выполнение, так называемого, LBB (Ладыженской-Бабу́шки-Брецци) условия. Более детально мы обсудим это условие и условие согласованности (3.5) для каждой из рассматриваемых схем ниже. Так как модель Бингама является в некотором смысле обобщением модели Навье-Стокса, а задача Стокса является вспомогательной в рассматриваемом итерационном методе, то проверка устойчивости в смысле выполнения LBB условия представляется необходимым элементом построения разностной схемы.

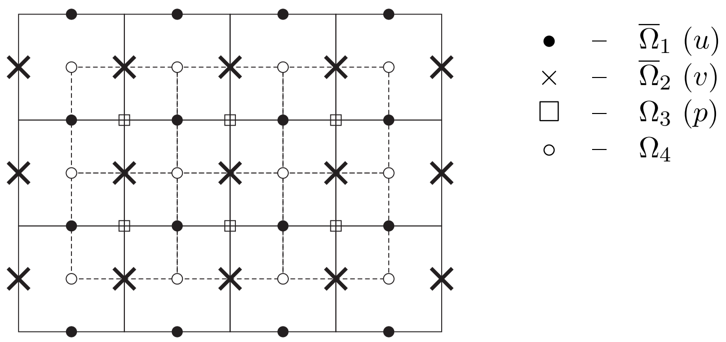

Рис. 1: Разнесенные сетки.

3.1 Схема на разнесенных сетках

Рассмотрим $\Omega = (0,1)^2$. Положим $h_x = N_1^{-1}$ и $h_y = N_2^{-1}$ для заданных натуральных N_1, N_2. Определим следующие сеточные области:

$$\begin{aligned}
\bar{\Omega}_1 &= \{x_{ij} = ((i+1/2)h_x, jh_y) \mid i = 0,...,N_1-1, j = 0,...,N_2\},\\
\bar{\Omega}_2 &= \{x_{ij} = (ih_x, (j+1/2)h_y) \mid i = 0,...,N_1, j = 0,...,N_2-1\},\\
\Omega_3 &= \{x_{ij} = (ih_x, jh_y) \mid i = 1,...,N_1-1, j = 1,...,N_2-1\},\\
\Omega_4 &= \{x_{ij} = ((i+1/2)h_x, (j+1/2)h_y) \mid i = 0,...,N_1-1, j = 0,...,N_2-1\}.
\end{aligned}$$

Взаимное расположение данных сеток проиллюстрировано на рисунке 3.1. Определим пространства компонент сеточных функций скорости

$$\begin{aligned}
U_h^0 &= \{u_{ij} := u(x_{ij}) \mid x_{ij} \in \bar{\Omega}_1,\ u_{0,j} = u_{0,N_1-1} = u_{i,0} = u_{N_2,0} = 0\},\\
V_h^0 &= \{v_{ij} := v(x_{ij}) \mid x_{ij} \in \bar{\Omega}_2,\ v_{0,j} = v_{0,N_1} = v_{i,0} = v_{N_2-1,0} = 0\}.
\end{aligned}$$

Через U_h, V_h будем обозначать пространства сеточных функций, заданных только во ‘внутренних’ точках Ω_1 и Ω_2. Пространство давления

$$P_h = \{p_{ij} := p(x_{ij}) \mid x_{ij} \in \Omega_3,\ \sum_{i,j} p_{ij} = 0\}$$

Далее, (1,1) и (2,2) компоненты тензора скоростей деформаций ($\gamma_h^{kk} = \{\gamma_{ij}^{kk}\}$) и девиатора тензора напряжений ($\tau_h^{kk} = \{\tau_{ij}^{kk}\}$, $k = 1,2$) заданы на сетке Ω_3, в то время как смешанные (внедиагональные) компоненты $\gamma_h^{kl} = \{\gamma_{ij}^{kl}\}, \tau_h^{kl} = \{\tau_{ij}^{kl}\}$ $k \neq l$, заданы на сетке Ω_4. Соответствующее пространство сеточных функций обозначим через Q_h. Таким образом, $\boldsymbol{\gamma}_h \in Q_h$ и $\boldsymbol{\tau}_h \in Q_h$.

Определим разностные аналоги дифференциальных операторов $\Delta_h : U_h^0 \times V_h^0 \to U_h \times V_h$ – стандартная пятиточечная аппроксимация оператора Лапласа на сетках Ω_1 и Ω_2. Сеточные операторы градиента $\nabla_h : P_h \to U_h \times V_h$ и дивергенции $\nabla_h \cdot : U_h^0 \times V_h^0 \to P_h$:

$$(\nabla_h p_h)_{i,j} = \left(\frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{h_x}, \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{h_y}\right), \tag{3.12}$$

$$(\nabla_h \cdot \mathbf{v}_h)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x} + \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_y}. \tag{3.13}$$

Сеточные операторы векторной дивергенции $\mathbf{div}_h : Q_h \to U_h \times V_h$ и вычисления тензора скорости деформаций $\mathbf{D}_h : U_h^0 \times V_h^0 \to Q_h$ зададим следующим образом:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{div}_h \boldsymbol{\tau}_h)_{i,j} &= \left(\frac{\tau^{11}_{i+1,j} - \tau^{11}_{i,j}}{h_x} + \frac{\tau^{12}_{i,j} - \tau^{12}_{i,j-1}}{h_y}, \frac{\tau^{21}_{i,j} - \tau^{21}_{i-1,j}}{h_x} + \frac{\tau^{22}_{i,j+1} - \tau^{22}_{i,j}}{h_y} \right), & (3.14)\\
(D_h^{11}\mathbf{v}_h)_{i,j} &= \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x}, \quad (D_h^{22}\mathbf{v}_h)_{i,j} = \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_y} \quad \text{на } \Omega_3, & (3.15)\\
(D_h^{12}\mathbf{v}_h)_{i,j} &= (D_h^{21}\mathbf{v}_h)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{2h_y} + \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{2h_x} \quad \text{на } \Omega_4. & (3.16)
\end{aligned}
$$

Заметим, что соотношение (2.15) для вычисления $\boldsymbol{\gamma}_h$ требует задания $|\boldsymbol{\tau}_h + 2r\mathbf{D}_h(\mathbf{v}_h)|$ в тех же узлах сеток, где определены соответствующие компоненты $\boldsymbol{\tau}_h$ и $\mathbf{D}_h$. Для доопределения недостающих компонент использовалось простое усреднение по четырем точкам. Например для вычисления $\gamma^{11}_{i,j}$ требуется определить τ_h^{12} и D_h^{12} в точке $x_{i,j} \in \Omega_3$. Полагаем

$$
\begin{aligned}
D_h^{12}(x) &= D_h^{21}(x) = \frac{1}{4}(D^{12}_{i,j} + D^{12}_{i+1,j} + D^{12}_{i,j+1} + D^{12}_{i+1,j+1}),\\
\tau_h^{12}(x) &= \tau_h^{21}(x) = \frac{1}{4}(\tau^{12}_{i,j} + \tau^{12}_{i+1,j} + \tau^{12}_{i,j+1} + \tau^{12}_{i+1,j+1}) \quad \text{для } x \in \Omega_3.
\end{aligned}
$$

Аналогично вычисляются дополнительные значения в промежуточных точках для величин D_h^{11}, D_h^{22}, τ_h^{11}, τ_h^{22}.

Условие LBB устойчивости для данной схемы можно записать следующим образом. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $\| \cdot \|$ обозначают евклидово скалярное произведение и норму в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что $0 < c \le h_x h_y^{-1} \le C$ с некоторыми абсолютными константами c и C. Существует константа $C_0 > 0$, не зависящая от $h = \max\{h_x, h_y\}$, такая что

$$
\sup_{\mathbf{v}_h \in U_h \times V_h} \frac{\langle p_h, \nabla_h \cdot \mathbf{v}_h \rangle}{\langle -\Delta_h \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h \rangle^{\frac{1}{2}}} \ge C_0 \|p_h\| \qquad \forall\, p_h \in P_h. \tag{3.17}
$$

Справедливость этого условия доказана в [14]. Рассмотрим оператор $S_h = \nabla_h \cdot \Delta_h^{-1} \nabla_h$. Легко убедиться, что S_h является самосопряженным (относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$) оператором на P_h, а неравенство (3.17) эквивалентно

$$
C_0 I_h \le S_h, \tag{3.18}
$$

где I_h – единичный оператор на P_h. Оценка (3.18) является также ключевой для быстрой сходимости многих итерационных методов решения задачи Стокса.

В [17] для задачи Стокса доказывается, что схема обладает первым порядком сходимости в сеточных аналогах H^1 нормы для скорости и L^2 нормы для давления. На практике наблюдается второй порядок сходимости в L^2 норме для скорости. Здесь уместно заметить, что первый порядок аппроксимации краевых условий для $\mathbf{v}$ в предложенной выше схеме можно улучшить до второго [9]. Существующие результаты сходимости для задачи Стокса и второй порядок аппроксимации дифференциальных операторов в (3.14)–(3.16) на соответствующих сетках и операторов усреднения позволяют рассчитывать на сходимость решения разностной схемы для задачи Бингама к решению дифференциальной задачи. Осталось проверить условие корректности из леммы 1. Действительно, с помощью непосредственных вычислений убеждаемся в справедливости (3.5).

3.2 Разностная схема на неразнесенных сетках

С точки зрения удобства реализации и аппроксимации краевых условий более привлекательной может представляться схема, в которой для аппроксимации всех компонент скорости и компонент тензора скоростей деформации используются неразнесенные сетки. Ниже мы построим такую схему и обсудим пути преодоления трудностей, связанных с LBB неустойчивостью подобной схемы.

Как и в предыдущем параграфе рассмотрим $\Omega = (0,1)^2$ и положим $h_x = N_1^{-1}$ и $h_y = N_2^{-1}$. Определим следующие сеточные области:

$$
\begin{aligned}
\bar{\Omega}_1 &= \{x_{ij} = (ih_1, jh_2) \mid i = 0, ..., N_1, j = 0, ..., N_2\}, \\
\Omega_2 &= \{x_{ij} = ((i+\frac{1}{2})h_1, (j+\frac{1}{2})h_2) \mid i = 0, ..., N_1 - 1, j = 0, ..., N_2 - 1\}.
\end{aligned}
$$

Определим пространства компонент сеточных функций скорости и давления

$$
\begin{aligned}
U_h^0 &= \{\mathbf{u}_{i,j} = (u_{ij}, v_{ij}) := (u(x_{ij}), v(x_{ij})) \mid x_{ij} \in \bar{\Omega}_1,\ \mathbf{u}_{0,j} = \mathbf{u}_{0,N_1} = \mathbf{u}_{i,0} = \mathbf{u}_{N_2,0} = \mathbf{0}\}, \\
P_h &= \{p_{ij} := p(x_{ij}) \mid x_{ij} \in \Omega_2,\ \sum_{i,j} p_{ij} = 0\}
\end{aligned}
$$

Через U_h будем обозначать пространства сеточных вектор функций, заданных только во ‘внутренних’ точках Ω_1. Все компоненты тензора скоростей деформаций ($\boldsymbol{\gamma}_h = \{\boldsymbol{\gamma}_{ij}\}$) и девиатора тензора напряжений ($\boldsymbol{\tau}_h = \{\boldsymbol{\tau}_{ij}\}$) заданы на сетке Ω_2. Соответствующее пространство сеточных тензор функций обозначим через Q_h.

Определим сеточные операторы градиента $\nabla_h : P_h \to U_h$ и дивергенции $\nabla_h \cdot : U_h^0 \to P_h$:

$$
\begin{aligned}
(\nabla_h p_h)_{i,j} &= \left(\frac{p_{i,j} - p_{i-1,j} + p_{i,j-1} - p_{i-1,j-1}}{2h_x}, \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1} + p_{i-1,j} - p_{i-1,j-1}}{2h_y}\right), \\
(\nabla_h \cdot \mathbf{v}_h)_{i,j} &= \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1} + u_{i+1,j} - u_{i,j}}{2h_x} + \frac{v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j} + v_{i,j+1} - v_{i,j}}{2h_y},
\end{aligned}
$$

Сеточные операторы векторной дивергенции $\mathbf{div}_h : Q_h \to U_h$ и вычисления тензора скорости деформаций $\mathbf{D}_h : U_h^0 \to Q_h$ зададим следующим образом:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{div}_h \boldsymbol{\tau}_h)_{i,j} &= \Big(\frac{\tau^{11}_{i,j} - \tau^{11}_{i-1,j} + \tau^{11}_{i,j-1} - \tau^{11}_{i-1,j-1}}{2h_x} + \frac{\tau^{12}_{i,j} - \tau^{12}_{i,j-1} + \tau^{12}_{i-1,j} - \tau^{12}_{i-1,j-1}}{2h_y}, \\
&\quad \frac{\tau^{21}_{i,j} - \tau^{21}_{i-1,j} + \tau^{21}_{i,j-1} - \tau^{21}_{i-1,j-1}}{2h_x} + \frac{\tau^{22}_{i,j} - \tau^{22}_{i,j-1} + \tau^{22}_{i-1,j} - \tau^{22}_{i-1,j-1}}{2h_y}\Big), \\
(D_h^{11}\mathbf{v}_h)_{i,j} &= \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1} + u_{i+1,j} - u_{i,j}}{2h_x}, \quad (D_h^{22}\mathbf{v}_h)_{i,j} = \frac{v_{i+1,j+1} - v_{i+1,j} + v_{i,j+1} - v_{i,j}}{2h_y}, \\
(D_h^{12}\mathbf{v}_h)_{i,j} &= (D_h^{21}\mathbf{v}_h)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - u_{i,j}}{4h_y} + \frac{v_{i+1,j+1} - v_{i,j+1} + v_{i+1,j} - v_{i,j}}{4h_x}
\end{aligned}
$$

Аппроксимации оператора Лапласа диктуется необходимостью удовлетворить условию согласованности операторов Δ_h, $\mathbf{div}_h$, $\mathbf{D}_h$ и $\nabla_h\cdot$ из леммы 1. Для $\mathbf{x}_h$, таких что $\nabla_h \cdot \mathbf{v}_h = 0$, несложно проверить

$$
\begin{aligned}
&\nabla_h \cdot (\mathbf{D}_h \mathbf{v}_h)_{i,j} \\
&\quad = \frac{1}{4h_1^2}(v_{i+1,j+1} - 2v_{i,j+1} + v_{i-1,j+1} + 2v_{i+1,j} - 4v_{i,j} + 2v_{i-1,j} + v_{i+1,j-1} - 2v_{i,j-1} + v_{i-1,j-1}) \\
&\quad + \frac{1}{4h_2^2}(v_{i+1,j+1} + 2v_{i,j+1} + v_{i-1,j+1} - 2v_{i+1,j} - 4v_{i,j} - 2v_{i-1,j} + v_{i+1,j-1} + 2v_{i,j-1} + v_{i-1,j-1}) \\
&\quad =: (\Delta_h \mathbf{v}_h)_{ij}
\end{aligned}
$$

Заметим, что при $h_1 = h_2 = h$ из дявититочечной аппроксимации получаем так называемую аппроксимацию "косой крест":

$$
(\Delta_h v_h)_{i,j} = \frac{v_{i-1,j-1} + v_{i+1,j-1} + v_{i+1,j+1} + v_{i-1,j+1} - 4v_{i,j}}{2h^2} \tag{3.19}
$$

Отметим, что в случае использования обычного пятиточечного шаблона для Δ_h при решении задачи с фиксированными τ_s и μ численные эксперименты, действительно, показали зависимость разностного решения от r (в первую очередь, это было заметно по величине жестких зон).

Для задачи Стокса построенная схема является LBB неустойчивой. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что сеточный оператор градиента обладает нетривиальным ядром на пространстве P_h :

$$\mathrm{Ker}(\nabla_h) = span(p^1, p^2), \quad p^1_{i,j} = (-1)^{i+j} - 1, p^2_{i,j} = (-1)^{i+j+1} - 1,$$

следовательно оператор S_h имеет нетривиальное ядро на P_h и неравенство (3.18) выполнено только с $C_0 = 0$. Следовательно конечно-разностное LBB условие устойчивости (3.17) не выполнено. Более того, в трех-мерном случае размерность ядра увеличивается с уменьшением h [16]. По этой причине схемы на неразнесенных сетках менее популярны в вычислительной гидродинамики для вязких несжимаемых жидкостей, чем схемы на разнесенных сетках. Отметим, что ряд авторов, см. [24] и цитированную там литературу, используют неразнесенные сетки вместе со схемами расщепления для расчета вязких несжимаемых течений. В этих работах вводится специальная добавка в уравнения для давления, которая в некотором смысле эквивалентна добавлению бигармонического оператора в уравнение неразрывности. Причем величина добавки, зависит как от шага по пространству, так и по времени. Это накладывает условие малости на шаг по времени, делая метод не очень привлекательным для расчета стационарных или медленно меняющихся течений. В данной работе предлагается другой подход к стабилизации схемы на неразнесенных сетках.

Похожая проблема с LBB неустойчивостью возникает в методе конечных элементов для задачи Стокса, если, к примеру, используются многочлены одинакового порядка для аппроксимации $\mathbf{u}$ и p. В этом случае *стабилизированные* методы строятся на основе вариационного метода Петрова-Галеркина, полученные схемы обладают устойчивостью и оптимальным порядком сходимости. Как результат, LBB неустойчивые конечные элементы получили широкое распространение на практике и имеют твердую математическую основу, см., например, обзорную работу [5] и библиографию в ней.

В недавней работе [4] был предложен метод стабилизации LBB-неустойчивых элементов низкого порядка, не основанный явно на вариационной формулировке задачи Стокса. Поскольку используемые разностные схемы имеют аналогии с методами конечных элементов низкого порядка (это использовалось, в частности, в [17] для анализа сходимости MAC схемы), то представляется естественным адаптация подобного подхода для стабилизации разностной схемы на неразнесенных сетках. Так рассмотренной в этом разделе разностной схеме естественно сопоставить метод конечных элементов $Q_1 - Q_0$ (кусочно-билинейная аппроксимация скорости и кусочно-постоянная для давления) относительно сетки Ω_1. Данный метод конечных элементов является LBB неустойчивым. Математической основой для построения устойчивых схем является справедливость следующего 'слабого' LBB неравенства для элементов $Q_1 - Q_0$, [10, 23, 4]:

$$\sup_{\mathbf{u}_h \in U_h} \frac{(p_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h)}{\|\nabla \mathbf{u}_h\|} \geq C_0 \|p_h\| - C_1 \left(h \sum_{\tau} \int_{\tau} [p_h]^2 \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall\, p_h \in P_h, \tag{3.20}$$

с некоторыми положительными константами C_0, C_1, не зависящими от h. В последнем слагаемом происходит суммирование по всем внутренним граням (или ребрам, если $\Omega \in \mathbb{R}^2$) элементов триангуляции, $[p_h]$ обозначает величины скачка в p_h при переходе через грань. Таким образом, стабилизация метода сводится к добавлению (тем или иным способом) в лагранжиан задачи члена $-G(p)$ такого, что $G(p) \geq h^{\frac{1}{2}} \|[p_h]_\tau\|$, а порядок аппроксимации схемы на гладких решениях остается, по возможности, оптимальным. Так в [4] показано, что для стабилизации элементов

$Q_1 - Q_0$ достаточно пополнить Лагранжиан задачи членом $-\int_\Omega (p - \Pi p)^2\, \mathrm{d}\mathbf{x}$, где Π – некоторый оператор локальной интерполяции из P_h в пространство кусочно-билинейных непрерывных функций.

Для стабилизации схемы на неразнесенных сетках определим далее оператор $\Pi_h : P_h \to R_h$, где R_h – пространство сеточных функций, заданных на $\bar{\Omega}_1$. Пусть $x_{ij} \in \bar{\Omega}_1$, обозначим

$$\omega(x_{ij}) = \{x_{kl} \in \Omega_2 \mid |x_{kl} - x_{ij}| = (h_x^2 + h_y^2)^{\frac{1}{2}}/2\},$$

тогда

$$(\Pi_h p_h)_{ij} = |\omega(x_{ij})|^{-1} \sum_{x_{kl} \in \omega(x_{ij})} p_{kl}.$$

Оператор Π_h можно рассматривать, как сеточную 'интерполяцию' функции заданной на сетке Ω_2, функцией заданной на сетке Ω_1. Π_h естественным образом можно определить и в случае неравномерных сеток. Пусть Π_h^* – оператор сопряженный относительно евклидового скалярного произведения. Положим

$$G_h := (I_h - \Pi_h^* \Pi_h), \qquad G_h : P_h \to P_h.$$

В стабилизированной схеме на неразнесенных сетках уравнение неразрывности $\nabla \mathbf{v} = 0$ аппроксимируется на сетке Ω_2 следующим образом:

$$\nabla_h \cdot \mathbf{v}_h + G_h p_h = 0.$$

Система алгебраических уравнений для решения задачи Стокса (шаг 1 в алгоритме из § 2) для построенной схемы принимает вид

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}$$

Матрица C является разреженной и имеет блочную структуру. По аналогии с (3.18) условие устойчивости для стабилизированной схемы может быть записано в операторном виде:

$$C_0 I_h \le \nabla_h \cdot \Delta_h^{-1} \nabla^h - G_h \quad \text{на} \quad P_h, \tag{3.21}$$

или в матричном виде $C_0 I \le B A^{-1} B^T + C$ с некоторой константой $C_0 > 0$, не зависящей от h.

Ниже мы приведем результаты численных экспериментов для задачи Стокса, показывающие, что предложенная схема является устойчивой и имеет второй порядок сходимости для $\mathbf{u}$ и первый для p в сеточном аналоге L_2-нормы. Математический анализ данной схемы, включая проверку (3.21), будет предметом отдельной статьи. Здесь мы только отметим следующее простое свойство оператора G_h, которое можно проверить непосредственными вычислениями:

Лемма 2 *Пусть сетка является равномерной, тогда $G_h = \frac{1}{4} h^2 \Delta_h^p$, где Δ_h^p – некоторая аппроксимация оператора Лапласа с краевыми условиями Неймана второго порядка на Ω_2, имеющая девяти-точечный шаблон.*

Таким образом стабилизационная добавка имеет второй порядок по h на гладких решениях.

4 Численные результаты

Рассмотрим задачу Стокса в $(0,1)^2$ с известными аналитическими решениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \Big(\frac{1}{4\pi^2}(1 - \cos 2\pi x) \sin 2\pi y, \frac{1}{4\pi^2} \sin 2\pi x (1 - \cos 2\pi y)\Big), \\ p &= \frac{1}{\pi} \sin 2\pi x \sin 2\pi y \end{aligned} \tag{4.1}$$

Таблица 1: Сходимость разностного решения и число итераций, пример (4.1).

h	$\lvert\mathbf{e}_h\rvert_{L_2}$	$\frac{\lvert\mathbf{e}_h\rvert_{L_2}}{\lvert\mathbf{e}_{2h}\rvert_{L_2}}$	$\log_2\frac{\lvert\mathbf{e}_h\rvert_{L_2}}{\lvert\mathbf{e}_{2h}\rvert_{L_2}}$	$\lvert r_h\rvert_{L_2}$	$\frac{\lvert r_h\rvert_{L_2}}{\lvert r_{2h}\rvert_{L_2}}$	$\log_2\frac{\lvert r_h\rvert_{L_2}}{\lvert r_{2h}\rvert_{L_2}}$	#iter
Схема 1 (MAC)							
$h=\frac{1}{16}$	1.37e-3	3.61	1.85	4.57e-2	1.97	0.97	16
$h=\frac{1}{32}$	3.79e-4	3.79	1.92	2.31e-2	1.99	0.9	19
$h=\frac{1}{64}$	9.98e-5			1.16e-2			25
Схема 2 (неразнесенные сетки)							
$h=\frac{1}{16}$	1.24e-3	3.68	1.88	4.43e-2	1.99	0.99	15
$h=\frac{1}{32}$	3.37e-4	3.86	1.95	2.22e-2	2.00	1.00	15
$h=\frac{1}{64}$	8.73e-5			1.11e-2			16

Таблица 2: Сходимость разностного решения и число итераций, пример (4.2).

h	$\lvert\mathbf{e}_h\rvert_{L_2}$	$\frac{\lvert\mathbf{e}_h\rvert_{L_2}}{\lvert\mathbf{e}_{2h}\rvert_{L_2}}$	$\log_2\frac{\lvert\mathbf{e}_h\rvert_{L_2}}{\lvert\mathbf{e}_{2h}\rvert_{L_2}}$	$\lvert r_h\rvert_{L_2}$	$\frac{\lvert r_h\rvert_{L_2}}{\lvert r_{2h}\rvert_{L_2}}$	$\log_2\frac{\lvert r_h\rvert_{L_2}}{\lvert r_{2h}\rvert_{L_2}}$	#iter
Схема 1 (MAC)							
$h=\frac{1}{16}$	1.29e-3	3.78	1.91	4.81e-2	1.95	0.96	20
$h=\frac{1}{32}$	3.41e-4	3.87	1.95	2.46e-2	1.98	0.98	26
$h=\frac{1}{64}$	8.80e-5			1.24e-2			29
Схема 2 (неразнесенные сетки)							
$h=\frac{1}{16}$	1.35e-3	3.86	1.94	4.83e-2	1.97	0.97	19
$h=\frac{1}{32}$	3.49e-4	3.93	1.97	2.45e-2	1.99	0.99	19
$h=\frac{1}{64}$	8.88e-5			1.23e-2			20

и

$$\begin{aligned}
v &= \left(1-\cos\left(\frac{2\pi(e^{R_1x}-1)}{e^{R_1}-1}\right)\right)\sin\left(\frac{2\pi(e^{R_2y}-1)}{e^{R_2}-1}\right)\frac{R_2}{2\pi}\frac{e^{R_2y}}{(e^{R_2}-1)},\\
u &= \sin\left(\frac{2\pi(e^{R_1x}-1)}{e^{R_1}-1}\right)\left(1-\cos\left(\frac{2\pi(e^{R_2y}-1)}{e^{R_2}-1}\right)\right)\frac{R_1}{2\pi}\frac{e^{R_1x}}{(e^{R_1}-1)}\\
p &= R_1R_2\sin\left(\frac{2\pi(e^{R_1x}-1)}{e^{R_1}-1}\right)\sin\left(\frac{2\pi(e^{R_2y}-1)}{e^{R_2}-1}\right)\frac{e^{R_1x}e^{R_2y}}{(e^{R_1}-1)(e^{R_2}-1)}
\end{aligned}\tag{4.2}$$

для $R_1 = 4.2985, R_2 = 0.1$. Решение из (4.2) имитирует "вихрь" в каверне, центр вихря находится в точке с координатами $x = 1/R_1\log((\exp(R_1)+1)/2)$, $y = 1/R_2\log((\exp(R_2)+1)/2)$. Таким образом, у правой части границы решение имеет пограничный слой, см. [3].

В таблицах 1 и 2 приведены значения нормы ошибки в скорости, $\mathbf{e}_h = \mathbf{v}|_{\Omega_1} - \mathbf{v}_h$, и давлении, $r_h = p|_{\Omega_2} - p_h$, для MAC-схемы и стабилизированной схемы на неразнесенных сетках и число итераций в методе Узавы - сопряженных градиентов[1], необходимое для уменьшения нормы невязки в 10^{-9}. Для схемы 2 обратим внимание на 2-ой порядок сходимости в скорости и первый в давлении, а так же на то, что число итераций метода Узавы-CG фактически не зависят от шага сетки. В целом результаты для стабилизированной схемы на неразнесенных сетках не хуже, чем для MAC схемы.

[1]Метод состоит в решении уравнения для давления с матрицей $BA^{-1}B^T + C$ (для схемы 1 $C = 0$) с помощью метода сопряженных градиентов. Система уравнений с матрицей A на каждом шаге метода решалась точно.

Таблица 3: Число нелинейных итераций ($h = 1/32$, $r = 1$)

τ_s	1	2	5
схема 1	165	345	487
схема 2	152	307	498

Выполнение условия согласованности операторов Δ_h, $\mathbf{div}\,_h$, $\mathbf{D}_h$ и $\nabla_h\cdot$ из леммы 1 и оптимальный порядок сходимости схемы на линейной задачи позволяет использовать данные схемы для расчета модели Бингама.

В качестве тестового численного примера для среды Бингама рассмотрим задачу о течении в каверне. Положим $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, $\mathbf{f} = 0$, краевые условия задаются следующим образом:

$$\mathbf{v}_B(x) := \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \Gamma \setminus \Gamma_B, \\ \{16(x_1^2(1-x_1)^2), 0\}, & \text{если } x \in \Gamma_B. \end{cases}$$

где $\Gamma_B = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2), 0 < x_1 < 1, x_2 = 1\}$. Данная задача является стандартным тестом в вычислительной гидродинамике. Данный выбор ненулевой горизонтальной компоненты скорости соответствует так называемой регуляризованной задаче о каверне. Для нахождения численного решения мы используем алгоритм из раздела 2. Число итераций, требуемое для достижения заданного критерия ($\|\boldsymbol{\tau}^{n+1} - \boldsymbol{\tau}^n\| < 10^{-4}$) примерно одинаково для двух разностных схем и существенно растет при увеличении предела текучести τ_s, см. таблицу 3. На каждой итерации метода мы решаем задачу Стокса с помощью итерационного метода, см. предыдущий раздел.

Для нахождения жестких зон в полученном разностном решении мы применяем критерий Мизеса: ($|\boldsymbol{\tau}| = \tau_s$). На рисунке 2 изображены жесткие зоны и изолинии тока для различных значений предела текучести τ_s. На левом рисунке 3 показан профиль первой компоненты вектора скорости вдоль линии $x = 0.5$ для различных значений τ_s. На правом изображены изолинии для давления при $\tau_s = 2$. Результаты, полученные с помощью схемы 1 и схемы 2 визуально практически не отличались. Так результаты на рисунках 2 получены с использованием разностной схемы на неразнесенных сетках, а на рисунках 3 с использованием разнесенных сеток. Вид и форма жестких зон, полученные нами, хорошо согласуется с результатами из работ [7, 22, 15], а профили скорости с результатами из [25]. Мы считаем, что имеющее место ‘наложение’ изолиний функций тока в найденных течениях на центральную жесткую зону не является физичным. Однако, такая же картина наблюдается и в результатах, приведенных в работах [7, 15, 25]. Повидимому, это можно объяснить погрешностью аппроксимации, допускающей (очень медленное) течение внутри жестких зон.

Список литературы

[1] Benzi M., Golub G. H. and Liesen J., Numerical solution of saddle point problems, *Acta Numerica*, **14** (2005), pp. 1–137.

[2] Bercovier M., Engelman M., A finite element method for incompressible non-newtonian flows. J.Comp.Phys. 36, 1980, pp.313–326.

[3] Berrone S., Adaptive discretization of the Navier Stokes equations by stabilized finite element methods, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 190 (2001), pp. 4435–4455.

[4] Bochev P. B., Dohrmann C. R., Gunzburger M. D., Stabilization of low-order mixed finite elements for the Stokes equations, SIAM J. Num. Anal., 44, 2006, pp. 82–101.

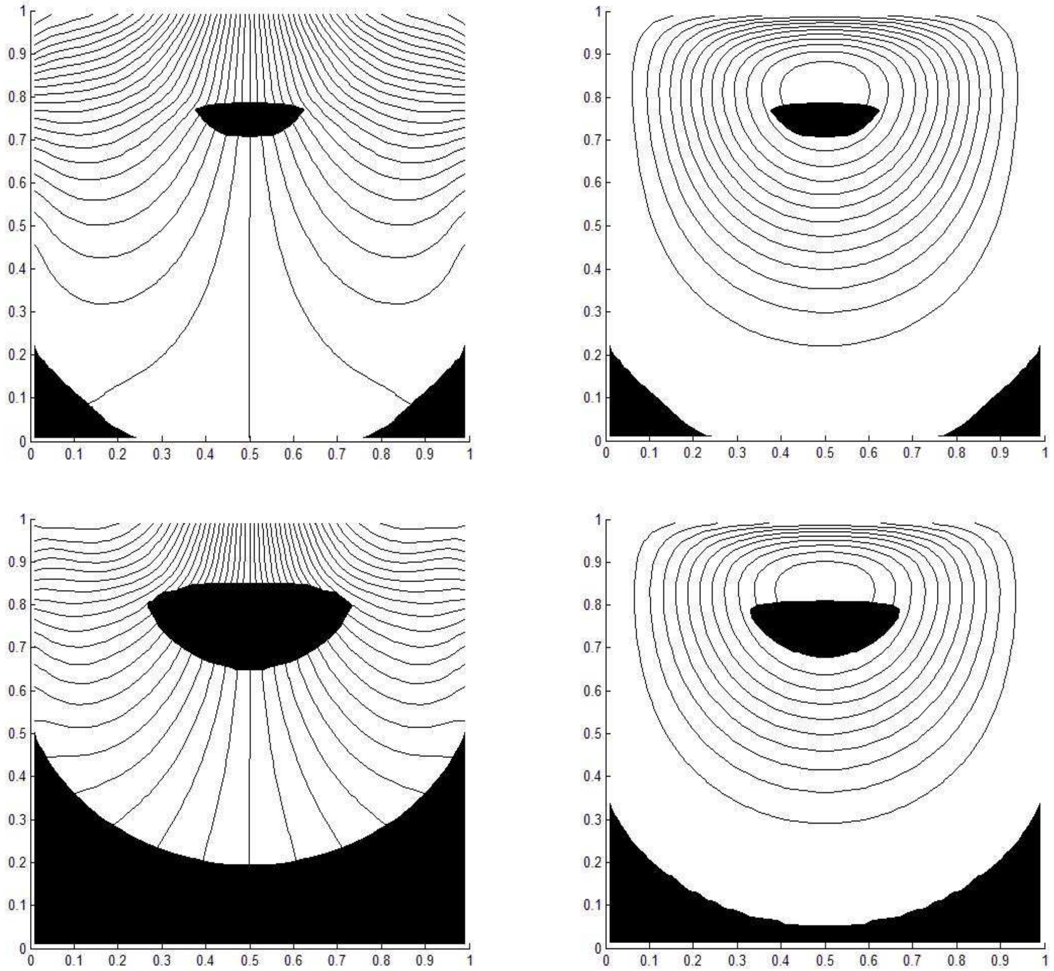

Рис. 2: Изобары, изолинии функции тока и жесткие зоны при $\tau_s = 1$(вверху). Изобары и жесткие зоны при $\tau_s = 5$ (слева внизу), изолинии функции тока и жесткие зоны при $\tau_s = 2$ (справа внизу). Схема на неразнесенных сетках, $h = \frac{1}{64}$.

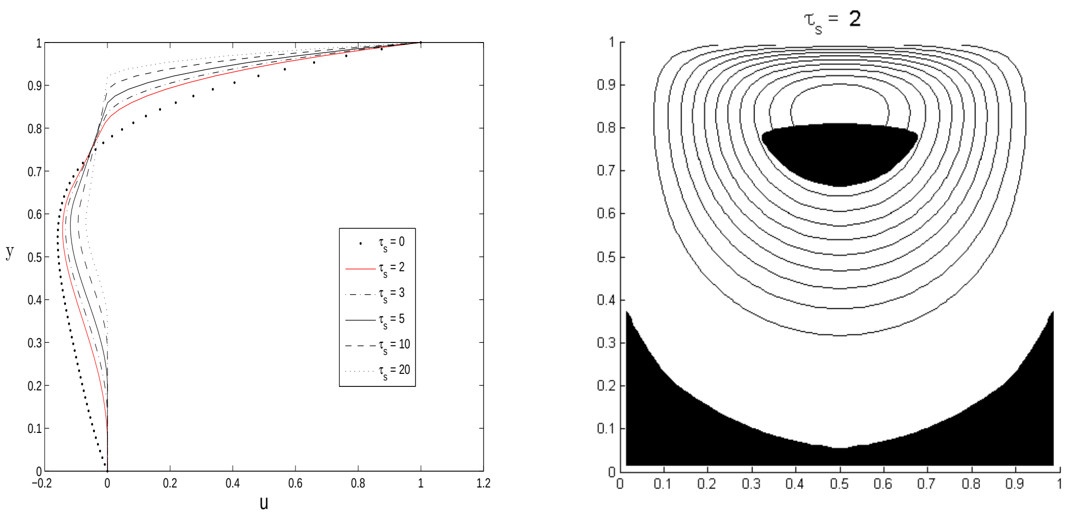

Рис. 3: Профили $u(0.5, y)$ при различных τ_s (слева) и изолинии функции тока при $\tau_s = 2$ (справа). Схема на разнесенных сетках, $h = \frac{1}{64}$.

[5] Braack M., Burman E., John V., Lube G., Stabilized finite element methods for the generalized Oseen problem, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 196, 2007, pp. 853–866

[6] Dean E. J., Glowinski R., Operator-splitting methods for the simulation of Bingham visco-plastic flow. Chin.Ann.Math., B 23, 2002, pp. 187–204.

[7] Dean E. J., Glowinski R., Guidoboni G., On the numerical simulation of Bingham visco-plastic flow: Old and New results, J.Non-Newtonian Fluid Mech. 142, 2007, pp. 36–62.

[8] Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.

[9] Флетчер К., "Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т.2"М.: Мир, 1991.

[10] Franca L. P., Stenberg R., Error analysis of some Galerkin least-squares methods for the elasticity equations, SIAM J. Numer. Anal., 28 (1991), pp. 1680-–1697.

[11] Гловински Р., Лионс Ж.Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979.

[12] Glowinski R. Numerical methods for Nonlinear Variational Problems. Springer-Verlag, New York, 1984.

[13] Girault V., Raviart P.A., Finite element methods for Navier-Stokes equations. Springer, Berlin, 1986.

[14] Kobelkov G. M., Valedinskiy V. D., On the inequality $\|p\| \le c\|\mathrm{grad}\, p\|_{-1}$ and its finite dimensional image. Sov. J. of Numer. Anal. and Math. Modelling, V.1, 1986, pp. 189–200.

[15] Mitsoulis E., Zisis Th., Flow of Bingham plastics in a lid-driven cavity. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 101, 2001, pp. 173–180.

[16] Муравлева Е.А., Исследование вырожденной схемы для задачи Стокса, Труды XXVIII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ, Москва 2006.

[17] Nicolaides R. A., Analysis and Convergence of the MAC Scheme I. The Linear Problem, SIAM J. Num. Anal., 29, 1992, pp. 1579–1591.

[18] O'Donovan E. J., Tanner R. I., Numerical study of the Bingham squeeze film problem. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 15, 1984, p.75-83.

[19] Papanastasiou T.C., Flows of materials with yield. J.Rheol. 31 (5), 1987, p.385-404.

[20] Peters J., Reichelt V., Reusken A. Fast Iterative Solvers for Discrete Stokes Equations, SIAM Journal on Scientific Computing, **27** (2005), pp. 646–666

[21] Roquet N., Saramito P., An adaptive finite element method for Bingham fluid flow around a cylinder. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 192, 2003, pp. 3317–341.

[22] Sanchez F. J., Application of a first-order operator splitting method to Bingham fluid flow simulation. Comput.Math.Appl. 36(3), 1998, pp. 71–86.

[23] Stenberg R., Error analysis of some finite element methods for the Stokes problem, Math. Comp., 54 (1990), pp. 495-–508.

[24] Вабищевич П.Н., Павлов А.Н., Чурбанов А.Г., Методы расчета нестационарных несжимаемых переменных на неразнесенных сетках, Мат. Моделирование, Т.8, 1996, с. 81–108.

[25] Vola D., Boscardin L., Latche J. C., Laminar unsteady flows of Bingham fluids: a numerical strategy and some benchmark results. . J.Comp.Phys. 187, 2003, pp. 441–456.

[26] Vinay G., Wachs A., Agassant J. F., Numerical simulation of non-isotermal viscoplastic waxy crude oil flows. J.Non-Newtonian Fluid Mech. 128, 2005, pp. 144–162.

[27] Wachs A., Numerical simulation of steady Bingham flow through an eccentric annular cross-section by distributed Lagrange multiplier/fictitious domain and augmented Lagrangian methods. J.Non-Newtonian Fluid Mech. 142, 2007, pp. 183–198.