ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2004, том 44, № 8, с. 1462–1491

УДК 519.633.6

АНАЛИЗ МНОГОСЕТОЧНОГО МЕТОДА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ДИРИХЛЕ[1)]

© 2004 г. М. А. Ольшанский

(119899 Москва, Ленинские горы, МГУ, механ.-матем. ф-т)
e-mail: Maxim.Olshanskii@mtu-net.ru

Поступила в редакцию 18.04.2003 г.

Анализируется сходимость многосеточного итерационного метода для решения системы алгебраических уравнений, получаемой в результате применения метода конечных элементов к уравнению конвекции–диффузии с краевыми условиями Дирихле. Рассматриваются кусочно-линейные конечные элементы относительно равномерной триангуляции области. Для стабилизации дискретной системы применяется метод SUPG. Анализируемый многосеточный метод использует канонические операторы перехода между сеточными уровнями, сглаживания блочного типа и "прямой подход" к построению оператора на грубой сетке. Доказываются универсальные (не зависящие от коэффициента диффузии и h) оценки показателя сходимости двухсеточного метода и W-цикла в частном случае, когда направление тока постоянно и триангуляция ориентирована вдоль линий тока. Алгоритм имеет оптимальную арифметическую сложность с точностью до логарифмического множителя. Библ. 36. Табл. 4.

Ключевые слова: уравнения конвекции-диффузии, задача Дирихле, многосеточный метод, сходимость.

ВВЕДЕНИЕ

Многосеточные методы впервые рассматривались в работах [1]–[3]. К настоящему времени они стали одним из основных инструментов численного решения систем алгебраических уравнений, возникающих в результате дискретизации дифференциальных уравнений и систем уравнений. Относительно теоретического анализа многосеточного метода заметим, что применительно к самосопряженным эллиптическим краевым задачам существует хорошо разработанная теория многосеточных методов (см., например, [4]–[7]). В других областях прогресс не так велик. К примеру, для уравнений конвекции–диффузии анализ сходимости многосеточных методов находится в самой начальной стадии. Настоящая статья представляет анализ сходимости многосеточного метода для некоторого специального класса двумерных уравнений конвекции–диффузии.

На сегодняшний день интересный для анализа класс уравнений конвекции-диффузии может быть определен так:

$$\begin{aligned} -\varepsilon\Delta u + b\cdot\nabla u &= f \ \text{ в } \ \Omega = (0,1)^2, \\ u &= g \ \text{ в } \ \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ и $b = (\cos\psi, \sin\psi)$, $\psi \in [0, 2\pi)$. Дискретизация уравнений, например, методом конечных разностей или методом конечных элементов приводит к системе линейных алгебраических уравнений, матрица которой разрежена (большинство элементов равны нулю) и может иметь большýю размерность. Для решения такой системы естественно применение итерационного метода. Заметим, что дискретная задача зависит от трех параметров: h (шаг сетки), ε (отношение диффузии и конвекции) и ψ (направление потока). Для ее решения желательно построение метода эффективного для всех встречающихся значений параметров. Методы, обладающие таким свойством, называют *универсальными* (robust). Из практики известно, что для достижения универсальности в случае задачи (1) компоненты многосеточного метода должны выбираться специальным образом, так как "стандартный" метод не дает удовлетворительных результатов для уравнений с доминирующей конвекцией, когда отношение h/ε велико. Для улучшения универ-

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 03-01-06460 и 02-01-00592).

сальности методов в литературе предлагается несколько модификаций: “универсальные” сглаживания, операторы перехода с одного сеточного уровня на другой, зависящие от матрицы системы, и техника неравномерного огрубления сетки (semicoarsening). Детали данных подходов представлены в [7]–[14]. Однако эти модификации основаны на эвристических доводах и эмпирических исследованиях. Строгий анализ сходимости, доказывающий универсальность метода, до сих пор отсутствует.

Теоретическоик анализу сходимости многосеточного метода применительно к уравнениям конвекции–диффузии посвящены следующие исследования. Анализ сходимости для несимметричных систем, основанный на теории возмущения симметричной задачи (см. [15]–[17]), дает для model оценки, зависящие от ε, и неудовлетворителен при $\varepsilon \ll 1$. В работах [18] и [19] рассмотрены уравнения конвекции–диффузии, аналогичные (1), но с периодическими краевыми условиями. Анализ двухсеточного и многосеточного метода в этом случае основан на анализе Фурье. Так в [18] для случая $\psi = 0$ получены оценки сходимости V-цикла, не зависящие от ε и h при условии $\varepsilon \approx ch$. В [19] получены оценки сходимости двухсеточного метода, не зависящие от ε, h, ψ, в случае дискретизации уравнения методом конечных разностей с использованием разностей против потока 1-го порядка (и периодическими краевыми условиями). В [20] изучается применение многосеточного метода иерархических базисов к (1). В явном виде получена зависимость показателя сходимости от ε и ψ, но оценки неоднородны по h. Многосеточный метод, основанный на неравномерном огрублении сетки, операторах перехода, зависящих от матрицы жесткости, и сглаживаниях блочного типа, применительно к конечно-разностной дискретизации (1) 1-го порядка изучается в [21]. С помощью средств линейной алгебры для него получена универсальная оценка на сходимость W-цикла.

В настоящей статье рассматривается задача конвекции–диффузии

$$\begin{aligned} -\varepsilon\Delta u + u_x &= f \ \text{ в } \ \Omega := (0,1)^2, \\ u &= 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2}$$

В нашей предыдущей работе [22] рассматривался многосеточный метод применительно к задаче с условиями Неймана на границе вытекания, т.е., $u_x(1, y) = 0$, $y \in (0, 1)$, что исключало образование экспоненциального пограничного слоя в решении и, как следствие, ослабляло зависимость констант в априорных оценках от ε. Например, в случае условий Неймана на границе вытекания справедливо

$$\|u\|_{H^2} \le c\varepsilon^{-1}\|f\|_{L^2},$$

а в случае условий Дирихле – лишь

$$\|u\|_{H^2} \le c\varepsilon^{-3/2}\|f\|_{L^2}.$$

Подобные априорные оценки играли ключевую роль в анализе из [22], поэтому прямое обобщение результатов на случай условий Дирихле невозможно и анализ вынужденно претерпевает существенные изменения. Отметим, что анализ Фурье также неприменим.

В то время как условия Неймана на границе вытекания часто встречаются в приложениях, например при наличии искусственной границы в задачах вычислительной гидродинамики, экспоненциальные пограничные или внутренние слои также не редкость в приложениях, например в задаче фильтрации. Поэтому анализ многосеточного метода в случае условий Дирихле на границе вытекания имеет прикладное значение.

Для дискретизации (2) используем метод конечных элементов. Помимо работы [22], в литературе неизвестны теоретические результаты о сходимости многосеточного метода, применимые к конечно-элементным аппроксимациям в случае доминирующей конвекции. Данное исследование частично восполняет этот пробел. Как известно, стандартный метод конечных элементов не подходит для расчетов в случае доминирования конвективных членов. Мы используем SUPG (Streamline Upwinding Petrov–Galerkin) – метод, который обеспечивает более высокий порядок сходимости (см. [23], [24]), чем метод конечных разностей против потока 1-го порядка. Рассмотрим SUPG-метод ниже. В данной статье рассмотрим только случай равномерной триангуляции, такой, что узлы разбиения расположены вдоль линий тока. Вопрос об бобщении результатов на случай произвольной сетки остается открытым.

Ниже кратко обсуждаются различные компоненты предлагаемого многосеточного метода.

В качестве продолжения и проектора (p_k и r_k) используются канонические операторы, определяемые иерархией сеток и вложением конечно-элементных пространств. Так, в качестве продолжения используется линейная интерполяция, а в качестве проектора – сопряженный оператор к оператору продолжения.

Иерархия операторов на различных сеточных уровнях строится путем применения SUPG дискретизации на соответствующем уровне. Так как билинейная форма дискретной задачи зависит от стабилизирующего члена, который, в свою очередь, зависит от параметра дискретизации h_k, то типичное соотношение $A_{k-1} = r_k A_k p_k$, связывающее операторы на k-м и $(k-1)$-м уровнях, не выполняется. Это согласуется, в частности, с результатами численных экспериментов из [25], которые указывают, что при использовании канонических продолжения и проекции предпочтение при построении матрицы на грубой сетке следует отдать методу SUPG-дискретизации на грубой сетке перед методом Галёркина: $A_{k-1} = r_k A_k p_k$.

Относительно сглаживаний заметим, что сеточный шаблон, возникающий в методе конечных элементов, не позволяет строить универсальные сглаживающие итерации (т.е., такие, которые точно решают задачу в предельном случае $\varepsilon = 0$, см. [4], [7]) с помощью блочных методов Якоби и Гаусса–Зейделя. Подробнее это объяснено в разд. 7. Мы используем сглаживающие итерации блочного типа, которые не являются универсальными в данном смысле. Их суть заключается в построении блочного переобусловливателя, состоящего из двухдиагональных блоков при нумерации узлов сетки вдоль потока и полной матрицы жесткости около границы вытекания. Сглаживающие итерации допускают физическую интерпретацию: неизвестные в процессе релаксации обновляются, начиная с границы втекания и далее вдоль линий тока, а около границы вытекания, где поведение решения нерегулярно (имеет место экспоненциальный погранслой), система решается точно.

Все эти компоненты обычным образом объединены друг с другом и составляют в результате W-цикл многосеточного метода (см. ниже Алгоритм).

Кратко остановимся на основных моментах анализа сходимости метода. Через A_k обозначим матрицу жесткости задачи на k-м сеточном уровне $S_k = I - W_k^{-1} A_k$ – матрица сглаживающих итераций. Матрица итераций двухсеточного метода с μ предсглаживаниями и ν постсглаживаниями задается так: $T_k = S_k^{\nu}(I - p_k A_{k-1}^{-1} r_k A_k) S_k^{\mu}$.

Один из стандартных подходов к анализу многосеточного метода состоит в доказательстве оценки на норму матрицы T_k, откуда оценка на норму матрицы итераций многосеточного метода легко следует. Доказательство оценки для $\|T_k\|$ традиционно базируется на свойстве сглаживания и аппроксимации (см., например, [7]), т.е. на проверке неравенств вида

$$\left\|S_k^{\nu} A_k^{-1}\right\| \le C_s(h_k, \varepsilon)\eta(\nu), \text{ где } \eta(t) \longrightarrow 0 \text{ при } t \longrightarrow \infty,$$

$$\left\|A_k^{-1} - p_k A_{k-1}^{-1} r_k\right\| \le C_a(h_k, \varepsilon).$$

При этом, для доказательства универсальности метода произведение констант $C_s(h_k, \varepsilon)$ и $C_a(h_k, \varepsilon)$ должно оцениваться некоторой абсолютной константой, не зависящей от k и ε. Тогда для достаточно большого ν желаемая оценка для $\|T_k\|$ следует из неравенства Коши ($\mu = 0$). Однако для задачи, рассматриваемой в настоящей статье (и это подтверждается простыми численными экспериментами) данный подход, по-видимому, невозможно применить. Вместо этого мы рассматриваем другое разбиение для оценки $\|T_k\|$. Новое разбиение приводит к модифицированным свойствам сглаживания и аппроксимации; ключевым моментом будет проверка оценок вида

$$\left\|A_k S_k^{\nu} W_k^{-1}\right\| \le c\nu^{-1/2},$$

$$\left\|J_k^E W_k (A_k^{-1} - p_k A_{k-1}^{-1} r_k) J_k^W\right\| \le c.$$

Здесь и далее c – положительные константы, не зависящие от k и ε. Таким образом, в модифицированном свойстве аппроксимации участвует переобусловливатель W_k из сглаживающих итераций! J_k^E и J_k^W – сеточные операторы проекции для небольших подобластей Ω^W и Ω^E, прилегающих к границе втекания и вытекания, т.е. J_k^W – диагональная матрица: $(J_k^W)_{ii} = 0$, если узел сетки с индексом i лежит в подобласти Ω^W, $(J_k^W)_{ii} = 1$ иначе. Аналогично определяется J_k^E для подобласти Ω^E.

Введение операторов проекции J_k^W и J_k^E обусловлено следующим. Проверка свойства аппроксимации тесно связана с получением оценок на $\mathbb{L}^2$-норму ошибки в методе конечных элементов. Традиционно получение таких оценок основано на вариационных свойствах метода и на рассмотрении сопряженной задачи. Для задачи (2) регулярность решения “портится" у границы вытекания:

$$\Gamma_E := \{(x, y) \in \partial\Omega \mid x = 1\},$$

а у сопряженной задачи – у противоположной части границы:

$$\Gamma_W := \{(x, y) \in \partial\Omega \mid x = 0\}.$$

Оба эффекта затрудняют получение необходимых оценок. Чтобы преодолеть эту трудность, в свойство аппроксимации введены проекторы J_k^E и J_k^W, а для специальных сглаживающих итераций, используемых нами, доказаны свойства, которые позволяют использовать эти проекторы при анализе (для удобства построения доказательств вместо проектора J_k^W будет использоваться функция срезки).

Один из сомножителей при получении оценки для $\|T_k\|$ получается равным $(1 - c/k^4)^{\mu}$, а ещё один равен $(1 - c)^{\nu}2^k$. Чтобы компенсировать зависимость от k, число предсглаживаний и постсглаживаний выбирается зависящим от сеточного уровня: $\mu = \mu_k \sim k^4$ и $\nu = \nu_k \sim k$. В результате получаем оценку нормы матрицы итераций двухсеточного метода $\|T_k\| \le c < 1$ и арифметическую сложность одной итерации $O(N_k(\ln N_k)^4)$, где $N_k = h_k^{-2}$. Данная трудоемкость является квазиоптимальной. Однако в численных экспериментах мы не видим необходимости увеличивать число сглаживаний с увеличением k. В разд. 9 обсуждается, что зависимость μ от k является, по-видимому, артефактом доказательства, а зависимость ν от k важна для оценки $\|T_k\|$, но может быть проигнорирована при практическом использовании метода.

Отметим, что целью данной работы не является численное сравнение различных многосеточных методов решения уравнений конвекции диффузии. Результаты численных расчётов можно найти во многих источниках (см., например, [8], [9], [11], [14]), в том числе и для SUPG-аппроксимации по методу конечных элементов (см. [25]). Численные эксперименты, приведенные в данной работе, служат для иллюстрации излагаемой теории.

Далее статья построена следующим образом. В разд. 2 приводится SUPG-метод конечных элементов применительно к (2). В разд. 3 рассматривается шаблон дискретизации и матрица жесткости задачи. В разд. 4 и 5 доказываются некоторые априорные оценки для решений дискретных и непрерывных задач. В разд. 6 собраны специальные следствия результатов из разд. 4 и 5, дающие оценки решений “вдали” от границы вытекания и оценки влияния правых частей на решения “вверх по течению”. Разд. 7 содержит основные результаты статьи – анализ сходимости многосеточного метода, который базируется на нескольких важных вспомогательных результатах, сформулированных в данном разделе и используемых для получения оценки на показатель сходимости W-цикла. Доказательство вспомогательных результатов представлено в разд. 8. В разд. 9 приведены результаты экспериментов, иллюстрирующих теорию.

2. НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАДАЧА И МЕТОД ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Обозначим скалярное произведение в $\mathbb{L}^2(\Omega)$ через $(\cdot, \cdot)$, а через $\|\cdot\|$ – соответствующую норму. Слабая постановка задачи (2) имеет следующий вид: найти $u \in \mathbb{V}$ такую, что

$$a(u, v) := \varepsilon(u_x, v_x) + \varepsilon(u_y, v_y) + (u_x, v) = (f, v) \quad \forall v \in \mathbb{V}, \tag{3}$$

где $\mathbb{V} := \{v \in \mathbb{H}^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$ – пространство Соболева. Из леммы Лакса–Мильграма следует, что решение (3) существует и единственно. Для получения дискретной задачи используем линейные конечные элементы относительно равномерной триангуляции области с шагом дискретизации $h_k := 2^{-k}$ и узлами сетки $x_{i,j} = (ih_k, jh_k)$, $0 \le i, j \le h_k^{-1}$. Триангуляция получается проведением диагоналей с юго-запада на северо-восток. Пусть $\mathbb{V}_k \subset \mathbb{V}$ – пространство непрерывных функций, кусочно-линейных на этой триангуляции и равных нулю на $\partial\Omega$. Для дискретизации (3) применяется SUPG метод конечных элементов. Для определенных выше элементов этот метод принимает следующий вид: найти $u_k \in \mathbb{V}_k$ такую, что

$$(\varepsilon + \delta_k h_k)((u_k)_x, v_x) + \varepsilon(((u_k)_y, v_y) + ((u_k)_x, v)) = (f, v + \delta_k h_k v_k) \quad \forall v \in \mathbb{V}_k, \tag{4}$$

где

$$\delta_k = \begin{cases} \bar{\delta}, & \text{если } h_k \ge 2\varepsilon, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Параметр стабилизации $\bar{\delta}$ выбирается равным константе порядка 1. Анализ сходимости метода можно найти в [23], [26].

В этой статье будем предполагать, что

$$\bar{\delta} \in [1/3, 1]. \tag{5}$$

Значение 1/3 в качестве нижней границы важно для дальнейшего анализа. Выбор единицы в качестве верхней границы сделан для удобства и может быть довольно произвольным.

Метод конечных элементов (4) порождает билинейную форму

$$a_k(u, v) := (\varepsilon + \delta_k h_k)(u_x, v_x) + \varepsilon(u_y, v_y) + (u_x, v), \quad u, v \in \mathbb{V},$$

для которой выполняется соотношение

$$a_k(v, v) = \varepsilon\|v_y\|^2 + (\varepsilon + \delta_k h_k)\|v_x\|^2, \quad v \in \mathbb{V}.$$

Тема этой статьи – анализ сходимости многосеточного метода для численного решения системы алгебраических уравнений, соответствующей задаче (4). Для анализа сходимости конкретный вид правой части в (4) не имеет значения (хотя он важен для высокого порядка точности SUPG-метода). Поэтому возможно рассмотрение дискретной задачи, у которой правая часть порождена произвольной $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$: найти $u_k \in \mathbb{V}_k$ такую, что

$$a_k(u_k, v_k) = (f, v_k) \quad \forall v_k \in \mathbb{V}_k. \tag{6}$$

Далее понадобится вспомогательная непрерывная задача: найти $u \in \mathbb{V}$ такую, что

$$a_k(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in \mathbb{V}. \tag{7}$$

Отметим, что u и u_k зависят от стабилизирующей добавки $(\delta_k h_k)$ в билинейной форме, а также что они отличаются от решений задач (3) и (4).

3. МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ И ЕЕ СВОЙСТВА

Рассмотрим систему алгебраических уравнений для задачи (6); рассмотрим ее сеточный шаблон и матрицу жесткости для билинейной формы $a_k(\cdot, \cdot)$. Выберем в $\mathbb{V}_k$ стандартный базис $\{\psi_i\}_{1 \le i \le N_k}$, где N_k – размерность конечно-элементного пространства, $N_k := (h_k^{-1} - 1)^2$. Зададим изоморфизм:

$$P_k : \mathbb{X}_k := \mathbb{R}^{N_k} \longrightarrow \mathbb{V}_k, \quad P_k\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{N_k} x_i\psi_i.$$

На $\mathbb{X}_k$ будем использовать масштабированное евклидово скалярное произведение $\langle\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = h_k^2\sum_{i=1}^{N_k} x_i y_i$ и соответствующую норму $\|\cdot\|$ (заметим, что это же обозначение используется для $\mathbb{L}^2(\Omega)$-нормы). Сопряженный оператор $P_k^* : \mathbb{V}_k \longrightarrow \mathbb{X}_k$ удовлетворяет $(P_k\mathbf{x}, v) = \langle\mathbf{x}, P_k^* v\rangle$ для всех $x \in \mathbb{X}_k$, $v \in \mathbb{V}_k$. Справедлива эквивалентность норм

$$C^{-1}\|\mathbf{x}\| \le \|P_k\mathbf{x}\| \le C\|\mathbf{x}\| \quad \forall\mathbf{x} \in \mathbb{X}_k \tag{8}$$

с константой C, не зависящей от k. Матрица жесткости A_k на уровне k определяется из соотношения

$$\langle A_k\mathbf{x}, y\rangle = a = k(P_k\mathbf{x}, P_k\mathbf{y}) \quad \forall\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{X}_k. \tag{9}$$

Во внутренних узлах области шаблон дискретизации имеет вид

$$\frac{1}{h_k^2}\begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon & 0 \\ -\varepsilon_k & 2(\varepsilon_k + \varepsilon) & -\varepsilon_k \\ 0 & -\varepsilon_k & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{h_k}\begin{bmatrix} 0 & -1/6 & 1/6 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \\ -1/6 & 1/6 & 0 \end{bmatrix},$$

где $\varepsilon_k := \varepsilon + \delta_k h_k$.

Пусть $n_k := h_k^{-1} - 1$ и

$$\hat{A} := \frac{1}{h_k^2}\mathrm{tridiag}(-1, 2, -1) \in \mathbb{R}^{n_k \times n_{ks}}.$$

Более того, пусть $\hat{I}_k$ – единичная матрица размера $n_k \times n_k$. Введем матрицы размера $N_k \times N_k$:

$$A_x := \hat{I}_k \otimes \hat{A}, \quad A_y := \hat{A} \otimes \hat{I}_k.$$

Будем использовать разложения матрицы A_k из (9) вида

$$A_k = (\varepsilon + (\delta_k - 1/3)h_k)A_x + \varepsilon A_y + D_k \tag{10}$$

с некоторой матрицей D_k. Это разложение соответствует записи шаблона в виде

$$\frac{\bar{\varepsilon}_k}{h_k^2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\varepsilon}{h_k^2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{6h_k}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

где $\bar{\varepsilon}_k := \varepsilon + (\delta_k - 1/3)h_k > 0$.

Нам также понадобится вспомогательная матрица D_x (дискретная производная назад во внутренних точках):

$$D_x := \hat{I}_k \otimes \hat{D}_x, \quad \text{где} \quad \hat{D}_x := \frac{1}{h_k}\mathrm{tridiag}(-1, 1, 0) \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}.$$

4. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАДАЧИ

Наша цель – анализ сходимости многосеточного метода для решения системы

$$A_k\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{12}$$

где A_k – матрица жесткости из предыдущего раздела. Как отмечалось во Введении, анализ будет базироваться на (модифицированных) свойствах сглаживания и аппроксимации. Для доказательства свойства аппроксимации понадобятся априорные оценки для решений непрерывной и дискретной задач, доказательство которых приведено в разд. 4 и 5.

Ограничимся рассмотрением случая доминирующей конвекции.

Предположение 1. Будем предполагать, что

$$\varepsilon \le \frac{1}{2}h_k.$$

Вместо множителя 1/2 можно задать другую произвольную константу C. Однако в доказательствах появится больше технических деталей: необходимо будет различать случай $\delta_k = \bar{\delta}$ и $\delta_k = 0$, что сделает изложение менее понятным.

Мы считаем случай доминирующей конвекции наиболее интересным для анализа. Многие результаты имеют место и для произвольно больших положительных ε, но доказательства в случае доминирующей диффузии могут сильно отличаться. Поэтому для ясности изложения мы ограничились случаем доминирующей конвекции. Отметим, что выполнены следующие ограничения:

$$\delta_k = \bar{\delta} \in \left[\frac{1}{3}, 1\right] \text{ и } \frac{1}{3}(h_k \le \varepsilon_k) = \varepsilon + \bar{\delta} h_k \le \frac{3}{2} h_k. \tag{13}$$

Для непрерывного решения докажем следующие априорные оценки.

Теорема 1. *Пусть функция* $\varphi \in H^1_\infty(0, 1)$ *такова, что* $\varphi \ge 0$ *и*

$$0 \le -\varphi_x \le H + \varphi/\varepsilon_k$$

с некоторой константой $H \in [0, \varepsilon_k^{-1}]$, *и* $\varphi(1) = 0$. *Обозначим через* $\|\cdot\|_\varphi$ *полунорму, задаваемую скалярным произведением* $(\varphi\cdot, \cdot)$. *Тогда для произвольной* $f \in \mathbb{L}_2(\Omega)$ *решение* $u(x, y)$ *задачи* (7) *удовлетворяет оценкам*

$$\|u\| + \sqrt{\varepsilon}\|u_y\| + \sqrt{h_k}\|u_x\| + \varepsilon\sqrt{h_k}\|u\|_{H^2} \le c\|f\|, \tag{14}$$

$$h_k\varphi(0)\int\limits_{\Gamma_W} u_x^2 dy + \|u_x\|^2_\varphi \le c(\|f\|^2_\varphi + H\|f\|^2), \tag{15}$$

$$\frac{1}{4}\|u\|^2_{-\varphi_x} + \varepsilon\|u_y\|^2_\varphi \le ch_k H\|f\|^2 + (\varphi f, u), \tag{16}$$

$$h_k\|u_{xx}\|_\varphi + \sqrt{\varepsilon h_k}\|u_{xy}\|_\varphi + \varepsilon\|u_{yy}\|_\varphi \le c\|f\|_\varphi + c\sqrt{H}\|f\|. \tag{17}$$

Доказательство. Здесь и далее будет использоваться соотношение (13), связывающее ε_k и h_k (не оговаривая этого каждый раз). Доказательство (14) приведено во многих источниках (см., например, [27]). Докажем (15)–(17). Поскольку $f \in \mathbb{L}_2(\Omega)$, то теория о регулярности решений из [28] обеспечивает принадлежность решения (7) к пространству $\mathbb{H}^2(\Omega)$. Следовательно, возможно рассмотреть соотношение

$$-\varepsilon u_{yy} - \varepsilon_k u_{xx} + u_x = f \tag{18}$$

и краевые условия из (2) в обычном смысле. Домножим (18) на φu_x и проинтегрируем по частям. Получим слагаемые

$$-\varepsilon(u_{yy}, \varphi u_x) = \frac{\varepsilon}{2}\|u_y\|^2_{-\varphi_x} \ge 0,$$

$$-\varepsilon_k(u_{xx}, \varphi u_x) = -\frac{\varepsilon_k}{2}\|u_x\|^2_{-\varphi_x} + \frac{\varepsilon_k}{2}\varphi(0)\int\limits_{\Gamma_W} u_x^2 dy \ge -\frac{1}{2}((\varepsilon_k H + \varphi)(u_x, u_x)) + \frac{\varepsilon_k}{2}\varphi(0)\int\limits_{\Gamma_W} u_x^2 dy \ge$$

$$\ge -\frac{H\varepsilon_k}{2}\|u_x\|^2 - \frac{1}{2}\|u_x\|^2_\varphi + \frac{\varepsilon_k}{2}\varphi(0)\int\limits_{\Gamma_W} u_x^2 dy,$$

$$(u_x, \varphi u_x) = \|u_x\|^2_\varphi,$$

$$(f, \varphi u_x) \le \|f\|_\varphi\|u_x\|_\varphi \le \|f\|^2_\varphi + \frac{1}{4}\|u_x\|^2_\varphi.$$

Благодаря (14) имеем $H\varepsilon_k\|u_x\|^2 \le cH\|f\|^2$, откуда непосредственно следует неравенство (15).

Для получения оценки (16) умножаем (18) на φu и интегрируем по частям. Получаем слагаемые

$$-\varepsilon(u_{yy}, \varphi u) = \varepsilon\|u_y\|^2_\varphi,$$

$$-\varepsilon_k(u_{xx}, \varphi u) = \varepsilon_k\|u_x\|_\varphi^2 + \varepsilon_k(u_x, \varphi_x u) \ge \varepsilon_k\|u_x\|_\varphi^2 - \varepsilon_k^2\|u_x\|_{-\varphi_x}^2 - \frac{1}{4}\|u\|_{-\varphi_x}^2 \ge$$

$$\ge -H\varepsilon_k^2\|u_x\|^2 - \frac{1}{4}\|u\|_{-\varphi_x}^2 \ge -cHh_k\|f\|^2 - \frac{1}{4}\|u\|_{-\varphi_x}^2,$$

$$(u_x, \varphi u) = \frac{1}{2}\|u\|_{-\varphi_x}^2.$$

Суммируя эти неравенства, доказываем (16).

Для доказательства (17) рассмотрим $F = f - u_x$. В силу (15) справедлива оценка $\|F\|_\varphi \le c(\|f\|_\varphi + \sqrt{H}\|f\|)$. Более того,

$$-\varepsilon u_{yy} - \varepsilon_k u_{xx} = F.$$

Домножим это равенство на $\sqrt{\varphi}$, возведем в квадрат и проинтегрируем по Ω. Получим

$$\varepsilon^2\|u_{yy}\|_\varphi^2 + 2\varepsilon\varepsilon_k(\varphi u_{yy}, u_{xx}) + \varepsilon_k^2\|u_{xx}\|_\varphi^2 = \|F\|_\varphi^2 \le c(\|f\|_\varphi^2 + H\|f\|^2). \tag{19}$$

Заметим, что для произвольной достаточно гладкой функции v, равной нулю на границе, выполняется

$$v_x(x, 0) = v_x(x, 1) = 0, \quad x \in (0, 1), \text{ и } v_{yy}(0, y) = v_{yy}(1, y) = 0, \quad y \in (0, 1).$$

Следовательно,

$$(\varphi v_{yy}, v_{xx}) = \|v_{xy}\|_\varphi^2 - (\varphi_x v_x, v_{yy}).$$

Переходя к пределу в $\mathbb{H}^2(\Omega)$, заключаем, что для u справедливо

$$\varepsilon\varepsilon_k(\varphi u_{yy}, u_{xx}) = \varepsilon\varepsilon_k\|u_{xy}\|_\varphi^2 - \varepsilon\varepsilon_k(\varphi_x u_x, u_{yy}) \ge \varepsilon\varepsilon_k\|u_{xy}\|_\varphi^2 - \varepsilon((\varphi + \varepsilon_k H)|u_x|, |u_{yy}|) \ge$$

$$\ge \varepsilon\varepsilon_k\|u_{xy}\|_\varphi^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}\|u_{yy}\|_\varphi^2 - \|u_x\|_\varphi^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_k H(\varepsilon^2\|u_{yy}\|^2 + \|u_x\|^2).$$

Подставляя полученное неравенство в (19) и используя $\|u_x\|_\varphi^2 \le c(\|f\|_\varphi^2 + H\|f\|^2)$, условие $\varepsilon_k H \le 1$ и (14), доказываем (17). Теорема доказана.

Нам будет полезна следующая лемма, дающая оценку разницы решений задач с условиями Дирихле и Неймана на границе вытекания.

Лемма 1. *Пусть $\hat{u}$ – решение задачи*

$$\begin{gathered} -\varepsilon\hat{u}_{yy} - \varepsilon_k\hat{u}_{xx} + \hat{u}_x = f \;\text{ в }\; \Omega := (0, 1)^2, \\ \hat{u}_x = 0 \;\text{ на }\; \Gamma_E, \\ \hat{u} = 0 \;\text{ на }\; \partial\Omega\backslash\Gamma_E. \end{gathered} \tag{20}$$

Пусть u – решение (7). *В предположениях теоремы* 1 *справедлива оценка*

$$h_k\|\hat{u}_x - u_x\|_\varphi^2 + \varepsilon\|\hat{u}_\varphi - u_y\|_\varphi^2 \le ch_k H\|f\|^2. \tag{21}$$

Доказательство леммы состоит в рассмотрении уравнения для разности $\hat{u} - u$. Далее рассуждения проводятся аналогично доказательству (15) и (16).

5. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ

Наша первая цель – доказать аналог оценки (15) для конечно-элементного решения u_k задачи (6). Для этого рассмотрим вектор $\varphi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_{n_k+1})$ такой, что $\varphi_i > 0$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n_k$,

$\varphi_{n_k+1} = 0$, и

$$0 \le \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h_k} \le H + c_0\frac{\varphi_i}{\varepsilon_k}, \quad i = 1, 2, \ldots, n_k, \tag{22}$$

с некоторыми константами $c_0 \in (0, 4/9)$, $H \ge 0$. Пусть $\Phi = \hat{I}_k \otimes \hat{\Phi}$, где $\hat{\Phi}$ – диагональная матрица размера $n_k \times n_k$, i-ый диагональный элемент которой равен φ_i. Введем скалярное произведение в $\mathbb{X}_k$: $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Phi := \langle \Phi\cdot, \cdot\rangle$ и норму $\|\cdot\|_\Phi$.

Лемма 2. *Пусть $k > 1$. Для решения u_k задачи* (6) *с $f = f_k \in \mathbb{V}_k$ выполняется оценка*

$$\bar{\varepsilon}_k\varphi_1\int_{\Gamma_w}(u_k)_x^2 dy + \|D_x\mathbf{u}\|_\Phi^2 \le c(H\|f_k\|^2 + \|M_k\mathbf{f}\|_\Phi^2) \tag{23}$$

с некоторой константой $c > 0$. Здесь $\mathbf{u} = P_k^{-1}u_k \in \mathbb{X}_k$ – вектор значений функции u_k в узлах сетки, $\mathbf{f} = P_k^{-1}f_k \in \mathbb{X}_k$, и M_k – матрица масс.

Доказательство леммы довольно технично и отнесено в п. 8.1.

Нам будут полезны еще две леммы. Одна дает оценку снизу скалярного произведения $\langle A_k\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_\Phi$, вторая – оценку разницы решений дискретных задач с условиями Дирихле и Неймана на границе вытекания.

Лемма 3. *Рассмотрим $\Phi_x = \hat{I}_k \otimes \hat{\Phi}_x$, где $\hat{\Phi}_x$ – диагональная матрица размера $n_k \times n_k$ с i-м элементом равным $[\varphi_x]_i = (\varphi_{i+1} - \varphi_i)h_k^{-1}$. Дополнительно предположим: для любого $i > 0$ выполняется либо оценка $|[\varphi_x]_{i-1}/[\varphi_x]_i| \le d^2$, либо $[\varphi_x]_{i-1} = [\varphi_x]_i = 0$. В предположениях леммы 2 справедлива оценка*

$$\langle A_k\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_\Phi \ge \varepsilon\langle A_y\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_\Phi + \left(\frac{1}{6}(2-d) - \frac{1}{9}\right)\langle -\Phi_x\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - \frac{9}{4}H\bar{\varepsilon}_k^2\langle A_x\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle. \tag{24}$$

Доказательство. Для доказательства используем разложение (10) матрицы $A_k = \bar{\varepsilon}_k A_x + \varepsilon A_y + D_k$, а также оценку, доказанную в [22] (лемма 8.3):

$$\langle D_k\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_\Phi \ge \frac{1}{6}(2-d)\langle -\Phi_x\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle. \tag{25}$$

Далее вычисляем

$$\bar{\varepsilon}_k\langle A_x\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_\Phi = \bar{\varepsilon}_k\sum_{i=1}^{n_k+1}\sum_{j=1}^{n_k}h_k^2\varphi_i\left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_k}\right)^2 + \bar{\varepsilon}_k\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_k}h_k^2\left(\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h_k}\right)\left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_k}\right)u_{i,j} \ge$$

$$\ge \bar{\varepsilon}_k\sum_{i=1}^{n_k+1}\sum_{j=1}^{n_k}h_k^2\varphi_i\left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_k}\right)^2 - \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{h_k}h_k^2u_{i,j}^2\left(\frac{\varphi_i - \varphi_{i+1}}{h_k}\right) - \frac{9}{4}\bar{\varepsilon}_k^2\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_k}h_k^2\left(\frac{\varphi_i - \varphi_{i+1}}{h_k}\right)\left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_k}\right)^2 \ge$$

$$\ge \left(1 - \frac{9c_0}{4}\right)\bar{\varepsilon}_k\sum_{i=1}^{n_k+1}\sum_{j=1}^{n_k}h_k^2\varphi_i\left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_k}\right)^2 - \frac{9}{4}H\bar{\varepsilon}_k^2\sum_{i=1}^{n_k+1}\sum_{j=1}^{n_k}h_k^2\left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_k}\right)^2 - \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_k}h_k^2u_{i,j}^2\left(\frac{\varphi_i - \varphi_{i+1}}{h_k}\right);$$

последнее неравенство получено с использованием (22).

Наконец, заметим, что

$$\sum_{i=1}^{n_k+1}\sum_{j=1}^{n_k}h_k^2\left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_k}\right)^2 = \langle A_x\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle \quad \text{и} \quad c_0 \le \frac{4}{9}.$$

Следовательно,

$$\bar{\varepsilon}_k\langle A_x\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle_\Phi \ge -\frac{1}{9}\langle -\Phi_x\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - \frac{9}{4}H\bar{\varepsilon}_k^2\langle A_x\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle.$$

Используя это неравенство и (25), получаем (24).

Лемма 4. *Пусть* $\hat{u}_k$ *– решение задачи* (20), *аппроксимированной по методу конечных элементов. Пусть* u_k *– решение* (6). *Тогда, в предположениях леммы* 2, *справедлива оценка*

$$\varepsilon\langle A_y\mathbf{r}, \mathbf{r}\rangle_\Phi \le ch_kH\|f_k\|^2, \tag{26}$$

где $\mathbf{r}$ *– вектор значений в узлах сетки разности* $r_k = \hat{u}_k - u_k$.

Доказательство леммы аналогично доказательству (24) и использует оценку $\varepsilon_k\langle A_x\mathbf{r}, \mathbf{r}\rangle = \varepsilon_k\|(r_k)_x\|^2 \le c\|f_k\|^2$ (см. (64)).

6. ВЛИЯНИЕ ПРАВОЙ ЧАСТИ ПРОТИВ ПОТОКА И ОЦЕНКИ ВДАЛИ ОТ Γ_E

Рассмотрим непрерывную задачу (7). В этом разделе будет изучено влияние правой части f на решение u против потока. То же будет сделано для соответствующей дискретной задачи. Результаты такого плана известны из литературы, где они обычно формулируются в виде оценок на функцию Грина (см., например, [29], 30]), доказательство которых довольно технично. Нас также интересуют оценки на u и u_k "вдали" от границы вытекания Γ_E. Базируясь на теореме 1 и лемме 2, ниже мы приводим элементарное доказательство необходимых нам результатов.

Выберем $\xi \in [0, 1]$ и рассмотрим функцию срезки

$$\varphi_\xi(x) = \begin{cases} 1 - H_0, & \text{если } x \in [0, \xi], \\ \exp\left(-\dfrac{x-\xi}{\varepsilon_k}\right) - H_0, & \text{если } x \in (\xi, 1], \end{cases}$$

где $H_0 = \exp\left(-\dfrac{1-\xi}{\varepsilon_k}\right)$. Для произвольного ξ функция $\varphi_\xi(x)$ удовлетворяет предположениям теоремы 1 с константой $H = H_0\varepsilon_k^{-1}$. Определим области

$$\begin{aligned} \Omega_\xi &= \{(x, y) \in \Omega : x < \xi\}, \\ \Omega_\eta &= \{(x, y) \in \Omega : x > \eta\}, \quad \eta \in (0, 1). \end{aligned} \tag{27}$$

Непосредственное применение теоремы 1 с $\varphi = \varphi_\xi$ доказывает следующий результат.

Следствие 1. Рассмотрим $f \in \mathbb{L}_2(\Omega)$ такую, что $\operatorname{supp}(f) \subset \Omega_\eta$. Пусть u – соответствующее решение (7). Предположим, что $\eta - \xi \ge 2\varepsilon_k p|\ln h_k|$, $p \ge 0$, и $1 - \eta \ge \varepsilon_k|\ln\varepsilon_k|$. Тогда имеют место оценки

$$\|u_x\|_{L_2(\Omega_\xi)} \le ch_k^p\|f\|, \tag{28}$$

$$\varepsilon_k\int_{\Gamma_W} u_x^2 dy \le ch_k^{2p}\|f\|^2, \tag{29}$$

$$\sqrt{\varepsilon}\|u_y\|_{L_2(\Omega_\xi)} \le c\sqrt{\varepsilon_k}h_k^p\|f\|. \tag{30}$$

Доказательство. Второе слагаемое в правой части (16) оценим, как

$$\begin{aligned} (\varphi f, u) &= (\varphi f, u)_{\Omega_\eta} \le \varepsilon_k\|f\|_\varphi^2 + \frac{1}{4\varepsilon_k}(\varphi u, u)_{\Omega_\eta} = \varepsilon_k\|f\|_\varphi^2 + \frac{1}{4}(-\varphi_x u, u)_{\Omega_\eta} - \frac{H_0}{\varepsilon_k}\|u\|_{\Omega_\eta}^2 \le \\ &\le \varepsilon_k\|f\|_\varphi^2 + \frac{1}{4}\|u\|_{-\varphi_x}^2. \end{aligned} \tag{31}$$

Далее заметим, что $H = \varepsilon_k^{-1}\exp\left(-\dfrac{1-\xi}{\varepsilon_k}\right) \le h_k^{2p}$, так как $1 - \xi \ge \varepsilon_k(2p|\ln h_k| + |\ln\varepsilon_k|)$; и отметим равенство $\varphi(\eta) = h_k^{2p} - H_0$. Теперь с помощью (31) и оценки

$$\|f\|_\varphi^2 = (\varphi f, f)_{\Omega_\eta} \le \varphi(\eta)\|f\|_{\Omega_\eta}^2 \le h_k^{2p}\|f\|^2$$

выводим результаты в (28)–(30) из (15) и (16).

Следствие 2. Пусть $f \in \mathbb{L}_2(\Omega)$ и $u(x, y)$ – решение (7), ξ и η – как в следствии 1 и $\omega = \Omega \backslash \Omega_\eta$. Имеет место оценка

$$\varepsilon\|u\|_{H^2(\Omega_\xi)} + \left(\varepsilon_k \int_{\Gamma_W} u_x^2 dy\right)^{1/2} + \|u_x\|_{L_2(\Omega_\xi)} \le c(\|f\|_{L_2(\omega)} + h_k^p\|f\|). \tag{32}$$

Доказательство следует из неравенств (15), (17), $H \le h_k^{2p}$ и

$$(\|f\|_\varphi^2 = (\varphi f, f)_\omega + (\varphi f, f)_{\Omega_\eta}) \le \|f\|_\omega^2 + \varphi(\eta)\|f\|_{\Omega_\eta}^2 \le \|f\|_\omega^2 + h_k^{2p}\|f\|^2.$$

Сделаем очевидное

Замечание 1. Оценки (28)–(30) и (32) остаются верны для решения сопряженной к (7) задачи с той разницей, что область Ω_ξ должна быть отдалена на расстояние $\varepsilon_k|\ln\varepsilon_k|$ не от Γ_E, а от Γ_W, а интегралы берутся по Γ_E. Данные оценки верны и в случае задачи с однородными условиями Неймана на Γ_E (см. [22]).

В дискретном случае рассмотрим вектор

$$\varphi_i^\xi = \begin{cases} 1 - H_0, & \text{если } ih_k \in [0, \xi], \\ \exp\left(-\dfrac{ih_k - \xi}{4h_k}\right) - H_0, & \text{если } ih_k \in (\xi, 1], \quad \text{для} \quad i = 0, 1, \ldots, n_k + 1, \end{cases}$$

где $H_0 = \exp\left(-\dfrac{1-\xi}{4h_k}\right)$. Из определения следует, что

$$-(\varphi_i^\xi - \varphi_{i-1}^\xi) = [\exp(1/4) - 1](\varphi_i^\xi + H_0), \quad \text{если} \quad (i-1)h_k \in (\xi, 1].$$

Поэтому, используя $\varepsilon_k \le \dfrac{3}{2}h_k$, получаем

$$0 \le -\frac{\varphi_i^\xi - \varphi_{i-1}^\xi}{h_k} \le \frac{3}{2}[\exp(1/4) - 1]\left(\frac{\varphi_i^\xi}{\varepsilon_k} + \frac{2H_0}{3h_k}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n_k + 1.$$

Для любого ξ вектор φ_i^ξ удовлетворяет условию леммы 2 с константами

$$c_0 = \frac{3}{2}\left(\exp\left(\frac{1}{4}\right) - 1\right) < \frac{4}{9} \text{ и } H = \frac{2}{3}c_0 H_0 h_k^{-1}.$$

Пусть правая граница Ω_ξ совпадает с разбиением, т.е. $\xi = ih_k$ для некоторого i. Из леммы 2 выводим

Следствие 3. Рассмотрим $f_k \in \mathbb{V}_k$ такую, что $\operatorname{supp}(f_k) \in \Omega_\eta$. Пусть u_k – соответствующее решение задачи (6). Предположим, что $\eta - \xi \ge 8h_k p|\ln h_k|$, $p > 0$ и $1 - \eta \ge 4h_k|\ln h_k|$. Тогда имеют место оценки

$$\|(u_k)_x\|_{L_2(\Omega_\xi)} \le ch_k^p\|f_k\|, \tag{33}$$

$$\|(u_k)_y\|_{L_2(\Omega_\xi)} \le c\xi h_k^{p-1}\|f_k\|, \tag{34}$$

$$\sum_{j=1}^{n_k} h_k^2 u_{i,j}^2 = ch_k^{2p+2}\|f_k\|^2. \tag{35}$$

Доказательство. Оценка (33) является следствием (23). Действительно, рассмотрим неравенства

$$\|(u_k)_x\|_{L_2(\Omega_\xi)} = \sum_{i:\, ih \le \xi}\sum_{j=1}^{n_k} h_k^2\left(\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_k}\right)^2 = \frac{1}{1-H_0}\sum_{i:\, ih \le \xi}\sum_{j=1}^{n_k} h_k^2\varphi_i\left(\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_k}\right)^2 \le$$

$$\le c\|D_x\mathbf{u}\|_\Phi^2 \le c(\|M_k\mathbf{f}\|_\Phi^2 + H\|f_k\|^2) \le c(\max_{ih \ge \eta}\varphi_i)\|M_k\mathbf{f}\|^2 + ch_k^{2p}\|f_k\|^2 \le c(\max_{ih \le \eta}(\varphi_i) + h_k^{2p})\|f_k\|^2 \le ch_k^{2p}\|f_k\|^2.$$

Оценка (34) следует из обратного неравенства, неравенства Фридрихса и (33):

$$\|(u_k)_u\|_{L_2(\Omega_\xi)} \le ch_k^{-1}\|u_k\|_{L_2(\Omega_\xi)} \le c\xi h_k^{-1}\|(u_k)_x\|_{L_2(\Omega_\xi)} \le c\xi h_k^{p-1}\|f_k\|.$$

Перейдем к проверке (35). При нашем выборе Φ константа d из условия леммы 3 равна $e^{1/8}$. Применим (24), неравенство Коши (аналогично (31)) и (34), получим

$$\langle -\Phi_x\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle \le ch_k^{2p+1}\|f_k\|^2.$$

С другой стороны,

$$\langle -\Phi_x\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_k} h_k^2\frac{\varphi_i^\xi - \varphi_{i+1}^\xi}{h_k}u_{i,j}^2 \ge \sum_{j=1}^{n_k} h_k^2\frac{\varphi_i^\xi - \varphi_{i+1}^\xi}{h_k}u_{i,j}^2.$$

Осталось заметить, что для индекса $i : ih_k = \xi$ имеем $(\varphi_i^\xi - \varphi_{i+1}^\xi)h_k^{-1} = (1 - e^{h_k})h_k^{-1}$.

При $p = 0$ доказательство оценок (33)–(35) не использует предположение $\mathrm{supp}(f_k) \in \Omega_\eta$. Сформулируем этот случай в виде отдельного следствия.

Следствие 4. Пусть $f_k \in \mathbb{V}_k$ и u_k – соответствующее решение задачи (6). Предположим, что $1 - \xi_4 \ge 4h_k|\ln h_k|$. Тогда имеет место оценка

$$\|(u_k)_x\|_{L_2(\Omega_\xi)} \le c\|f_k\|, \tag{36}$$

$$\sum_{j=1}^{n_k} h_k^2 u_{i,j}^2 \le ch_k^2\|f_k\|^2. \tag{37}$$

Следствие 5. Рассмотрим $f_k \in \mathbb{V}_k$ такую, что $\mathrm{supp}(f_k) \in \Omega_\eta$. Пусть u и u_k – решения задач (7) и (6) соответственно. Предположим $\eta - \xi \ge 8h_kp|\ln h_k|$, $p > 0$ и $\eta \ge 1 - 4h_k|\ln h_k|$, тогда

$$\|(u-u_k)_x\|_{L_2(\Omega_\xi)} \le ch_k^p\|f_k\|,$$

$$\|(u-u_k)_y\|_{L_2(\Omega_\xi)} \le c\max\left\{\sqrt{\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon}};\ \frac{\xi}{h_k}\right\}h_k^p\|f_k\|.$$

Для проверки следствия 5 необходимо применить оценки (28), (30), (33), (34) и неравенство треугольника.

Результат следствия 5 показывает, что $\mathbb{H}^1$-норма ошибки около границы втекания Γ_W может быть сделана мала, если правая часть равна нулю в достаточно большой подобласти ($\Omega\backslash\Omega_\eta$) около Γ_W. Данное свойство нам понадобится при доказательстве аппроксимации для случая $\xi = \varepsilon_k|\ln h_k|$ и $p = 5/8 > 1/2$. Поэтому рассмотрим $\eta = 5h_k|\ln h_k| + \varepsilon_k|\ln h_k|$. Выбираем Ω_η такую, что левая её граница совпадает с разбиением. Воспользуемся соотношениями $|\ln h_k| = k\ln 2$ и $\frac{2}{3}\varepsilon_k \le h_k$ и, следовательно, $(\varepsilon_k + 5h_k)|\ln h_k| \le 4kh_k$, $k > 1$. Определим на каждом сеточном уровне вспомогательную подобласть

$$\Omega_k^W := \{(x, y) \in \Omega \mid x < 4kh_k\}. \tag{38}$$

Благодаря неравенствам

$$\frac{\xi}{h_k}h_k^p \le ch_k^{1/2} \le c\frac{h_k}{\sqrt{\varepsilon}}$$

следствие 5 непосредственно влечет

Следствие 6. Рассмотрим $f_k \in \mathbb{V}_k$ такую, что $f_k = 0$ в Ω_k^W. Тогда в $\Omega^w := \{(x, y) \in \Omega \mid x < \varepsilon_k|\ln h_k|\}$ справедливы оценки

$$\|(u-u_k)_x\|_{L_2(\Omega^w)} \le ch_k^{1/2}\|f_k\|,$$

$$\|(u-u_k)_y\|_{L_2(\Omega^w)} \le c\frac{h_k}{\sqrt{\varepsilon}}\|f_k\|.$$

7. МНОГОСЕТОЧНЫЙ МЕТОД И АНАЛИЗ СХОДИМОСТИ

Опишем многосеточный метод для решения системы вида $A_k\mathbf{x} = \mathbf{b}$ с матрицей жесткости A_k из разд. 3 и проведем анализ сходимости метода.

Нам понадобится определение подобласти Ω_k^{2E} у границы вытекания:

$$\Omega_k^{2E} := \{(x, y) \in \Omega \mid x > 1 - 2\alpha k h_k\}, \tag{39}$$

где целое положительное число α, не зависящее от k и ε, будет определено позже.

Пусть $W_k : \mathbb{X}_k \longrightarrow \mathbb{X}_k$ некоторая обратимая матрица. Рассмотрим сглаживания вида

$$\mathbf{x}^{\mathrm{new}} = \mathcal{S}_k(\mathbf{x}^{\mathrm{old}}, \mathbf{b}) = \mathbf{x}^{\mathrm{old}} - \omega W_k^{-1}(A_k\mathbf{x}^{\mathrm{old}} - \mathbf{b}) \quad \text{для} \quad \mathbf{x}^{\mathrm{old}}, \mathbf{b} \in \mathbb{X}_k. \tag{40}$$

Матрицу сглаживающих итераций обозначим через

$$S_k = I - \omega_k W_k^{-1}A_k. \tag{41}$$

В качестве W_k используем переобусловливатель блочного типа

$$W_k = 4\frac{\varepsilon}{h_k^2}\Phi_\alpha + \Phi_\alpha D_x + A_k^{2E}, \tag{42}$$

где A_k^{2E} – сужение оператора A_k на Ω_k^{2E} (матрица A_k^{2E} получается из матрицы A_k заменой всех строк с номерами узлов из $\Omega\backslash\Omega_k^{2E}$ на нулевые), Φ_α – диагональная матрица, определенная в разд. 5 для вектора $\{\varphi_i^\xi\}$ с $\xi = 1 - 2\alpha k h_k$ (положим $\Phi_\alpha = 0$, если $\xi \le 0$). Подходящий выбор параметра ω_k будет сделан позже. Матрица

$$4\frac{\varepsilon}{h_k^2}\Phi_\alpha + \Phi_\alpha D_x$$

двухдиагональная, причем распадается на блоки. Вычисление $W_k^{-1}\mathbf{z}$ для некоторого вектора $\mathbf{z}$ происходит следующим образом: сначала методом Гаусса (прямой ход) вычисляются все значения в узлах сетки, принадлежащих $\Omega\backslash\Omega_k^{2E}$, потом, используя полученные недостающие значения на левой границе Ω_k^{2E}, в этой подобласти решается система с матрицей $A_k^{2E} + T$, где T – сужение оператора

$$4\frac{\varepsilon}{h_k^2}\Phi_\alpha + \Phi_\alpha D_x \quad \text{на} \quad \Omega_k^{2E}.$$

Замечание 2. При построении многосеточных методов для сингулярно возмущенных задач зачастую рекомендуется построение так называемых универсальных сглаживаний (*robust smoother*). Такие сглаживания должны становиться точным методом для решения вырожденной задачи, т.е., когда параметр ε

стремится к нулю (см. [7, гл. 10]). Для итераций (40) это означало бы, что $A_k - W_k = O(\varepsilon)$ (константа в O может зависеть от k).

Такие универсальные сглаживания известны для некоторых анизотропных задач и используют блочные методы Якоби, Гаусса-Зейделя или ILU-разложение. Теоретический анализ может быть найден в [31]–[33]. В случае если задача конвекции–диффузии (2) аппроксимируется с помощью конечных разностей против потока, то легко видеть, что блочный метод Якоби дает универсальные сглаживания. Однако для аппроксимации по методу конечных элементов такие блочные переобусловливатели не приводят к универсальным сглаживаниям. Это становится понятным при рассмотрении шаблона (11). При $\varepsilon \longrightarrow 0$ первые два слагаемых дают блочную трехдиагональную матрицу, но в третьем (конвективном) слагаемом связь в y-направлении не исчезает. Поэтому непонятно, как для дискретизации методом конечных элементов могут быть построены универсальные сглаживания.

При анализе многосеточного метода для задач типа реакции-диффузии или анизотропных уравнений диффузии константа в свойстве аппроксимации обычно зависит от ε, как $O(\varepsilon^{-1})$. Тогда эта зависимость компенсируется множителем ε в свойстве сглаживания (см. [31]–[35]). В нашей работе мы не можем применить тот же прием, так как универсальные сглаживания построить не удается. Вместо этого мы используем другое разложение матрицы итераций, приводящее к модифицированным, не зависящим от ε свойствам сглаживания и аппроксимации.

Замечание 3. Отметим следующие свойства предложенных сглаживаний, которые, по-видимому, необходимы для обеспечения универсальной оценки нормы матрицы итераций многосеточного метода. Около границ втекания и вытекания сглаживающие итерации быстро сходятся. Происходит это за счет постановки краевых условий на границе втекания, которые переобусловливатель W_k учитывает. Наличие этих условий обеспечивают быстрое затухание ошибки в небольшой области вниз по течению. Около границы вытекания быстрое сокращение ошибки происходит в силу наличия блока A_k^{2E} в (40). Эти свойства найдут свое математическое выражение в следствиях 7 и 8.

В качестве операторов перехода с сетки на сетку мы выбираем канонические продолжение и проектор:

$$\begin{aligned} p_k &: \mathbb{X}_{k-1} \longrightarrow \mathbb{X}_k, \quad p_k = P_k^{-1} P_{k-1}, \\ r_k &: \mathbb{X}_k \longrightarrow \mathbb{X}_{k-1}, \quad r_k = p_k^* = \frac{1}{4} p_k^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{43}$$

Теперь все готово для определения многосеточного метода в виде алгоритма. Обозначим через k_0 минимальное Ω_k^{2E} такое, что $\Omega_k^{2E} \neq \Omega$.

Алгоритм

function MGM($\mathbf{x}_k$, $\mathbf{b}_k$, k)
{
  if $k = k_0$ then
    $\mathbf{x}_k := A_k^{-1}\mathbf{b}_k$; // solve coarse grid problem
  else
  {
    $\mathbf{x}_k := \mathcal{S}_k^{\mu_k}(\mathbf{x}_k, \mathbf{b}_k)$; // μ_k presmoothings
    $\mathbf{d}_{k-1} := r_k(\mathbf{b}_k - A_k\mathbf{x}_k)$; // restriction of defect
    $e_{k-1}^0 := 0$;
    for $i = 1$ to γ do // recursion
      $\mathbf{e}_{k-1}^i := \mathrm{MGM}(\mathbf{e}_{k-1}^{i-1}, \mathbf{d}_{k-1}, k-1)$;
    $\mathbf{x}_k := \mathbf{x}_k + p_k\mathbf{e}_{k-1}^{\gamma}$; // add coarse grid correction
    $\mathbf{x}_k := \mathcal{S}_k^{\nu_k}(\mathbf{x}_k, \mathbf{b}_k)$; // ν_k postsmoothings
  }
  return $\mathbf{x}_k$;
}

Для анализа нам понадобится выбирать различные параметры релаксации для пред- и пост-сглаживаний. Поэтому введем обозначения

$$S_{k,\,\mathrm{pr}} := I - \omega_{k,\,\mathrm{pr}} W_k^{-1} A_k, \quad S_{k,\,\mathrm{po}} := I - \omega_{k,\,\mathrm{po}} W_k^{-1} A_k.$$

Матрица итераций двухсеточного метода примет вид

$$T_k = S_{k,\,\mathrm{po}}^{\nu_k}(I - p_k A_{k-1}^{-1} r_k A_k) S_{k,\,\mathrm{pr}}^{\mu_k}.$$

Для W-цикла (т.е. $\gamma = 2$) многосеточного метода матрица итераций может быть записана с помощью следующей рекурсии (см., например, [4], [7]):

$$M_{k_0}^{\mathrm{mgm}} := 0, \quad M_k^{\mathrm{mgm}} = T_k + S_{k,\,\mathrm{po}}^{\nu_k} p_k (M_{k-1}^{\mathrm{mgm}})^2 A_{k-1}^{-1} r_k A_k S_{k,\,\mathrm{pr}}^{\mu_k}, \quad k > 1. \tag{44}$$

Напомним определение: $J_k^{2E} \in \mathbb{R}^{N_k \times N_k}$ – диагональная матрица такая, что $(J_k^{2E})_{ii} = 0$, если узел с индексом i (в глобальной нумерации) лежит в Ω_k^{2E}, иначе $(J_k^{2E})_{ii} = 1$. В анализе метода важную роль также играет вспомогательная подобласть Ω_k^W около границы втекания, определенная в (38). Как и в разд. 6, для Ω_k^W будем использовать функцию срезки. Определим диагональную матрицу Φ_k следующим образом:

$$\hat{\Phi}_k := \mathrm{diag}(\varphi_1^{\xi}, \ldots, \varphi_{n_k}^{\xi}), \quad \Phi_k := \hat{I}_k \otimes \hat{\Phi}_k, \tag{45}$$

где φ_j^{ξ} – функция срезки, определенная в разд. 6, с $\xi = 4kh_k$. Для простоты обозначений не будем в дальнейшем писать индекс ξ в φ_i^{ξ}. Диагональная матрица Φ_k является положительно-определенной (будем различать ее с матрицей Φ_α из определения W_k).

Аналогично J_k^{2E} определим проектор J_k^E относительно подобласти

$$\Omega_k^E := \{(x, y) \in \Omega \mid x > 1 - \alpha k h_k\}.$$

Нам понадобится следующие свойства J_k^E.

Лемма 5. *Справедливы равенства*

$$A_k J_k^E = J_k^E A_k + I_A, \tag{46}$$

$$W_k J_k^E = J_k^E W_k + I_W. \tag{47}$$

Для матриц I_A и I_W выполнены оценки

$$\|I_A A_k^{-1}\| \le c_p, \quad \|I_A p A_{k-1}^{-1} r\| \le c_p, \tag{48}$$

$$\|I_W A_k^{-1}\| \le c_p, \quad \|I_W p A_{k-1}^{-1} r\| \le c_p. \tag{49}$$

Доказательство леммы приведено в п. 8.2.

Перейдем к изучению рассмотрению специальных свойств пред- и постсглаживающих итераций.

Лемма 6. *Справедливо равенство*

$$(I - \omega_{k,\,\mathrm{po}} A_k W_k^{-1})(I - J_k^E) = (1 - \omega_{k,\,\mathrm{po}})(I - J_k^E) + \Psi_k \tag{50}$$

с некоторой матрицей Ψ_k такой, что $\|\Psi_k\| \le c h_k^{s\alpha}$, $s > 0$ – некоторая абсолютная константа.

Доказательство леммы приведено в п. 8.2.

Благодаря лемме 6 можно показать, что около границы вытекания постсглаживающие итерации быстро сходятся. А именно, справедливо

Следствие 7. Пусть $\tilde{S}_{k,\,\mathrm{po}} := A_k S_{k,\,\mathrm{po}} A_k^{-1}$. Выполняется оценка

$$\left\|\tilde{S}_{k,\,\mathrm{po}}^{\nu_k}(I - J_k^E)\right\| \le (1 - \omega_{k,\,\mathrm{po}})^{\nu_k} + c_4 h_k^{s\alpha}.$$

Доказательство следующей леммы дано в [22]. Оно остается в силе для задачи с условиями Дирихле на Γ_E.

Лемма 7. *Существуют константы* $d_1 > 0$, $d_2 > 0$, *не зависящие от* k *и* ε, *такие, что*

$$\left\|\Phi_k^{1/2}\left(I - \frac{d_1}{k^2}A_k W_k^{-1}\right)\Phi_k^{-1/2}\right\| \le 1 - \frac{d_2}{k^4}. \tag{51}$$

Предположение 2. В предсглаживателе $S_{k,\,\mathrm{pr}}$ положим $\omega_{k,\,\mathrm{pr}} := \min\{1/4, d_1/k^2\}$.

Выражение в (51) может быть записано в виде

$$\left\|I - \frac{d_1}{k^2}A_k W_k^{-1}\right\|_{\Phi_k} \le 1 - \frac{d_1}{k^4}.$$

Таким образом, получена оценка сходимости итераций в почти вырожденной норме $\|\cdot\|_{\Phi_k}$. Эта норма, однако, совпадает с евклидовой для векторов, отличных от нуля только в Ω_k^W. Поэтому оценка (51) показывает, что сглаживающие итерации быстро сходятся около границы втекания. Действительно, из предположения 2, леммы 7 и $\|\Phi_k\| \le 1$ получаем

$$\left\|\Phi_k^{1/2}\left(I - \frac{d_1}{k^2}A_k W_k^{-1}\right)^{\mu_k}\right\| \le \left\|\left(\Phi_k^{1/2}\left(I - \frac{d_1}{k^2}A_k W_k^{-1}\right)\Phi_k^{-1/2}\right)^{\mu_k}\right\|\left\|\Phi_k^{1/2}\right\| \le \left(1 - \frac{d_2}{k^4}\right)^{\mu_k}.$$

Следствие 8. Пусть $\tilde{S}_{k,\,\mathrm{pr}} := A_k S_{k,\,\mathrm{pr}} A_k^{-1}$. Выполняется оценка

$$\left\|\Phi_k^{1/2}\tilde{S}_{k,\,\mathrm{pr}}^{\mu_k}\right\| \le \left(1 - \frac{d_2}{k^4}\right)^{\mu_k}.$$

Перейдем к формулировке двух базовых оценок в анализе сходимости многосеточного метода.

Лемма 8 (модифицированное свойство аппроксимации). *Существует константа* c_2, *не зависящая от* k *и* ε, *такая, что*

$$\left\|J_k^E W_k(A_k^{-1} - p_k A_{k-1}^{-1} r_k)(I - \Phi_k)\right\| \le c_2 \quad \text{для} \quad k = 2, 3, \ldots. \tag{52}$$

Доказательство приведено в п. 8.5.

Лемма 9. *Существуют положительные константы* α (*см.* (39)) *и* c_1, *не зависящие от* k *и* ε, *такие, что справедливо*

$$W_k A_k^{-1} \ge c_1 I \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{53}$$

Доказательство приведено в п. 8.3.

Предположение 3. В постсглаживающих итерациях (40) положим $\omega_{k,\,\mathrm{po}} := c_1$.

Получаем свойство сглаживания.

Лемма 10 (модифицированное свойство сглаживания). *Выполняется оценка*

$$\left\|A_k S_k^{\nu_k} W_k^{-1}\right\| \le \frac{4}{c_1\sqrt{2\pi\nu_k}}.$$

Доказательство. Легко проверить (см. [22]), что неравенство (53) влечет оценку

$$\left\|I - 2c_1 A_k W_k^{-1}\right\| \le 1. \tag{54}$$

Теперь утверждение леммы является следствием (54) и теоремы 10.6.8 из [36].

Наконец, заметим, что из предположений 2, 3 и (54) следует

$$\|\tilde{S}_{k,\,\mathrm{po}}\| \le 1, \quad \|\tilde{S}_{k,\,\mathrm{po}}\| \le 1. \tag{55}$$

Будем использовать оценку для канонического оператора проекции

$$\|r_k\| \le c_r$$

с константой c_r, не зависящей от k. Нам также понадобится следующий результат.

Лемма 11. *Существуют константы c_3 и c_5, не зависящие от k и ε, такие, что для $k = 2, 3, \ldots$ выполнено*

$$\|J_k^E A_k p_k A_{k-1}^{-1}\| \le c_3, \quad \|A_k p_k A_{k-1}^{-1}\| \le c_5 h_k^{-1}. \tag{56}$$

Доказательство приведено в п. 8.6.

Используя эти результаты, сначала докажем результат о сходимости двухсеточного метода в норме: $\|B\|_{A^{\mathrm{T}}A} := \|A_k B A_k^{-1}\|$ для $B \in \mathbb{R}^{N_k \times N_k}$.

Теорема 2. *Для матрицы итераций двухсеточного метода имеет место оценка*

$$\|T_k\|_{A^{\mathrm{T}}A} \le c\{\nu_k^{-1/2} + (1 - d_2/k^4)^{\mu_k} + [(1 - \omega_{k,\,\mathrm{po}})^{\nu_k} + h_k^{s\alpha}]h_k^{-1}[1 + (1 - d_2/k^4)^{\mu_k}]\},$$

где s – константа из леммы 5.

Доказательство. Теорема доказывается с помощью следующего разложения матрицы итераций:

$$\|T_k\|_{A^{\mathrm{T}}A} = \|S_{k,\,\mathrm{po}}^{\nu_k}(I - p_k A_{k-1}^{-1} r_k A_k) S_{k,\,\mathrm{pr}}^{\mu_k}\|_{A^{\mathrm{T}}A} = \|S_{k,\,\mathrm{po}}^{\nu_k}(A_k^{-1} - p_k A_{k-1}^{-1} r_k)[(I - \Phi_k^{1/2}) + \Phi_k^{1/2}] A_k S_{k,\,\mathrm{pr}}^{\mu_k}\|_{A^{\mathrm{T}}A} \le \tag{57}$$

$$\begin{aligned} &\le \|S_{k,\,\mathrm{po}}^{\nu_k}[(I - J_k^E) + J_k^E](A_k^{-1} - p_k A_{k-1}^{-1} r_k)(I - \Phi_k^{1/2}) A_k S_{k,\,\mathrm{pr}}^{\mu_k}\|_{A^{\mathrm{T}}A} + \\ &+ \|S_{k,\,\mathrm{po}}^{\nu_k} A_k^{-1}[(I - J_k^E) + J_k^E](I - A_k p_k A_{k-1}^{-1} r_k) \Phi_k^{1/2} A_k S_{k,\,\mathrm{pr}}^{\mu_k}\|_{A^{\mathrm{T}}A}. \end{aligned} \tag{58}$$

Оценим каждое из слагаемых отдельно. В силу соотношений (46), (47) и неравенства треугольника имеем

$$\begin{aligned} &\|S_{k,\,\mathrm{po}}^{\nu_k}[(I - J_k^E) + J_k^E](A_k^{-1} - p_k A_{k-1}^{-1} r_k)(I - \Phi_k^{1/2}) A_k S_{k,\,\mathrm{pr}}^{\mu_k}\|_{A^{\mathrm{T}}A} \le \\ &\le \|S_{k,\,\mathrm{po}}^{\nu_k} A_k^{-1}[(I - J_k^E) A_k - I_A](A_k^{-1} - p_k A_{k-1}^{-1} r_k)(I - \Phi_k^{1/2}) A_k S_{k,\,\mathrm{pr}}^{\mu_k}\|_{A^{\mathrm{T}}A} + \\ &+ \|S_{k,\,\mathrm{po}}^{\nu_k} W_k^{-1}(J_k^E W_k + I_W)(A_k^{-1} - p_k A_{k-1}^{-1} r_k)(I - \Phi_k^{1/2}) A_k S_{k,\,\mathrm{pr}}^{\mu_k}\|_{A^{\mathrm{T}}A} = \\ &= \|\tilde{S}_{k,\,\mathrm{po}}^{\nu_k} A_k^{-1}[(I - J_k^E) A_k - (I - J_k^{E+1}) I_A](A_k^{-1} - p_k A_{k-1}^{-1} r_k)(I - \Phi_k^{1/2}) \tilde{S}_{k,\,\mathrm{pr}}^{\mu_k}\| + \\ &+ \|A_k S_{k,\,\mathrm{po}}^{\nu_k} W_k^{-1}(J_k^E W_k + I_W)(A_k^{-1} - p_k A_{k-1}^{-1} r_k)(I - \Phi_k^{1/2}) \tilde{S}_{k,\,\mathrm{pr}}^{\mu_k}\|. \end{aligned}$$

Для получения последнего равенства использовалоось соотношение $I_A = (I - J_k^{E+1}) I_A$, где J_k^{E+1} – проектор для области, являющейся расширением Ω_k^E на полосу шириной h_k влево. Следствие 7 остается в силе (быть может, с другой константой c_4), если вместо J_k^E использовать J_k^{E+1}. Оцениваем оба слагаемых, используя неравенства треугольника, Коши и результаты лемм 8, 10, 11, следствия 7 и оценки (55), (48) и (49):

$$\begin{aligned} &\|\tilde{S}_{k,\,\mathrm{po}}^{\nu_k}[(I - J_k^E) A_k - (I - J_k^{E+1}) I_A](A_k^{-1} - p_k A_{k-1}^{-1} r_k)(I - \Phi_k^{1/2}) \tilde{S}_{k,\,\mathrm{pr}}^{\mu_k}\| \le \\ &\le \|\tilde{S}_{k,\,\mathrm{po}}^{\nu_k}(I - J_k^E)\| \|I - A_k p_k A_{k-1}^{-1} r_k\| \|I - \Phi_k^{1/2}\| \|\tilde{S}_{k,\,\mathrm{pr}}^{\mu_k}\| + \\ &+ \|\tilde{S}_{k,\,\mathrm{po}}^{\nu_k}(I - J_k^{E+1})\|(\|I_A A_k^{-1}\| + \|I_A p_k A_{k-1}^{-1} r_k\|)\|I - \Phi_k^{1/2}\| \|\tilde{S}_{k,\,\mathrm{pr}}^{\mu_k}\| \le \\ &\le [(1 - \omega_{k,\,\mathrm{po}})^{\nu_k} + c_4 h^{s\alpha}](1 + c_5 h_k^{-1} c_r + 2c_p), \end{aligned}$$

$$\|A_k S_{k,\,\mathrm{po}}^{\nu_k} W_k^{-1}(J_k^E W_k + I_W)(A_k^{-1} - p_k A_{k-1}^{-1} r_k)(I - \Phi_k^{1/2}) \tilde{S}_{k,\,\mathrm{pr}}^{\mu_k}\| \le$$

$$\le \left\|A_kS_{k,\,\mathrm{po}}^{\nu_k}W_k^{-1}\right\|(\left\|J_k^EW_k(A_k^{-1}-p_kA_{k-1}^{-1}r_k)(I-\Phi_k^{1/2})\right\|+\left\|I_WA_k^{-1}\right\|+\left\|I_Wp_kA_{k-1}^{-1}r_k\right\|)\left\|\tilde{S}_{k,\,\mathrm{pr}}^{\mu_k}\right\|\le$$

$$\le\frac{4}{c_1\sqrt{2\pi\nu_k}}(c_2+2c_p)\le c\nu^{-1/2}.$$

Используя дополнительно результат следствия 8, оценивая второе слагаемое из (58):

$$\left\|S_{k,\,\mathrm{po}}^{\nu_k}A_k^{-1}[(I-J_k^E)+J_k^E](I-A_kp_kA_{k-1}^{-1}r_k)\Phi_k^{1/2}A_kS_{k,\,\mathrm{pr}}^{\mu_r}\right\|_{A^{\tau}A}\le$$

$$(\le\left\|\tilde{S}_{k,\,\mathrm{po}}^{\nu_k}(I-J_k^E)\right\|\left\|(I-A_kp_kA_{k-1}^{-1}r_k)\right\|\left\|\Phi_k^{1/2}\tilde{S}_{k,\,\mathrm{pr}}^{\mu_k}\right\|+\left\|\tilde{S}_{k,\,\mathrm{po}}^{\nu_k}\right\|\left\|J_k^E(I-A_kp_kA_{k-1}^{-1}r_k)\right\|\left\|\Phi_k^{1/2}\tilde{S}_{k,\,\mathrm{pr}}^{\mu_k}\right\|)\le$$

$$\le[(1-\omega_{k,\,\mathrm{po}})^{\nu_k}+c_4h^{s\alpha}](1+c_5h_k^{-1}c_r)\left(1-\frac{d_2}{k^4}\right)^{\mu_k}.$$

Суммируя полученные оценки и выбирая подходящую константу c, мы доказываем теорему.

Из результата для двухсеточного метода из теоремы 2 следует теорема о сходимости многосеточного метода.

Теорема 3. *В предположениях теоремы* 2 *и при условии на количество сглаживающих итераций вида*

$$\nu_k\ge c_{\mathrm{po}}k,\quad \mu_k\ge c_{\mathrm{pr}}k^4$$

с подходящими константами c_{po}, c_{pr} *и подходящей константой* α *справедлива следующая оценка для показателя сходимости* W*-цикла*:

$$\left\|M_k^{\mathrm{mgm}}\right\|_{A^{\tau}A}\le\xi^* \tag{59}$$

с константой $\xi^*<1$, *не зависящей от* k *и* ε.

Доказательство. Пусть константы c_{po}, c_{pr} и α выбраны такими, что $\|T_k\|_{A_k^{\tau}A_k}\le q<1$, $k>1$ и выполнено предположение леммы 9. Обозначим $\xi_k:=\left\|M_k^{\mathrm{mgm}}\right\|_{A_k^{\tau}A_k}$. Из рекурсивного соотношения (44) для M_k^{mgm} непосредственно следует

$$\begin{aligned}\xi_k&\le\|T_k\|_{A_k^{\tau}A_k}+[\left\|\tilde{S}_{k,\,\mathrm{po}}\right\|^{\nu_k}\left\|J_k^EA_kp_kA_{k-1}^{-1}\right\|+\left\|\tilde{S}_{k,\,\mathrm{po}}^{\tilde{\nu}_k}(I-J_k^E)\right\|\left\|A_kp_kA_{k-1}^{-1}\right\|]\xi_{k-1}^2\|r_k\|\left\|\tilde{S}_{k,\,\mathrm{pr}}\right\|^{\mu_k}\le\\&\le\|T_k\|_{A_k^{\tau}A_k}+\{c_3+[(1-\omega_{k,\,\mathrm{po}})^{\nu_k}+c_4h^{s\alpha}]c_5h_k^{-1}\}\xi_{k-1}^2c_r\le q+c\xi_{k-1}^2.\end{aligned} \tag{60}$$

Теперь оценка для двухсеточного метода из теоремы 2 и стандартные рассуждения о неподвижной точке для соотношения (60) доказывают теорему.

Замечание 4. Подсчитаем арифметическую сложность одного W-цикла. Умножение матрицы на вектор на k-м уровне имеет сложность порядка $O(N_k)=O(n_k^2)$. Сложность одной сглаживающей итерации имеет порядок $O(N_k)+O(n_k(\ln n_k)^3)$. Число сглаживаний имеет зависимость от k вида $\nu_k\sim k$ и $\mu_k\sim k^4$. Поэтому вычисления на k-м уровне требуют $O(N_k(\ln N_k)^4)$ арифметических операций. В силу стандартных рассуждений (см. [36, гл. 10]), W-цикл многосеточного метода имеет арифметическую сложность порядка $O(N_k(\ln N_k)^4)$, т.е. квазиоптимальную сложность.

8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

8.1. Доказательство леммы 2

Прежде всего отметим связь между разностью значений функции $v_k\in\mathbb{V}_k$ в узлах сетки и нормой ее производной по x:

$$\|(v_k)_x\|_{\omega}^2=\sum_{(i,j)\in\mathcal{I}}\left(\frac{v_k(x_{i+1,j})-v_k(x_{i,j})}{h_k}\right)^2h_k^2, \tag{61}$$

где $\omega \in \Omega$ – подобласть $\{(x, y) \mid x \in (i_0 h_k, i_1 h_k), y \in (0, 1)\}$, $\mathcal{I}$ – набор индексов (i, j) таких, что $i = i_0, \ldots, i_1 - 1$. Отметим также равенство

$$\int_{\Gamma_W} (v_k)_x^2 dy = \sum_{j=1}^{n_k} h_k \left(\frac{v_{1,j} - v_{0,j}}{h_k}\right)^2.$$

По определению A_k, вектор $\mathbf{u}$ удовлетворяет системе уравнений

$$A_k \mathbf{u} = M_k \mathbf{f}. \tag{62}$$

Умножим (62) скалярно на $\Phi D_x \mathbf{u}$. Рассмотрим разложение (10) матрицы A_k и изучим вклад каждого слагаемого. Заметим, что условие (22) влечет $\varphi_i \le h_k H + (1 + 3c_0)\varphi_{i+1}$. Используя это неравенство, легко проверить (удобно воспользоваться шаблоном (11)), что

$$\langle D_k \mathbf{u}, D_x \mathbf{u}\rangle_\Phi \ge \left(\frac{1}{3} - \frac{c_0}{4}\right) \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} h_k^2 \varphi_i \left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_k}\right)^2 - \frac{h_k H}{12} \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} h_k^2 \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_k}\right)^2. \tag{63}$$

Здесь и далее $u_{i,j}$ – значение u_k в узле сетки $x_{i,j}$. Произведения с первым и последним членом в (10) дают, соответственно,

$$\varepsilon \langle A_y \mathbf{u}, D_x \mathbf{u}\rangle_\Phi = -\varepsilon \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} h_k^2 \varphi_i \left(\frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h_k^2}\right)\left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_k}\right) =$$

$$= \frac{h_k \varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=0}^{n_k} h_k^2 \varphi_i \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j}}{h_k^2}\right)^2 - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=0}^{n_k} h_k^2 \left(\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h_k}\right)\left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_k}\right)^2 \ge 0,$$

$$\bar{\varepsilon}_k \langle A_x \mathbf{u}, D_x \mathbf{u}\rangle_\Phi = -\bar{\varepsilon}_k \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} h_k^2 \varphi_i \left(\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_k^2}\right)\left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_k}\right) =$$

$$= \frac{\bar{\varepsilon}_k \varphi_1}{2} \sum_{j=1}^{n_k} h_k \left(\frac{u_{1,j} - u_{0.j}}{h_k}\right)^2 + \frac{h_k \bar{\varepsilon}_k}{2} \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} h_k^2 \varphi_i \left(\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_k^2}\right)^2 +$$

$$+ \frac{\bar{\varepsilon}_k}{2} \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} h_k^2 \left(\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h_k}\right)\left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_k}\right)^2 \ge$$

$$\ge \frac{\bar{\varepsilon}_k \varphi_1}{2} \sum_{j=1}^{n_k} h_k \left(\frac{u_{1,j} - u_{0,j}}{h_k}\right)^2 - \frac{c_0}{2} \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} h_k^2 \varphi_i \left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_k}\right)^2 - \frac{\bar{\varepsilon}_k H}{2} \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} h_k^2 \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_k}\right)^2.$$

Собираем полученные неравенства вместе, используем то, что $\varepsilon_k > \bar{\varepsilon}_k$ и $c_0 < 4/9$, и применяем неравенство Коши для оценки $\langle M_k \mathbf{f}, D_x \mathbf{u}\rangle$. Таким образом, мы доказываем следующую оценку с константой $c = (1/3 - 3c_0/4) > 0$:

$$\frac{\bar{\varepsilon}_k \varphi_1}{2} \int_{\Gamma_W} (u_k)_x^2 dy + c\|D_x \mathbf{u}\|_\Phi^2 \le$$

$$\le \langle M_k \mathbf{f}, D_x \mathbf{u}\rangle_\Phi + \left(\frac{h_k}{12} + \frac{\varepsilon_k}{2}\right) H \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} h_k^2 \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_k}\right)^2 \le c^{-1}\|M_k \mathbf{f}\|_\Phi^2 + 2\varepsilon_k H \|(u_k)_x\|^2;$$

последнее неравенство верно в силу (13), (61).

Теперь для доказательства (23) достаточно проверить оценку

$$\varepsilon_k \|(u_k)_x\|^2 \le C\|f_k\|^2. \tag{64}$$

Докажем (64) с константой $C = \sqrt{3e}$. В (6) положим $v_k = u_k$, получим равенство $\varepsilon\|(u_k)_y\|^2 + \varepsilon_k\|(u_k)_x\|^2 = (f_k, u_k)$. Теперь (64) будет следовать из оценки для $\mathbb{L}_2$-нормы

$$\|u_k\| \le C\|f_k\|. \tag{65}$$

Проведем рассуждения, сходные с доказательством оценки $\mathbb{L}_2$-нормы для решения непрерывной задачи. А именно, рассмотрим диагональную матрицу $E = \hat{I}_k \otimes \hat{E}$, где $\hat{E}$ – диагональная матрица размера $n_k \times n_k$ с элементами $e_{ii} = \exp(ih_k)$. Найдем матрицу $E^{-1}A_kE$. Непосредственные вычисления приводят к разложению

$$E^{-1}A_kE = \varepsilon A_y + \bar{\varepsilon}_k A_x + B + \frac{3}{2}e^{-h_k}D_x + M,$$

где B – кососимметричная матрица, а матрица M соответствует шаблону

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{cases} a_{22} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1-e^{-h_k}}{h_k}\right), \quad a_{13} = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{e^{h_k}-1}{h_k}\right), \\ a_{21} = a_{23} = \bar{\varepsilon}_k\left(\dfrac{e^{h_k}+e^{-h_k}-2}{2h_k^2}\right), \quad a_{31} = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1-e^{-h_k}}{h_k}\right). \end{cases}$$

С помощью теоремы Гершгорина и оценки $\bar{\varepsilon}_k \le \frac{7}{6}h_k$, легко убедиться, что $\lambda_{\min}(M + M^{\mathrm{T}}) > 2/3$ при $h_k \le 1/4$. Так как для остальных матриц в разложении справедливо $A_x, A_y, D_x > 0$ и $B = -B^{\mathrm{T}}$, то

$$\langle E^{-1}A_kE\mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle \ge \langle M\mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle \ge \frac{1}{3}\|\mathbf{z}\|^2 \quad \forall \mathbf{z} \in X_k.$$

Подставим $\mathbf{z} = E^{-1}\mathbf{u}$ и, применив неравенство Коши, получим

$$\|E^{-1}M_k\mathbf{f}\| \ge \frac{1}{3}\|E^{-1}\mathbf{u}\|. \tag{66}$$

Так как для матрицы масс $\lambda_{\max} \le 1$, то справедливы оценки

$$\|E^{-1}M_k\mathbf{f}\| \le \|M_k\mathbf{f}\| \le \|M_k^{1/2}\mathbf{f}\| = \|f_k\|,$$

$$\|E^{-1}\mathbf{u}\| \ge e^{-1}\|\mathbf{u}\| \ge e^{-1}\|M_k^{1/2}\mathbf{u}\| = e^{-1}\|u_k\|.$$

Подставляя эти неравенства в (66), мы доказываем (65). Лемма доказана.

Благодаря связи (61) между нормой конечно-элементной функцией u_k и вектором ее значений в узлах $\mathbf{u} = P_ku_k$ имеем $\langle A_x\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \|(u_k)_x\|^2$, и, в силу (8), $\|\mathbf{u}\| \simeq \|u_k\|$. Поэтому оценка (64) может быть записана, в виде

$$\varepsilon_k\langle A_x\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle \le C\|A_k\mathbf{u}\|^2, \tag{67}$$

а оценка (65) может быть записана в виде

$$\|u\| \le C\|A_k\mathbf{u}\|. \tag{68}$$

8.2. Доказательства лемм 5 и 6

Проверим равенство (46). Пользуясь определением A_k, например, в виде шаблона (11), легко проверить, что матрица I_A задается следующим образом. Для произвольного $\mathbf{z} \in \mathbb{X}_k$ рассмотрим $\mathbf{y} = I_A\mathbf{z}$. Для компонент вектора $\mathbf{y}$, соответствующих узлам на левой границе Ω_k^E, имеем

$$y_i = c_1z_{i+1} + c_2z_{i+1+n_k},$$

причем $c_1, c_2 \sim h_k^{-1}$. Остальные компоненты $\mathbf{y}$ равны нулю.

Положим $\mathbf{z} = A_k^{-1}\mathbf{f}$. Рассмотрим функцию $z = P_k\mathbf{z} \in \mathbb{V}_k$. Значения z в узле (ih_k, jh_k) обозначаются через z_{ij}. Пусть $i = n_k + 1 - \alpha k$ – индекс узлов на левой границе Ω_k^E. Справедливо следующее:

$$\|\mathbf{y}\|^2 \le ch_k^{-2}\sum_{j=1}^{n_k} h_k^2 z_{ij}^2.$$

Теперь воспользуемся оценкой (37):

$$\sum_{j=1}^{n_k} h_k^2 z_{ij}^2 \le ch_k^2\|\mathbf{f}\|^2.$$

Суперпозиция последних двух неравенств дает $\|\mathbf{y}\| \le c\|\mathbf{f}\|$, что по построению $\mathbf{y}$ означает

$$\|I_A A_k^{-1}\| \le c.$$

Также получаем оценку

$$\|I_A p A_{k-1}^{-1} r\| \le c.$$

Далее рассмотрим вектор $\mathbf{y} = I_W\mathbf{z}$, для которого дословно повторяются рассуждения, приведенные выше. Получаем

$$\|I_W A_k^{-1}\| \le c, \quad \|I_W p A_{k-1}^{-1} r\| \le c.$$

Лемма 5 доказана.

Перейдем к доказательству леммы 6. Для доказательства (50) заметим, что для произвольного вектора $z \in \mathbb{X}_k$ справедливо

$$A_k W_k^{-1}(I - J_k^E)\mathbf{z} = A_k^{2E} W_k^{-1}(I - J_k^E)\mathbf{z}.$$

Обозначим $\mathbf{y} = A_k^{2E} W_k^{-1}(I - J_k^E)\mathbf{z}$, получим из определения W_k

$$\mathbf{y} = (I - J_k^E)\mathbf{z} - \Phi_\alpha\left(4\frac{\varepsilon}{h^2} + D_x\right)W_k^{-1}(I - J_k^E)\mathbf{z}.$$

Обозначим

$$\Psi_k = \Phi_\alpha\left(4\frac{\varepsilon}{h^2} + D_x\right)W_k^{-1}(I - J_k^E).$$

Теперь рассмотрим вектор $\tilde{\mathbf{z}} = W_k^{-1}(I - J_k^E)\mathbf{z}$. Заметим, что компоненты $\tilde{\mathbf{z}}$, соответствующие узлам сетки в $\Omega\backslash\Omega_k^E$, равны нулю.

Вне подобласти

$$\Omega_k^{3E/2} := \left\{(x, y) \in \Omega \mid x > 1 - \frac{3\alpha k}{2}h_k\right\}$$

в силу следствия 3 $\left(\eta - \xi = \dfrac{\alpha}{2}kh_k\right)$ имеем

$$\|D_x\tilde{\mathbf{z}}\|_{\Omega\backslash\Omega_k^{3E/2}} \le ch_k^{\frac{\alpha}{12}}\|\mathbf{z}\|;$$

поэтому, используя неравенство Фридрихса в полосе шириной $\dfrac{1}{2}\alpha kh_k$ и неравенство $\varepsilon \le 2h_k$ для оценки $\left\|4\dfrac{\varepsilon}{h^2}\tilde{\mathbf{z}}\right\|$, получаем

$$\left\|\left(4\frac{\varepsilon}{h^2} + D_x\right)\tilde{\mathbf{z}}\right\|_{\Omega\backslash\Omega_k^{3E/2}} \le c\alpha kh_k^{\alpha/12}\|\mathbf{z}\|.$$

В подобласти $\Omega_k^{3E/2}$ благодаря малости элементов матрицы Φ_α имеем

$$\left\|\Phi_\alpha\left(4\frac{\varepsilon}{h^2} + D_x\right)\tilde{\mathbf{z}}\right\|_{\Omega_k^{3E/2}} \le ch_k^{\alpha/6-1}\|\tilde{\mathbf{z}}\| \le c\alpha k h_k^{\alpha/6}\|\mathbf{z}\|.$$

Суммирование оценок в подобластях дает равенство (50). Лемма доказана.

8.3. Доказательство леммы 9

Напомним вид переобусловливателя из сглаживающих итераций (см. (42)):

$$W_k = 4\frac{\varepsilon}{h_k^2}\Phi_\alpha + \Phi_\alpha D_x + A_k^{2E}.$$

Наша цель – доказать следующее утверждение: существует положительная константа c такая, что

$$W_k A_k^{-1} \ge cI.$$

Оно, очевидно, эквивалентно оценке

$$\langle W_k\mathbf{z}, A_k\mathbf{z}\rangle \ge c\|A_k\mathbf{z}\|^2 \quad \forall \mathbf{z} \in X_k. \tag{69}$$

Нам понадобятся оценки

$$\langle A_k\mathbf{z}, \Phi\mathbf{z}\rangle \ge \varepsilon\langle A_y\mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle_\Phi - \frac{9}{4}H\bar{\varepsilon}_k^2\langle A_x\mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle \ge \varepsilon\langle A_y\mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle_\Phi - cH\bar{\varepsilon}_k\|A_k\mathbf{z}\|^2, \tag{70}$$

$$\langle A_k\mathbf{z}, \Phi D_x\mathbf{z}\rangle \ge c_1\|D_x\mathbf{z}\|_\Phi^2 - cH\|A_k\mathbf{z}\|^2 \tag{71}$$

с некоторыми константами c_1, $c > 0$. Неравенство (70) является следствием (24) и (67), (71) следует из (23), а константа H определена в разд. 6 (в данном случае $1 - \xi = 2\alpha k h_k$ – ширина области Ω_k^{2E}). Непосредственными вычислениями проверяется оценка

$$H < \frac{8}{27}h_k^{\frac{\alpha}{2}\ln 2 - 1}.$$

Обозначим через A_k' матрицу проекции оператора A_k на подобласть $\Omega' = \Omega\backslash\Omega_k^{2E}$, как следствие, получим разложение $A_k = A_k' + A_k^{2E}$, $\langle A_k'\mathbf{z}, A_k^{2E}\mathbf{z}\rangle = 0$ $\forall\mathbf{z}$. Выводим оценку

$$\|A_k\mathbf{z}\|^2 = \|A_k'\mathbf{z}\|^2 + \|A_k^{2E}\mathbf{z}\|^2 \le 3\varepsilon^2\|A_y\mathbf{z}\|_{\Omega'}^2 + 3\bar{\varepsilon}_k^2\|A_x\mathbf{z}\|_{\Omega'}^2 + 3\|D_k\mathbf{z}\|_{\Omega'}^2 + \|A_k^{2E}\mathbf{z}\|^2;$$

последнее неравенство следует из (10).

Продолжим оценку, используя неравенства $\|A_x\mathbf{z}\|_{\Omega'} \le ch_k^{-1}\|D_x\mathbf{z}\|_{\Omega'_+}$, $\|D_k\mathbf{z}\|_{\Omega'} \le c\|D_x\mathbf{z}\|_{\Omega'_+}$, где Ω'_+ – расширение Ω' вправо на полосу шириной h_k. Далее воспользуемся оценкой снизу $\Phi_\alpha \ge cI$ в Ω'_+. Получаим

$$\|A_k\mathbf{z}\|^2 \le c\varepsilon^2\|A_y\mathbf{z}\|_{\Phi_\alpha}^2 + c\|D_x\mathbf{z}\|_{\Phi_\alpha}^2 + \|A_k^{2E}\mathbf{z}\|^2.$$

Наконец, используя коммутируемость A_y и Φ_α, и $A_y \le 4h_k^{-2}I$, имеем

$$\|A_k\mathbf{z}\|^2 \le c\left(\frac{\varepsilon}{h_k}\right)^2\langle A_y\mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle_{\Phi_\alpha} + c\|D_x\mathbf{z}\|_{\Phi_\alpha}^2 + \|A_k^{2E}\mathbf{z}\|^2. \tag{72}$$

Теперь применим оценки (70), (71); получаем

$$\langle W_k\mathbf{z}, A_k\mathbf{z}\rangle = \left\langle 4\frac{\varepsilon}{h_k^2}\Phi_\alpha\mathbf{z}, A_k\mathbf{z}\right\rangle + \langle\Phi_\alpha D_x\mathbf{z}, A_k\mathbf{z}\rangle + \|A_k^{2E}\mathbf{z}\|^2 \geq$$

$$\geq 4\left(\frac{\varepsilon}{h_k}\right)^2\langle A_y\mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle_{\Phi_\alpha} + c_1\|D_x\mathbf{z}\|^2_{\Phi_\alpha} - c\left(1 + 9\frac{\varepsilon\bar{\varepsilon}_k}{h_k^2}\right)H\|A_k\mathbf{z}\|^2 + \|A_k^{2E}\mathbf{z}\|^2.$$

Так как H экспоненциально убывает с ростом α, то можно выбрать некоторое положительное целое α, не зависящее от k и ε, такое, что константа

$$c\left(1 + \alpha\frac{9}{4}\frac{\varepsilon\bar{\varepsilon}_k}{h_k^2}\right)H$$

будет достаточно мала, и последняя оценка в сочетании с (72) докажет (69), а следовательно, и лемму.

8.4. Оценки для $u - u_k$

Продолжим вывод глобальных оценок нормы ошибки $u - u_k$. Как и ранее, u и u_k – решения задач (7) и (6) с правой частью $f = f_k$ из $\mathbb{V}_k$.

Известно, что регулярность решения непрерывной задачи ухудшается около границы вытекания Γ_E. Это затрудняет получение удовлетворительных оценок на ошибку вблизи Γ_E. Поэтому мы определим подоблость Ω_k^{int}, отделенную от Γ_E, в которой интересующии нас оценки будут выполняться. Итак, определим Ω_k^{int} и норму по подобласти:

$$\Omega_k^{\text{int}} := \{(x, y) \in \Omega \mid x < 1 - 3kh_k\},$$

$$\|\cdot\|_{\text{int}} := \|\cdot\|_{L_2(\Omega_k^{\text{int}})}.$$

Лемма 12. *Имеют место оценки*

$$\|(u - u_k)_x\|_{\text{int}} \leq c\|f_k\|, \tag{73}$$

$$\|(u - u_k)_y\|_{\text{int}} \leq c\frac{h_k}{\varepsilon}\|f_k\|. \tag{74}$$

Доказательство. Оценка (73) непосредственно следует из (32) и (36) в силу неравенства треугольника. Неравенство (74) следует из оценки

$$\|(u - u_k)_y\|_{\text{int}} \leq \|u_y - \hat{u}_y\|_{\text{int}} + \|(u_k)_y - (\hat{u}_k)_y\|_{\text{int}} + \|(\hat{u}_k)_y - \hat{u}_y\|_{\text{int}},$$

где $\hat{u}$ и $\hat{u}_k$ определены в леммах 1 и 4. Теперь оценка на первое слагаемое в правой части следует из леммы 1, примененной в случае $\varphi = \varphi_\xi$, дает $\xi = 1 - \varepsilon_k|\ln\varepsilon_k|$, оценка на второе слагаемое из леммы 4, примененной в случае $\varphi_i = \varphi_i^\xi$, дает $\xi = 1 - 4h_k|\ln h_k|$. Оценка на третье слагаемое вида

$$\|(\hat{u}_k)_y - \hat{u}_y\| \leq c\frac{h_k}{\varepsilon}\|f_k\|$$

доказана в лемме 4.3 из [22].

Основным результатом этого раздела является

Лемма 13. *Пусть правая часть* (7) *и* (6) *при* $f_k \in \mathbb{V}_k$ *равна нулю в* Ω_k^W. *Тогда справедлива оценка*

$$\|u - u_k\|_{\text{int}} \leq c\frac{h_k^2}{\varepsilon}\|f_k\|. \tag{75}$$

Доказательство. Определим $e_k := u - u_k$. Пусть $w \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ является решением задачи

$$-\varepsilon w_{yy} - \varepsilon_k w_{xx} - w_x = \hat{e}_k \text{ в } \Omega, \quad w = 0 \text{ на } \partial\Omega. \tag{76}$$

Здесь $\hat{e}_k = e_k$ в Ω_k^{int} и $\hat{e}_k = 0$ в $\Omega \backslash \Omega_k^{\text{int}}$.

Заметим, что для этой задачи Γ_E – граница "втекания", а Γ_W – граница "вытекания". Умножив (76) на e_k, интегрируя по частям, получим

$$\|e_k\|_{\text{int}}^2 = \varepsilon((e_k)_y, w_y) + \varepsilon_k((e_k)_x, w_x) + ((e_k)_x, w) = a_k(e_k, w).$$

Из свойства ортогональности по Галеркину следует, что для любой $v_k \in \mathbb{V}_h$

$$\|e_k\|_{\text{int}}^2 = ((e_k)_y, (w - v_k)_y) + \varepsilon_k((e_k)_x, (w - v_k)_x) + ((e_k)_x, w - v_k). \tag{77}$$

Пусть Ω^w – подобласть, определенная в следствии 6; определим также подобласть около границы вытекания $\Omega^e := \{(x, y) \in \Omega \mid x > 1\varepsilon_k |\ln h_k|\}$, а оставшуюся часть области обозначим через $\omega = \Omega \backslash (\Omega^w \cup \Omega^e)$. В качестве v_k возьмем узловой интерполянт к w. Теперь оценим скалярные произведения из (77). При этом интегралы по ω, Ω^w и Ω^e рассмотрим раздельно. Мы продолжаем (77), как

$$\begin{gathered}\|e_k\|_{\text{int}}^2 \le c\varepsilon h_k \|(e_k)_y\|_\omega \|w\|_{H^2(\omega)} + c\varepsilon_k h_k \|(e_k)_x\|_\omega \|w\|_{H^2(\omega)} + \\ + ch_k^2 \|(e_k)_x\|_\omega \|w\|_{H^2(\omega)} + I_W + I_E \le ch_k^2 \|f_k\| \frac{1}{3} \|\hat{e}_k\| + I_W + I_E.\end{gathered} \tag{78}$$

Получая первое неравенство в (78), мы воспользовались аппроксимационными свойствами $\mathbb{V}_k$, а получая второе – оценками (73), (74) и замечанием 1 к оценке (32) для $\mathbb{H}_2$-нормы с $p = 0$.

Слагаемое I_W включает интегралы по Ω^w:

$$I_W = \varepsilon((e_k)_y, (w - v_k)_y)_{\Omega^w} + \varepsilon_k((e_k)_x, (w - v_k)_x)_{\Omega^w} + ((e_k)_x, w - v_k)_{\Omega^w}.$$

Для оценки I_W используем следствие 6 и априорные оценки для решения непрерывной задачи из (14) применительно к решению сопряженной задачи (76):

$$\varepsilon((e_k)_y, (w - v_k)_y)_{\Omega^w} \le c\varepsilon \|(e_k)_y\|_{\Omega^w} \|w_y\| \le ch_k \sqrt{\varepsilon} \|f_k\| \|w_y\| \le ch_k \|f_k\| \|\hat{e}_k\|,$$

$$\varepsilon_k((e_k)_x, (w - v_k)_x)_{\Omega^w} \le c\varepsilon_k \|(e_k)_x\|_{\Omega^w} \|w_x\| \le c\varepsilon_k \sqrt{h_k} \|f_k\| \|w_x\| \le c\varepsilon_k \|f_k\| \|\hat{e}_k\|,$$

$$((e_k)_x, w - v_k)_{\Omega^w} \le ch_k \|(e_k)_x\|_{\Omega^w} \|w_x\| \le ch_k \|f_k\| \|\hat{e}_k\|.$$

Аналогично оценим интегралы, входящие в I_E, но теперь воспользуемся тем, что $\hat{e}_k$ (правая часть уравнения (76)), равна нулю около границы Γ_E (на растоянии $3kh_k > \varepsilon_k$ $(|\ln h_k| + |\ln \varepsilon_k|)$). Для сопряженной задачи (76) Γ_E является границей втекания, и мы пользуемся оценками (28)–(30) с $p = 1/2$ для решения w и правой части $\hat{e}_k$ (см. замечание 1). Таким образом,

$$\varepsilon((e_k)_y, (w - v_k)_y)_{\Omega^e} \le c\varepsilon \|(e_k)_y\| \|w_y\|_{\Omega^e} \le c\sqrt{\varepsilon} \|f_k\| \|w_y\|_{\Omega^e} \le ch_k \|f_k\| \|\hat{e}_k\|,$$

$$\varepsilon_k((e_k)_x, (w - v_k)_x)_{\Omega^e} \le c\varepsilon_k \|(e_k)_x\| \|w_x\|_{\Omega^e} \le c\sqrt{\varepsilon_k} \|f_k\| \|w_x\|_{\Omega^e} \le ch_k \|f_k\| \|\hat{e}_k\|,$$

$$((e_k)_x, w - v_k)_{\Omega^{2E}} \le ch_k \|(e_k)_x\| \|w_x\|_{\Omega^e} \le ch_k \|f_k\| \|\hat{e}_k\|.$$

Подставляя полученные неравенства в (78) и используя $\varepsilon \le \frac{1}{2} h_k$, получаем

$$\|e_k\|_{\text{int}}^2 \le c\frac{h_k^2}{\varepsilon} \|f_k\| \|\hat{e}_k\| + ch_k \|f_k\| \|\hat{e}_k\| = c\frac{h_k^2}{\varepsilon} \|f_k\| \|e_k\|_{\text{int}}.$$

Лемма доказана.

8.5. Доказательство леммы 8

В многосеточном методе для систем, возникающих при аппроксимации конечными элементами, доказательство свойства аппроксимации обычно базируется на оценке для $\mathbb{L}_2$-нормы ошибки $u - u_h$. Подходящая оценка доказана в теореме 13. Однако в нашем случае возникает дополнительная трудность: билинейная форма $a_k(\cdot, \cdot)$ зависит от стабилизирующей добавки, а следовательно, от номера уровня k. Оценки для $u - u_h$ становится недостаточно. Поэтому далее будут доказаны вспомогательные леммы для преодаления этой трудности.

Введем пространство

$$\mathbb{V}_k^0 := \{ v_k \in \mathbb{V}_k \mid v_k(x) = 0 \text{ для всех } x \in \Omega_k^W \}.$$

Пусть $\mathbf{b} \in X_k$ задано. Мы должны доказать оценку

$$\left\| J_k^E W_k (A_k^{-1} - p_k A_{k-1}^{-1} r_k)(I - \Phi_k)\mathbf{b} \right\| \le c\|\mathbf{b}\|$$

с константой c, не зависящей от k, ε и $\mathbf{b}$. Положим

$$f_k := (P_k^*)^{-1}(I - \Phi_k)\mathbf{b}.$$

Заметим, что $f_k \in \mathbb{V}_k^0$. Для заданной f_k определим, соответствующие дискретные и непрерывные решения:

$$\begin{gathered} u_k \in \mathbb{V}_k\colon\; a_k(u_k, v_k) = (f_k, v_k) \quad \forall v_k \in \mathbb{V}_k, \\ u \in \mathbb{V}\colon\; a_k(u, v) = (f_k, v) \quad \forall v \in \mathbb{V}, \\ u_{k-1} \in \mathbb{V}_{k-1}\colon\; a_{k-1}(u_{k-1}, v_{k-1}) = (f_k, v_{k-1}) \quad \forall v_{k-1} \in \mathbb{V}_{k-1}, \\ \tilde{u} \in \mathbb{V}\colon\; a_{k-1}(\tilde{u}, v) = (f_k, v) \quad \forall v \in \mathbb{V}. \end{gathered} \tag{79}$$

Из соотношения (61) следует, что равенство

$$\|v_x\|_{\Omega\setminus\Omega_k^E} = \left\| J_k^E D_x P_k^{-1} v \right\| \tag{80}$$

выполняется для всех $v \in \mathbb{V}_k$. Используем определение

$$W_k = 4\frac{\varepsilon}{h_k^2}\Phi_\alpha + \Phi_\alpha D_x + A_k^{2E}.$$

Напомним, что $\|\Phi_k\| \le 1$. Получим

$$\begin{gathered} \left\| J_k^E W_k (A_k^{-1} - p_k A_{k-1}^{-1} r_k)(I - \Phi_k)\mathbf{b} \right\| \le \\ \le c\frac{\varepsilon}{h_k^2}\left\| J_k^E (A_k^{-1} - p_k A_{k-1}^{-1} r_k)(I - \Phi_k)\mathbf{b} \right\| + \left\| J_k^E D_x p_k A_{k-1}^{-1} r_k (I - \Phi_k)\mathbf{b} \right\|. \end{gathered}$$

Продолжим оценку в силу определений (79) и соотношения (80):

$$\begin{gathered} \left\| J_k^E W_k (A_k^{-1} - p_k A_{k-1}^{-1} r_k)(I - \Phi_k)\mathbf{b} \right\| \le c\left(\frac{\varepsilon}{h_k^2}\|u_k - u_{k-1}\|_{\Omega\setminus\Omega_k^E} + \|(u_k)_x\|_{\Omega\setminus\Omega_k^E} + \|(u_{k-1})_x\|_{\Omega\setminus\Omega_k^E} \right) \le \\ \le c\left(\frac{\varepsilon}{h_k^2}\|u_k - u_{k-1}\|_{\text{int}} + \|(u_k)_x\|_{\text{int}} + \|(u_{k-1})_x\|_{\text{int}} \right) \le \\ \le c\left(\frac{\varepsilon}{h_k^2}(\|u - u_k\|_{\text{int}} + \|\tilde{u} - u_{k-1}\|_{\text{int}} + \|u - \tilde{u}\|_{\text{int}}) + \|(u_k)_x\|_{\text{int}} + \|(u_{k-1})_x\|_{\text{int}} \right). \end{gathered} \tag{81}$$

Выше использовалось вложение $\Omega\setminus\Omega_k^E \subset \Omega_{\text{int}}$. Из следствия 4 получаем

$$\|(u_k)_x\|_{\text{int}} + \|(u_{k-1})_x\|_{\text{int}} \le c\|f_k\|, \tag{82}$$

а лемма 13 влечет

$$\|u_k - u\|_{\text{int}} + \|u_{k-1} - \tilde{u}\|_{\text{int}} \le c\frac{h_k^2}{\varepsilon}\|f_k\|. \tag{83}$$

Наконец, далее мы докажем лемму 15, из которой следует, что

$$\|u - \tilde{u}\| \le ch_k\|f_k\|. \tag{84}$$

Если мы подставим результаты (82), (83) и (84) в (81), то получим

$$\left\|J_k^E W_k(A_k^{-1} - p_k A_{k-1}^{-1} r_k)(I - \Phi_k)\mathbf{b}\right\| \le c\|f_k\| \le c\|\mathbf{b}\|.$$

Таким образом, лемма 8 доказана.

Для доказательства леммы 15 нам понадобится

Лемма 14. *Пусть* $g \in H^1(\Omega)$, $u(x, y)$ *является решением задачи*

$$-\varepsilon u_{yy} - \varepsilon_k u_{xx} + u_x = g_x, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{85}$$

Пусть $\omega := \{(x, y) \in \Omega \mid x < 1 - \varepsilon_k|\ln\varepsilon_k|\}$, *тогда выполнено*

$$\|u\|_{\text{int}} \le c\left(\|g\|_{L_2(\omega)} + \sqrt{h_k}\|g\| + h_k\left(\int\limits_{\Gamma_W}(u_x)^2 dy\right)^{1/2}\right). \tag{86}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $v(x, y) := \int_0^x u(\xi, y)\,d\xi$. Она удовлетворяет соотношению

$$-\varepsilon v_{yy} - \varepsilon_k v_{xx} + v_x = g + \varepsilon_k u_W \tag{87}$$

и краевым условиям $v = 0$ на $\partial\Omega\backslash\Gamma_E$, $v_x = 0$ на Γ_E. Здесь $u_W(x, y) = u_x(0, y)$ и

$$\|\varepsilon_k u_W\| = \varepsilon_k\left(\int\limits_{\Gamma_W}(u_x)^2 dy\right)^{1/2} \le \frac{3}{2}h_k\left(\int\limits_{\Gamma_W}(u_x)^2 dy\right)^{1/2}. \tag{88}$$

Теперь оценка (86) эквивалентна неравенству

$$\|v_x\|_{\text{int}} \le c\left(\|g\|_{L_2(\omega)} + \sqrt{h_k}\|g\| + h_k\left(\int\limits_{\Gamma_W}(u_x)^2 dy\right)^{1/2}\right). \tag{89}$$

Оценка (89), в свою очередь, следует из (32) с $p = 1/2$ (замечание 1) и (88). Лемма доказана.

С помощью этой леммы доказывается

Лемма 15. *Пусть* u *и* $\tilde{u}$ *– непрерывные решения, определенные в* (79). *Выполняется оценка*

$$\|u - \tilde{u}\|_{\text{int}} \le ch_k\|f_k\|. \tag{90}$$

Доказательство. Разность $e := u - \tilde{u}$ удовлетворяет уравнению

$$-\varepsilon e_{yy} - \varepsilon_k e_{xx} + e_x = g_x, \quad e|_{\partial\Omega} = 0, \tag{91}$$

с $g = -\bar{\delta}h_k\tilde{u}_x$. Теперь применяем лемму 14. Получаем

$$\|e\|_{\text{int}} \le c\left(\|g\|_{L_2(\omega)} + \sqrt{h_k}\|g\| + h_k\left(\int\limits_{\Gamma_W}(e_x)^2 dy\right)^{1/2}\right) \le$$

$$\le ch_k\left(\|\tilde{u}_x\|_{L_2(\omega)} + \sqrt{h_k}\|\tilde{u}_x\| + \left(\int\limits_{\Gamma_W}(\tilde{u}_x)^2 dy\right)^{1/2} + \left(\int\limits_{\Gamma_W}(u_x)^2 dy\right)^{1/2}\right) \le c_1 h_k\|f_k\|.$$

Здесь использовались оценки (14), (32) с $p = 0$ и (29) с $p = 1/2$ (напомним, что $\mathrm{supp}(f_k) \subset \Omega\backslash\Omega^W$). Лемма 15 доказана.

8.6. Доказательство леммы 11

Второе из неравенств в (56) очевидно в силу оценок $\|A_k\| \le c h_k^{-1}$ и $\|A_{k-1}^{-1}\| \le c$ (см. (68)). Докажем первое неравенство в (56). Выберем произвольный вектор $\mathbf{g} \in X_{k-1}$, для которого определим $g_{k-1} := (P_{k-1}^*)^{-1} g \in \mathbb{V}_{k-1}$. Пусть $u_{k-1} \in \mathbb{V}_{k-1}$ является решением

$$a_{k-1}(u_{k-1}, v_{k-1}) = (g_{k-1}, v_{k-1}) \quad \forall v_{k-1} \in \mathbb{V}_{k-1}.$$

Тогда выполнено $A_{k-1}^{-1} g = P_{k-1}^{-1} u_{k-1}$. Соответствующее непрерывное решение $u \in \mathbb{V}$ задается равенством

$$a_{k-1}(u, v) = (g_{k-1}, v) \;\; \forall v \in \mathbb{V}.$$

Докажем оценку на $\|J_k^E A_k p_k A_{k-1}^{-1}\|$. Для этого введем пространство $\mathbb{V}_k^e := \{v_k \in \mathbb{V}_k \mid v_k = 0 \text{ в } \Omega^E\}$ и рассмотрим цепочку соотношений

$$\begin{aligned} \|J_k^E A_k p_k A_{k-1}^{-1}\mathbf{g}\| &= \max_{\mathbf{y} \in X_k} \frac{\langle A_k p_k P_{k-1}^{-1} u_{k-1}, J_k^E \mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{y}\|} \le c \max_{v_k \in \mathbb{V}_k^e} \frac{a_k(u_{k-1}, v_k)}{\|v_k\|} \le \\ &\le c \max_{v_k \in \mathbb{V}_k^e} \frac{a_{k-1}(u_{k-1}, v_k)}{\|v_k\|} + c \max_{v_k \in \mathbb{V}_k^e} \frac{a_k(u_{k-1}, v_k) - a_{k-1}(u_{k-1}, v_k)}{\|v_k\|}. \end{aligned} \tag{92}$$

Определим $e_{k-1} := u - u_{k-1}$ и $\Omega' = \Omega\backslash\Omega^E$. Используя результаты леммы 12, для первого члена в (92) получаем: (так как $\mathrm{supp}(v_k) \subset \Omega'$)

$$\begin{aligned} a_{k-1}(u_{k-1}, v_k) &\le |a_{k-1}(e_{k-1}, v_k)| + |a_{k-1}(u, v_k)| \le c h_k \|(e_{k-1})_x\|_{L_2(\Omega')} \|(v_k)_x\| + \varepsilon \|(e_{k-1})_y\|_{L_2(\Omega')} \|(v_k)_y\| + \\ &+ \|(e_{k-1})_x\|_{L_2(\Omega')} \|v_k\| + |(g_{k-1}, v_k)| \le c\left(\|(e_{k-1})_x\|_{L_2(\Omega')} + \frac{\varepsilon}{h_k}\|(e_{k-1})_y\|\,|_{L_2(\Omega')}\right)\|v_k\| + \|g_{k-1}\|\|v_k\| \le \\ &\le c\|g_{k-1}\|\|v_k\| \le c\|\mathbf{g}\|\|v_k\|. \end{aligned} \tag{93}$$

Для второго члена в (92) получаем

$$\begin{aligned} |a_k(u_{k-1}, v_k) - a_{k-1}(u_{k-1}, v_k)| &= \bar{\delta} h_k |((u_{k-1})_x, (v_k)_x)| \le \\ &\le c\|(u_{k-1})_x\|_{L_2(\Omega')}\|v_k\| \le c\|g_{k-1}\|\|v_k\| \le c\|\mathbf{g}\|\|v_k\|. \end{aligned} \tag{94}$$

Оценки из (92), (93) и (94) влекут

$$\|J_k^E A_k p_k A_{k-1}^{-1}\mathbf{g}\| \le c\|\mathbf{g}\|. \tag{95}$$

Таблица 1

Pe_h	h			
	1/8	1/32	1/128	1/512
1	9 (0.09)	12 (0.15)	11 (0.15)	12 (0.15)
10	7 (0.05)	8 (0.07)	8 (0.07)	8 (0.07)
1e + 3	10 (0.12)	11 (0.15)	11 (0.15)	11 (0.15)
1e + 5	10 (0.12)	11 (0.15)	11 (0.15)	11 (0.15)

9. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Приведем результаты нескольких численных экспериментов, цель которых показать, что анализ в данной статье отражает некоторые важные особенности метода и задачи и в некотором смысле точен. В то же время мы увидим, что на практике можно не следовать предположениям об увеличении числа сглаживаний из теоремы 3 о сходимости метода.

В вычислениях использовались следующие значения параметров: $\bar{\delta}$ из (5) равно 1/2. Эксперименты показали, что в сглаживающих итерациях нет необходимости решать систему около границы вытекания “точно”. Поэтому используется немного упрощенный вид сглаживаний: пре- и постсглаживания – такие, как в (40), с $\omega_k = 1$ и $W_k = 4\frac{\varepsilon}{h_k^2}I + D_x$ (ср. с (42)). В качестве правой части брался вектор случайных чисел, и нулевой вектор как начальное приближение. Критерий остановки итераций – относительное уменьшение невязки в 10^9 раз. Таким образом, сходимость оценивалась в норме $\|\cdot\|_{A^{\mathrm{T}}A}$. Ниже используется стандартное обозначение: $\mathrm{Pe}_h := h/(2\varepsilon)$.

В работе доказаны результаты о сходимости W-цикла. Сначала приведем результаты вычислений для стандартного V-цикла многосеточного метода с $\mu_k = \nu_k = 2$. В табл. 1 дано число итераций, необходимое для выполнения критерия остановки, и (в скобках) усредненный показатель сходимости. Эти результаты показывают универсальность многосеточного метода. Количество итераций для W-цикла во всех экспериментах было немногим меньше, чем для V-цикла.

Остановимся коротко на ряде численных экспериментов, приведенных в [22] для задачи с условиями Неймана на Γ_E. Такие же результаты имеют место и в случае условий Дирихле на Γ_E: как и указывает оценка (51) из леммы 7, сглаживающие итерации быстро сходятся около границы втекания Γ_W. Однако глобально, т.е., например, в евклидовой норме, сходимость сглаживающих итераций, как и следовало ожидать, зависит от h. Традиционный анализ сходимости многосеточного метода базируется на оценках для $\|(A_h^{-1} - pA_{2h}^{-1}r)\|$ (свойство аппроксимации) и $\|A_hS_h^{\nu}\|$ (свойство сглаживания). Численные эксперименты показали, что в нашем случае, по-видимому, невозможно получить такие оценки, которые в произведении дадут не зависящую от ν и ε константу. Модифицированное свойство аппроксимации, лежащее в основе нашего анализа, состоит в получении равномерной оценки для $\|W_h(A_h^{-1} - pA_{2h}^{-1}r)\|$, где W_h – переобусловливатель в сглаживающих итерациях. В работе такая оценка была доказана при дополнительных ограничениях: во-первых, вектор правой части должен быть равен нулю около Γ_W, во-вторых, норма должна вычисляться по подобласти, отделенной от Γ_E. Математически это отражено в введении подхо-

Таблица 2

Условия на GE	h			
	1/8	1/32	1/128	1/512
$Pe_h = 1$:				
Неймана	1.16	1.05	1.02	1.01
Дирихле	1.29	2.26	4.54	9.29
$Pe_h = 10$:				
Неймана	1.10	1.02	1.01	1.00
Дирихле	1.47	2.81	5.58	11.17

Таблица 3

Pe_h	h			
	1/8	1/32	1/128	1/512
1	98 (0.81)	131 (0.85)	129 (0.85)	130 (0.85)
10	28 (0.47)	33 (0.53)	33 (0.53)	33 (0.58)

Таблица 4

ν	h			
	1/64	1/128	1/256	1/512
$k-4$	0.55	0.51	0.51	0.52
2	0.55	0.78	1.13	1.61

дящей функции (матрицы) срезки Φ_h и проектора J_h^E в модифицированное свойство аппроксимации:

$$\left\|J_h^E W_h(A_h^{-1} - pA_{2h}^{-1}r)(I - \Phi_h)\right\| \le c_a.$$

Численные эксперименты показывают, что оба предположения необходимы. Причем первое из них – для задачи как Дирихле, так и Неймана, иначе эксперименты (см. [22]) показывают зависимость $c_a = O(h^{-1/2})$. Второе предположение необходимо только для задачи Дирихле. Оно необходимо еще и для равномерной оценки нормы матрицы $A_h pA_{2h}^{-1} r$. Его отсутствие приводит к зависимости от h. Так, в табл. 2 пограничного слоя около границы вытекания приведено значение

$$\left\|A_h pA_{2h}^{-1} r\mathbf{f}\right\| / \|\mathbf{f}\|,$$

где $\mathbf{f}$ – вектор со значениями 1 во всех внутренних узлах.

Остановимся на роли постсглаживаний. Помимо глобального сглаживающего свойства (следствие 10), в нашем анализе им отведена еще одна роль: быстро подавлять ошибку около границы вытекания Γ_E (следствие 7), что позволяло нам ввести в анализ проектор J_h^E. Табл. 3 иллюстрирует этот феномен. В данном эксперименте правая часть системы отлична от нуля только в четырех столбцах узлов около Γ_E, а в качестве итераций используются только сглаживания на самой мелкой сетке. Критерий остановки такой же, как и ранее. Легко видеть, что равномерная оценка (по h и ε) имеет место.

Обсудим предположение из теоремы 3 на число пред- и постсглаживаний. Оно имеет вид $\mu = O(k^4)$ и $\nu = O(k)$. Зависимость $\nu = O(k)$, по-видимому, необходима для получения однородной оценки на норму матрицы итераций. Действительно, в табл. 4 приведен показатель сходимости метода на первой итерации при $\mu = 0$. При фиксированном ν наблюдается рост порядка $O(h^{-1/2})$, в то время как $\nu = O(k)$ обеспечивает однородную оценку. Напомним, что использовались упрощенные сглаживания, введение в W_k блока A_k^{2E}, т.е. решение задачи около границы вытекания, возможно, уберет данную зависимость. Зависимость μ от k, по-видимому, вызвана несовершенством техники доказательства. В проведенных нами экспериментах необходимость в увеличении количества предсглаживаний не была замечена. Наконец, результаты из табл. 1 показывают, что на практике и μ, и ν можно выбирать малыми и не зависящими от номера сеточного уровня, поскольку рост ошибки на первой итерации происходит локально около границы вытекания, на последующих итерациях ошибка равномерно уменьшается во всей области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Федоренко Р.П.* О скорости сходимости одного итерационного процесса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1964. Т. 4. № 3. С. 559–564.
2. *Бахвалов Н.С.* О сходимости одного релаксационного метода при естественных ограничениях на эллиптический оператор // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1966. Т. 6. № 5. С. 861–883.
3. *Brandt A.* Multi-level adaptive solutions to boundary value problems // Math. Comput. 1977. V. 31. P. 333–390.
4. *Ольшанский М.А.* Лекции и упражнения по многосеточным методам. М: ЦПИ механ.-матем. ф-т МГУ, 2003.
5. *Шайдуров В.В.* Многосеточные методы конечных элементов. М: Наука, 1989.
6. *Bramble J.H.* Multigrid methods. Harlow: Longman, 1993.
7. *Hackbusch W.* Multi-Grid Methods and Applications. Berlin: Springer, 1985.
8. *Bey J., Wittum G.* Downwind numbering: robust multigrid for convection-diffusion problems // Appl. Numer. Math. 1997. V. 23. P. 177–192.

9. *Hackbusch W., Probst T.* Downwind Gauss-Seidel smoothing for convection dominated problems // Numer. Linear Algebra Appl. 1997. V. 4. P. 85–102.

10. *Johannsen K.* Robust smoothers for convection-diffusion problems. Preprint IWR, University of Heidelberg, 1999.

11. *Mulder W.* A new multigrid approach to convection problems // J. Comput. Phys. 1989. V. 83. P. 303–323.

12. *Naik N.H., van Rosedale J.* The improved robustness of multigrid elliptic solvers based on multiple semicoarsened grids // SIAM Numer. Analys. 1993. V. 30. P. 215–229.

13. *Reusken A.* Multigrid with matrix-dependent transfer operators for convection-diffusion problems // Multigrid Methods 4, Proc. of the fourth multigrid Conf. / Int. Ser. Numer. Math. 1994. V. 116. P. 269–280.

14. *Zeeuw P.M.* de Matrix-dependent prolongations and restrictions in a blackbox multigrid solver // J. Comput. Appl. Math. 1990. V. 33. P. 1–27.

15. *Bramble J.H., Pasciak J.E., Xu J.* The analysis of multigrid algorithms for nonsymmetric and indefinite problems // Math. Comp. 1988. V. 51. P. 389–414.

16. *Mandel J.* Multigrid convergence for nonsymmetric, indefinite variational problems and one smoothing step // Appl. Math. Comput. 1986. V. 19. P. 201–216

17. *Wang J.* Convergence analysis of multigrid algorithms for nonselfadjoint and indefinite elliptic problems // SIAM J. Numer. Analys. 1993. V. 30. P. 275–285

18. *Persson I., Samuelsson K., Szepessy A.* On the convergence of multigrid methods for flow problems // Electron. Trans. Numer. Analys. 1999. V. 8. P. 46–87.

19. *Reusken A.* Fourier analysis of a robust multigrid method for convection-diffusion equations // Numer. Math. 1995. V. 71. P. 365–397.

20. *Bank R.E., Benbourenane M.* The hierarchical basis multigrid method for convection-diffusion equations // Numer. Math. 1992. V. 61. P. 7–37

21. *Reusken A.* Convergence analysis of a multigrid method for convection-diffusion equations // Numer. Math. 2002. V. 91. P. 323–349.

22. *Olshanskii M.A., Reusken A.* Convergence analyis of a multigrid method for a convection-dominated (1) problem // SIAM J. Num. Anal. 2004.

23. *Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L.* Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations. Berlin: Springer, 1996.

24. *Zhou G.* How accurate is the streamline diffusion finite element method // Math. Comput. 1997. V. 66. P. 31–44.

25. *Ramage A.* A multigrid preconditioner for stabilised discretization of advection-diffusion problem // J.Comput. Appl. Math. 1999. V. 110. P. 187–223.

26. *Johnson C., Schatz A.H., Wahlbin L.B.* Crosswind smear and pointwise errors in streanline diffusion finite element methods // Math. Comput. 1987. V. 49. P. 25–38.

27. *Eriksson K., Johnson C.* Adaptive streamline diffusion finite element methods for stationary convection-diffusion problems // Math. Comput. 1993. V. 60. P. 167–188.

28. *Grisvard P.* Elliptic problems in nonsmooth domains. Boston: Pitman, 1985.

29. *Wahlbin L.B.* Local behavior in finite element methods // Handbook of Numerical Analysis, Vol. II Finite element methods Amsterdam: North-Holland. 1991. P. 353–522

30. *Niijima K.* Poinwise error estimates for a streamline diffusion finite element scheme // Numer. Math. 1990. V. 56. P. 707–719.

31. *Stevenson R.P.* New estimates of the contraction number of V-cycle multi-grid with applications to anisotropic equations // Incomplete Decompositions / Proc. eight GAMM Seminar. Notes on Numerical Fluid Mech., 1993. V. 41. P. 159–167.

32. *Stevenson R.P.* Robustness of multi-grid applied to anisotropic equations on convex domains and on domains with re-entrant corners // Numer. Math. 1993. V. 66. P. 373–398.

33. *Wittum G.* On the robustness of ILU smoothing // SIAM J. Sci. Statist. Comput. 1989. V. 10. P. 699–717.

34. *Olshanskii M.A.* Reusken A. On the convergence of a multigrid method for linear reaction-diffusion problem // Computing. 2000. V. 65. P. 193–202.

35. *Olshanskii M.A.* Reusken A. Navier-Stokes equations in rotation form: A robust multigrid solver for the velocity problem // SIAM J. Sci. Comput. 2002. V. 23. P. 1683–1706.

36. *Hackbusch W.* Iterative solution of large sparse systems of equations. NewYork: Springer, 1994.