Московский Государственный Университет
им. М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет

УДК 519.63

На правах рукописи

ОЛЬШАНСКИЙ МАКСИМ АЛЕКСАНДРОВИЧ

РАВНОМЕРНЫЕ ПО ПАРАМЕТРУ МНОГОСЕТОЧНЫЕ И ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

01.01.07 — вычислительная математика

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико – математических наук

Москва — 2006

Оглавление

Введение

Настоящая работа посвящена анализу численных методов для уравнений в частных производных. Главной темой является анализ методов решения систем алгебраических уравнений, возникающих из дискретизаций дифференциальных уравнений. Обрисуем коротко, что имеется в виду, и сделаем необходимые оговорки. Метод конечных элементов будет использоваться для приближения и замены в расчетах дифференциальной задачи на дискретную, и многосеточный метод для быстрого решения дискретной задачи. Многосеточный метод можно использовать как самостоятельный итерационный алгоритм, но часто его можно эффективнее использовать как одну из компонент в более общем итерационном методе. Обычно он служит для построения, так называемого, переобуславливателя. Построение таких переобуславливателей – ещё одна тема работы.

Безусловно, не любое уравнение в частных производных можно на сегодняшний день эффективно численно решить, комбинируя метод конечных элементов и многосеточный метод. Однако, очень многие уравнения, имеющие физический подтекст, можно. В диссертации идет речь о применении многосеточного метода (вместе с переобусловленными итерационными методами) к решению ряда задач, возникающих на практике.

Важным аспектом, на котором делается упор во всей работе, является обеспечение и *доказательство* свойства *универсальности*[1], рассматриваемых итерационных методов. Универсальный итерационный метод - это метод, обеспечивающий приемлемую сходимость при всех допустимых значениях физических и численных параметров, входящих в систему уравнений. С точки зрения анализа доказательство универсальности состоит в нахождении нетривиальных оценок на показатель сходимости

[1]В англоязычной литературе для обозначения этого свойства используется термин "robust" и его производные.

метода. Эти оценки должны не зависеть от ряда физических и численных параметров.

Перед тем, как более подробно описать содержание работы, остановимся кратко на истории многосеточных и итерационных методов.

Историю многосеточных методов принято исчислять с работ российских математиков Федоренко [20] (1964) и Бахвалова [1] (1966). Однако в те годы их работы не привлекли широкого внимания. Позже многосеточный метод был "открыт" заново в работах Брандта [57] (1973) и Хакбуша [92] (1976), но, только начиная с другой статьи Брандта [58] (1977), метод получил признание, и количество публикаций стало стремительно расти. Современная теория метода была заложена в начале 80-х годов, и заметным событием можно назвать выход монографии Хакбуша [93] (1985) со строгим изложением абстрактной теории многосеточных методов и описанием многих приложений. Теория и практика применения метода продолжает развиваться и пополняться. В то время как многосеточные методы стали обязательной составляющей в большинстве прикладных пакетов, и им посвящена огромная библиография, насчитывающая, в том числе, около десятка книг, в русскоязычной литературе им уделено относительно мало внимания. Из книг можно назвать только монографию Шайдурова [24] и недавно опубликованную монографию [168]. Итерационные методы, вообще, имеют более чем вековую историю, - названия многих из них, например, Ньютона, Якоби, говорят за себя. К примеру, самому известному вариационному методу, сопряженных градиентов, в 2002 году исполнилось 50 лет (см. [106]).

Повторим, что целью работы является изучение таких итерационных методов, сходимость которых остается достаточно высокой при любых допустимых значениях физических и численных параметров, входящих в систему уравнений. Физические параметры, как правило, определяются характером физического процесса моделируемого дифференциальной системой, а численные – методом дискретизации. Универсальные итерационные, в том числе многосеточные, методы являются полем активных исследований последние два десятилетия. Далее в введении, когда мы перейдем к детальному изложению основных результатов, встретится много ссылок на соответствующие работы.

Схематично, структура диссертации следующая. Итерационные методы исследуются в применении к решению ряда задач, возникающих в вычислительной гидродинамике (некоторые из задач возникают и во многих других приложениях). Вот эти задачи, расположенные в порядке возрастания сложности их анализа (по субъективному мнению автора): уравнения реакции-диффузии (1), задача Стокса с интерфейсом (10), обобщённая система Стокса (8), система уравнений с кососимметричной реакцией (7), уравнения конвекции-диффузии (3), системы типа Осеена (11) и (12), система Навье-Стокса (4). Первые три задачи из списка являются сингулярно-возмущенными при стремлении одного или нескольких параметров к критическим значениям. Универсальность итерационных методов для них рассматривается относительно изменения данных параметров, и теория здесь принимает законченный вид, охватывая все множество допустимых значений параметров. Следующие три задачи являются несимметричными. Наиболее сложным для анализа является случай, когда косо-симметричные члены играют существенную роль и, возможно, доминируют. Более того, характер этих задач определяется, кроме набора скалярных параметров, некоторыми функциями (например, векторное поле скоростей жидкости в задаче Осеена). Неизбежно, универсальные итерационные методы удается обосновать только при предположениях о принадлежности данных функций к некоторым классам. Наконец, система Навье-Стокса является нелинейной. Изучение итерационных методов для нее не входит в задачи данной диссертации. Материал по расчету течений Навье-Стокса служит иллюстрацией использования и работы различных, анализированных ранее, методов.

Общее построение материала в диссертации следующее: в первой главе проводится анализ дифференциальных задач, во второй главе исследуется сходимость метода конечных элементов, после этого, в третьей главе доказываются результаты о сходимости итерационных методов для возникающих систем алгебраических уравнений. Причина такого построения состоит в том, что анализ дифференциальных задач и метода конечных элементов, имея самостоятельное значение, необходим для доказательства сходимости итерационных методов. Например, доказательство сходимости многосеточных методов основано на свойствах аппроксимации и сглаживания (см. стр. 13). Эти алгебраические свойства требуют различной техники доказательства. Свойство сглаживания доказывается с помощью средств линейной алгебры, а свойство аппроксимации следует из утверждений о сходимости метода конечных элементов. Доказательство этих утверждений, в свою очередь, существенно базируется на априорных оценках для решений дифференциальных задач, в том числе на оценках вторых производных решений. В общем случае подобные оценки давно известны. Однако, имея целью доказательство универсальной сходимости итерационных методов, нам требуется получить в явном виде зависимость “констант” из априорных оценок от физических параметров, входящих в постановку дифференциальной задачи. Более того, в оценках сходимости метода конечных элементов так же требуется получить зависимость констант от этих параметров, причем в большинстве случаев – оптимальную.

Перейдем к более детальному описанию постановок задач и результатов (известных ранее и полученных автором) по каждой из перечисленных проблем.

Уравнения реакции-диффузии.

Рассматриваемая нами линейная задача реакции-диффузии имеет следующий вид. При заданном $0 < \varepsilon \leq 1$ и функциях f и d таких, что $0 < d_0 \leq d(\mathbf{x}) \leq d_1$ в Ω, найти функцию u, удовлетворяющую системе:

$$\begin{aligned} -\varepsilon\Delta\, u + d(\mathbf{x})\, u = f \quad &\text{в} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad &\text{на} \quad \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть Ω – выпуклый многоугольник или многогранник в R^N, $N = 2, 3$. В качестве дискретизации задачи используется стандартный метод конечных элементов на семействе вложенных квазирегулярных триангуляций области. Конечные элементы предполагаются конформными. Параметр сетки обозначается через h. В общем случае (при гладкой f) решение (1) имеет экспоненциальный погранслой, и методы дискретизации, основанные на полиномиальных конечных элементах на квазиравномерной сетке приводят к большим ошибкам дискретизации внутри погранслоя. Однако, в [154, 155] показано, что этот метод дискретизации, тем не менее, устойчив при $\varepsilon \downarrow 0$. Распространение ошибки в такой задачи не сильно, т.е. вне погранслоя оценки на сходимость метода конечных элементов являются равномерными по ε и оптимального порядка. Следовательно, численное решение (1) с использованием метода конечных элементов на таких сетках может иметь смысл на практике. Об аппроксимации уравнений реакции-диффузии на локально измельчаемых сетках можно прочесть, например, в [25, 26].

Отметим, что данное уравнение не вызывает существенно бо́льших трудностей с точки зрения итерационных методов, чем уравнение Пуассона. В плане теоретического анализа итерационных методов его решения многое известно из литературы. Так в [143] замечается, что BPXпереобуславливатель [55] и метод иерархических базисов из [35] не являются универсальными для конечно-элементной дискретизации задачи (1). В [143] был предложен специальный переобуславливатель, основанный на методе иерархических базисов, универсальность которого для двухмерной задачи (1), аппроксимированной кусочно-линейными конечными элементами на равномерной сетке, была доказана. В [89] был предложен многоуровневый метод, основанный на разложении на подпространства, который является универсальным для (1). Метод из [89], однако, пригоден только для прямоугольных областей и сеток простейшей структуры. В работе [53] построен аддитивный многоуровневый переобуславливатель, который обеспечивает универсальную оценку спектрального числа обусловленности. Универсальность алгебраических многосеточных методов для конечно-элементных аппроксимаций системы (1) также известна, см. [96]. Классический (геометрический) многосеточный метод успешно используется для задачи реакции-диффузии, тем не менее, из литературы не было известно доказательство его универсальности. В работах, основанных на разложениях на подпространства (см. [161, 162]), мы не нашли теоретических результатов об универсальной сходимости классического многосеточного метода для (1). Доказательство, основанное на свойствах сглаживания и аппроксимации, также отсутствовало. Поэтому автор счел уместным начать изложение результатов по универсальной сходимости многосеточных методов с доказательства для уравнения реакции-диффузии. Доказательство основано на свойствах сглаживания и аппроксимации, в которых особое внимание уделяется зависимости констант от параметра ε. В частности, показано, что ухудшение свойства аппроксимации при $\varepsilon \downarrow 0$ компенсируется улучшением свойства сглаживания. Этот результат опубликован (в соавторстве с А.Реускеном) в [178].

Основным результатом для уравнений реакции-диффузии является доказательство того, что многосеточный метод (как V-цикл, так и W-цикл) с каноническими операторами перехода с сетки на сетку, сглаживаниями Якоби с параметром или симметричным методом Гаусса-Зейделя является универсальным, т.е. его показатель сходимости ограничен сверху некоторой константой меньше единицы, и не зависящей от h и ε (Теорема 3.4). Вспомогательными результатами являются априорные оценки из леммы 1.1, оценки сходимости метода конечных элементов из леммы 2.1, свойство аппроксимации из теоремы 3.2 и сглаживания из теоремы 3.3.

Уравнения конвекции-диффузии.

Для уравнений конвекции-диффузии анализ сходимости многосеточных методов находится в начальной стадии. В диссертации представлен анализ сходимости многосеточного метода для некоторого специального класса двухмерных уравнений конвекции диффузии.

На сегодняшний день интересный для анализа класс уравнений конвекции-диффузии может быть определен как

$$\begin{aligned} -\varepsilon\Delta u + b\cdot\nabla u &= f \quad \text{в } \Omega=(0,1)^2 \\ u &= g \quad \text{на } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ и $b = (\cos\psi, \sin\psi)$, $\psi \in [0, 2\pi)$. Дискретизация уравнений, например, методом конечных разностей или методом конечных элементов, приводит к системе линейных алгебраических уравнений, матрица которой разрежена (большинство элементов равны нулю) и может иметь большую размерность. Для решения такой системы естественно применение итерационного метода. Заметим, что дискретная задача зависит от трех параметров: h (шаг сетки), ε (отношение диффузии и конвекции) и ψ (направление потока). Для ее решения желательно построение метода эффективного для всех встречающихся значений параметров. Из практики известно, что для достижения универсальности в случае задачи (2) компоненты многосеточного метода должны выбираться специальным образом, так как "стандартный" метод не дает удовлетворительных результатов для уравнений с доминирующей конвекцией, когда отношение h/ε велико. Для улучшения универсальности методов несколько модификаций предлагается в литературе – это "универсальные" сглаживания, операторы перехода с одного сеточного уровня на другой, зависящие от матрицы системы, и техника неравномерного огрубления сетки (semicoarsening). Детали данных подходов можно прочесть в [93, 43, 98, 116, 118, 132, 164]. Однако, эти модификации основаны на эвристических доводах и эмпирических исследованиях, строгий анализ сходимости, доказывающий универсальность этих методов, до сих пор отсутствует.

Относительно теоретического анализа сходимости многосеточного метода применительно к уравнениям конвекции-диффузии отметим следующие исследования. Анализ сходимости для несимметричных систем, основанный на теории возмущения симметричной задачи (см. [56, 113, 156]), дает для (2) оценки, зависящие от ε. Такой подход неудовлетворителен при $\varepsilon \ll 1$. В работах [124] и [133] рассмотрены уравнения конвекции-диффузии аналогичные (2), но с *периодическими* краевыми условиями. Анализ двухсеточного и многосеточного метода в этом случае основан на разложении в ряды Фурье. Так в [124] для случая $\psi = 0$ получены оценки сходимости V-цикла, не зависящие от ε и h при условии $\varepsilon \approx ch$. В [133] получены оценки сходимости двухсеточного метода, не зависящие от ε, h, ψ, в случае дискретизации уравнения методом конечных разностей с использованием разностей против потока 1-ого порядка (и периодическими краевыми условиями). В [37] изучается применение многосеточного метода иерархических базисов к (2). В той работе в явном виде получена зависимость показателя сходимости от ε и ψ, но оценки не равномерны по h. Многосеточный метод, основанный на неравномерном огрублении сетки, операторах перехода, зависящих от матрицы жесткости, и сглаживаниях блочного типа, изучался в [134] применительно к конечно-разностной дискретизации (2) 1-ого порядка. С помощью средств линейной алгебры для него получена универсальная оценка на сходимость W-цикла. Вообще говоря, анализ сходимости многосеточных методов для уравнений конвекции-диффузии считается *весьма трудной* задачей.

В настоящей работе рассматривается задача конвекции-диффузии

$$
\begin{aligned}
-\varepsilon\Delta u + u_x = f \quad &\text{в} \quad \Omega := (0,1)^2, \\
u = 0 \quad &\text{на} \quad \partial\Omega.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Также рассматривается задача с условиями Неймана на границе вытекания, т.е., $u_x(1,y) = 0, y \in (0,1)$. Автор считает, что задача с условиями Дирихле на границе вытекания сложнее для анализа, чем с условиями Неймана. Так условия Неймана исключают образование экспоненциального пограничного слоя в решении и, как следствие, ослабляют зависимость констант в априорных оценках от ε. Например, в случае условий Неймана на границе вытекания справедливо

$$\|u\|_{H^2} \le c\,\varepsilon^{-1}\|f\|_{L_2},$$

а в случае условий Дирихле лишь

$$\|u\|_{H^2} \le c\,\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\|f\|_{L_2}.$$

Подобные априорные оценки играют важную роль в анализе многосеточного метода. Отметим, что анализ Фурье не применим для рассматриваемых задач.

В то время как условия Неймана на границе вытекания часто встречаются в приложениях, например, при наличии искусственной границы в задачах вычислительной гидродинамики, экспоненциальные пограничные или внутренние слои также не редкость в приложениях, например, в задаче фильтрации. Поэтому анализ многосеточного метода в обоих случаях имеет прикладное значение.

Для дискретизации (3) используем метод конечных элементов. Помимо работ [170, 171], в которых опубликован излагаемый здесь материал, автору из литературы не известны теоретические результаты о сходимости многосеточного метода, применимые к конечно-элементным аппроксимациям в случае доминирующей конвекции.

Как хорошо известно, стандартный метод конечных элементов не подходит для расчетов в случае доминирования конвективных членов и (квази)равномерных сеток. Мы используем SUPG (Streamline Upwinding Petrov-Galerkin) метод, который обеспечивает более высокий порядок сходимости (см. [135],[165]), чем метод конечных разностей против потока 1-ого порядка. В диссертации рассматривается только случай равномерной триангуляции такой, что узлы разбиения расположены вдоль линий тока. Обобщение результатов на случай произвольной сетки остается открытым вопросом. Об устойчивых дискретизациях, получаемых локальным измельчением сетки можно прочесть, например, в [142, 9].

Ниже мы кратко обсуждаем различные компоненты предлагаемого многосеточного метода.

В качестве *продолжения и проектора* (p_k и r_k) используются канонические операторы, определяемые иерархией сеток и вложением конечно-элементных пространств. Так в качестве продолжения используется линейная интерполяция, а в качестве проектора – сопряженный оператор к оператору продолжения.

Иерархия операторов на различных сеточных уровнях строится путем применения SUPG дискретизации на соответствующем уровне. Так как билинейная форма дискретной задачи зависит от стабилизирующего члена, который в свою очередь зависит от параметра дискретизации h_k, то типичное соотношение $A_{k-1} = r_k A_k p_k$, связывающее операторы на k-м и $k-1$-м уровнях, не выполняется. Это согласуется, в частности, с результатами численных экспериментов из [128], которые указывают, что при использовании канонических продолжения и проекции предпочтение при построении матрицы на грубой сетке следует отдать методу SUPG дискретизации на грубой сетке перед методом Галёркина: $A_{k-1} = r_k A_k p_k$.

Относительно *сглаживаний* заметим, что сеточный шаблон, возникающий в методе конечных элементов, не позволяет строить универсальные сглаживающие итерации (т.е., такие, которые точно решают задачу в предельном случае $\varepsilon = 0$, см. [168],[93]) с помощью блочных методов Якоби и Гаусса–Зейделя. Это объяснено подробнее в замечании 3.1 на стр. 195. Мы используем сглаживающие итерации блочного типа, которые *не являются* универсальными в данном смысле. Их суть заключается в построении блочного переобуславливателя, состоящего из двухдиагональных блоков при нумерации узлов сетки вдоль потока и полной матрицы жесткости около границы вытекания. Сглаживающие итерации допускают физическую интерпретацию: неизвестные в процессе релаксации обновляются начиная с границы втекания и далее вдоль линий тока, а около границы вытекания, где поведение решение нерегулярно (имеет место экспоненциальный погранслой), система решается точно.

Все эти компоненты обычным образом объединены друг с другом и составляют в результате W-цикл многосеточного метода.

Анализ сходимости многосеточного метода для уравнений конвекции-диффузии является, по-видимому, наиболее технически сложной частью диссертации, поэтому далее во введении кратко остановимся на его основных моментах. Через A_k обозначим матрицу жесткости задачи на k-м сеточном уровне. $S_k = I - W_k^{-1} A_k$ – матрица сглаживающих итераций. Матрица итераций двухсеточного метода с μ предсглаживаниями и ν постсглаживаниями задается, как $T_k = S_k^{\nu}(I - p_k A_{k-1}^{-1} r_k A_k) S_k^{\mu}$.

Один из стандартных подходов к анализу многосеточного метода состоит в доказательстве оценки на норму матрицы T_k, откуда оценка на норму матрицы итераций многосеточного метода следует. Доказательство оценки для $\|T_k\|$ традиционно базируется на *свойстве сглаживания* и *свойстве аппроксимации*, т.е., на проверке неравенств вида:

$$\begin{aligned} \|A_k S_k^{\nu}\| &\leq C_s(h_k, \varepsilon)\, \eta(\nu), \quad \text{где } \eta(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty, \\ \|A_k^{-1} - p_k A_{k-1}^{-1} r_k\| &\leq C_a(h_k, \varepsilon). \end{aligned}$$

При этом, для доказательства универсальности метода *произведение множителей $C_s(h_k, \varepsilon)$ и $C_a(h_k, \varepsilon)$ должно оцениваться некоторой абсолютной константой, не зависящей от h_k и ε.* Тогда для достаточно большого ν желаемая оценка для $\|T_k\|$ следует из неравенства Коши ($\mu = 0$). Однако, для задачи, рассматриваемой в работе, и это подтверждается простыми численными экспериментами, данный подход, по-видимому, не возможно применить. Вместо этого мы рассматриваем другое разбиение для оценки $\|T_k\|$. Новое разбиение приводит к *модифицированным* свойствам сглаживания и аппроксимации, – ключевым моментом будет проверка оценок вида:

$$\begin{aligned} \|A_k S_k^\nu W_k^{-1}\| &\leq c\,\nu^{-\frac{1}{2}}, \\ \|J_k^E W_k (A_k^{-1} - p_k A_{k-1}^{-1} r_k) J_k^W\| &\leq c. \end{aligned}$$

Здесь и далее c – положительные константы, не зависящие от h_k и ε. Таким образом, в модифицированном свойстве аппроксимации участвует переобуславлиаватель W_k из сглаживающих итераций. J_k^E и J_k^W – сеточные операторы проекции для небольших подобластей Ω^W и Ω^E, прилегающих к границе втекания и вытекания, т.е. J_k^W – диагональная матрица: $(J_k^W)_{ii} = 0$, если узел сетки с индексом i лежит в подобласти Ω^W, $(J_k^W)_{ii} = 1$ иначе. Аналогично определяется J_k^E для подобласти Ω^E (в случае условий Неймана на Γ_E в проекторе J_k^E нет необходимости).

Введение операторов проекции J_k^W и J_k^E обусловлено следующим. Проверка свойства аппроксимации тесно связано с получением оценок на $\mathbb{L}_2$-норму ошибки в методе конечных элементов. Традиционно получение таких оценок основано на вариационных свойствах метода и на рассмотрении сопряженной задачи. Для задачи (3) регулярность решения “портится” у границы вытекания (для условий Дирихле):

$$\Gamma_E := \{\,(x,y) \in \partial\Omega \mid x = 1\,\},$$

а у сопряженной задачи у противоположной части границы:

$$\Gamma_W := \{\,(x,y) \in \partial\Omega \mid x = 0\,\}.$$

Оба эффекта затрудняют получение необходимых оценок. Чтобы преодолеть эту трудность, в свойство аппроксимации введены проекторы J_k^E и J_k^W, а для специальных сглаживающих итераций, используемых нами, доказаны свойства, которые позволяют использовать эти проекторы при анализе (для удобства построения доказательств вместо проектора J_k^W будет использоваться функция срезки). В частности, показано, что около границы втекания сглаживающие итерации должны не сглаживать, а быстро уменьшать ошибку. Это необходимое свойство не встречалось ранее в литературе.

Один из сомножителей при получении оценки для $\|T_k\|$ получается равным $(1 - c/k^4)^\mu$. Чтобы компенсировать зависимость от k, число предсглаживаний и постсглаживаний выбирается зависящим от сеточного уровня: $\mu = \mu_k \sim k$. В результате получаем оценку нормы матрицы итераций двухсеточного метода $\|T_k\| \le c < 1$ и арифметическую сложность одной итерации $\mathcal{O}(N_k \ln^4 N_k)$, где $N_k = h_k^{-2}$. Данная трудоемкость является квазиоптимальной. Однако в численных экспериментах мы не видим необходимости в увеличении числа сглаживаний с увеличением k. В разделе 3.3.5 обсуждается, что зависимость μ от k является, видимо, артефактом доказательства.

Отметим, что в задачи диссертации не входит численное сравнение различных многосеточных методов решения уравнений конвекции диффузии. Результаты численных расчётов можно найти во многих источниках, например, [43], [95], [116], [164], в том числе и для SUPG аппроксимации по методу конечных элементов [128]. Численные эксперименты, приведенные в данной работе (раздел 3.3.5), служат для иллюстрации излагаемой теории.

ГЛАВНЫМ РЕЗУЛЬТАТОМ для уравнений конвекции-диффузии является доказательство универсальной сходимости W-цикла (т.е. показатель сходимости ограничен сверху некоторой константой меньше единицы и не зависящей от h и ε) для конечно-элементной аппроксимации задачи (теорема 3.8). При этом используется обычное измельчение сетки и специальные блочные сглаживающие итерации. Для стабилизации дискретизации в случае доминирующей конвекции используется SUPG метод. Теория требует логарифмического роста числа сглаживаний при измельчении сетки, однако на практике необходимость такого увеличения не отмечена. Основными вспомогательными результатами являются априорные оценки из теорем 1.1 и 1.2, оценки сходимости метода конечных элементов из лемм 2.5 и 2.6 и априорные оценки для дискретного решения из § 2.2.3, модифицированные свойства аппроксимации в теореме 3.6 и свойства сглаживания в лемме 3.12, оценка на норму матрицы итерации двух-сеточного метода из теоремы 3.7

Система уравнений с кососимметричной реакцией.

Объясним наш интерес к системе уравнений с кососимметричной реакцией. Заметим, что уравнения Навье-Стокса несжимаемой жидкости в переменных скорость-давление могут быть записаны в нескольких эквивалентных формах. Популярной является *конвективная* форма записи: найти вектор-функцию скорости $\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$ и кинематическое давление $p(t,\mathbf{x})$, удовлетворяющие системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T], \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T], \end{aligned} \tag{4}$$

при заданных массовых силах $\mathbf{f}$ и кинематической вязкости $\nu > 0$. К (4) необходимо добавить подходящие начальные и граничные условия. Одной из альтернатив (4) является *вихревая* форма записи уравнений Навье-Стокса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u} + (\operatorname{curl}\mathbf{u})\times\mathbf{u} + \nabla P &= \mathbf{f} \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T], \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T], \end{aligned} \tag{5}$$

которая получается из (4) в результате замены кинематического давления давлением Бернулли (см., например, [19]): $P = p + \frac{1}{2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$ и использования тождества $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = (\operatorname{curl}\mathbf{u})\times\mathbf{u} + \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})$ (см. обозначения в разделе на стр. 30). Отметим, что вихревая форма записи нелинейных членов оказывается важной для создания схем, удовлетворяющих одновременно законам сохранения энергии и завихренности [129] – фундаментальным инвариантам в теории несжимаемых течений, в том числе турбулентных, см. [115]. Линеаризация и применение неявных схем по времени для (5) приводит к системе типа Осеена:

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{w}\times\mathbf{u} + \alpha\mathbf{u} + \nabla P &= \mathbf{f} \quad \text{в} \quad \Omega \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\alpha \geq 0$ и $\mathbf{w} = \operatorname{curl}\mathbf{a}$, $\mathbf{a}$ – известное приближение к $\mathbf{u}$. Заметим, что такая линеаризация $(\operatorname{curl}\mathbf{u})\times\mathbf{u}$ обеспечивает эллиптичность части системы, зависящей от скорости в первом соотношении из (6). Для линеаризованной системы остаются справедливыми законы сохранения.

Одним из способов решения (6) являются итерационные алгоритмы типа Узавы, в которых решается уравнение для давления с оператором Шура $\mathbf{S}_{\mathrm{rot}}P = \tilde{\mathbf{g}}$. Оператор Шура может быть формально записан в виде $\mathbf{S}_{\mathrm{rot}} = -\operatorname{div}(-\nu\Delta + \mathbf{w}\times + \alpha I)^{-1}\nabla$. Оператор $(-\nu\Delta + \mathbf{w}\times + \alpha I)^{-1}$ в свою очередь обозначает решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{w}\times\mathbf{u} + \alpha\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad &\text{в} \quad \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 \quad &\text{на} \quad \partial\Omega, \end{aligned} \tag{7}$$

Для простоты мы используем краевые условия Дирихле. Точное решение (7) может быть заменено приближенным, как в неточном методе Узавы [51] или в блочных переобуславливателях для (6) (например, [117], [138]). Решению систем вида (6) будет посвящен отдельный раздел диссертации, а перед этим речь пойдет о многосеточном методе для задачи (7).

Линеаризация и применение неявных схем по времени для уравнений в конвективной форме (4) приводят к решению задачи вида (6) с заменой $\mathbf{w} \times \mathbf{u}$ на $(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{u}$. Методы типа Узавы для такой системы приводят к задачи для давления с оператором Шура $\mathbf{S}_{\mathrm{conv}} = -\mathrm{div}\,(-\nu\Delta + \mathbf{a} \cdot \nabla + \alpha I)^{-1}\nabla$. Здесь оператор $(-\nu\Delta + \mathbf{a} \cdot \nabla + \alpha I)^{-1}$ означает решение набора уравнений конвекции-диффузии(-реакции). Многосеточные методы для таких уравнений уже обсуждались во введении.

Заметим, что в отличие от уравнения конвекции-диффузии задача (7) является системой, в которой различные компоненты вектора скорости связаны в уравнениях. Более того, *при малых значениях ν и α в* (7) *доминирует кососимметрическая часть* $\mathbf{w} \times \mathbf{u}$. Мы ограничимся рассмотрением двухмерного случая, поскольку для него удается провести полный анализ сходимости метода конечных элементов и анализ сходимости многосеточного метода. Тем не менее, все элементы многосеточного метода естественно обобщаются на трехмерный случай. Допускается $\alpha = 0$, что соответствует линеаризации стационарных уравнений Навье-Стокса. В диссертации будет показано, что при некоторых разумных ограничениях на функцию вихря $\mathbf{w}$ для дискретизации (7) можно использовать стандартный метод конечных элементов без какой-либо стабилизации (см. теорему 2.2 и замечание 2.2). Удается доказать оценки сходимости метода конечных элементов аналогичные оценкам в случае скалярного линейного уравнения реакции-диффузии (1).

Далее в диссертации рассматривается многосеточный метод для решения системы алгебраических уравнений, возникающий из дискретизации уравнений (7) стандартными конформными конечными элементами. Доказывается, что W-цикл с каноническими операторами продолжения и проекции и блочным методом Ричардсона в качестве сглаживаний является универсальным методом в том смысле, что показатель его сходимости ограничен константой меньше единицы и независящей от всех параметров системы. Хотя для доказательства сходимости многосеточного метода нам будут необходимы довольно жесткие ограничения на $\mathbf{w}$, численные эксперименты показывают, что многосеточный метод хорошо работает даже в тех случаях, когда эти ограничения нарушаются.

В разделе 2.3.3 приводятся результаты численных экспериментов, демонстрирующие устойчивость метода конечных элементов, а в разделе 3.4.4 эффективность многосеточного метода.

И анализ, и численные эксперименты показывают, что задача (7) в вычислительном плане напоминает скалярную задачу реакции-диффузии, которую с точки зрения численного анализа принято считать более легкой, чем задачу конвекции-диффузии.

Итак, основными результатами для системы (7) является доказательства универсальных оценок устойчивости метода конечных элементов и доказательство оценки сходимости W-цикла многосеточного метода, не зависящей от ν, $\|\mathbf{w}\|$, h и α при некоторых ограничениях на поведение функции $\mathbf{w}$. Вспомогательными результатами являются априорные оценки из теоремы 1.3, оценка устойчивости (лемма 2.7) и сходимости (теоремы 2.2) для метода конечных элементов, свойство аппроксимации из теоремы 3.9, свойство сглаживания из теоремы 3.10.

Обобщённая система Стокса.

Следующая рассматриваемая задача также возникает в ряде схем расчета уравнений Навье-Стокса:

$$\begin{aligned} -\varepsilon\Delta\mathbf{u} + \alpha\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad &\text{в} \quad \Omega, \\ -\operatorname{div}\mathbf{u} = g \quad &\text{в} \quad \Omega, \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0&, \\ \int_\Omega p\, dx = 0&, \end{aligned} \tag{8}$$

здесь $\varepsilon = const \geq 0$ – вещественный параметр. В частном случае несжимаемой жидкости $g = 0$, в общем случае для разрешимости системы накладывается условие $\int_\Omega g\, dx = 0$. Если $\alpha = 0$, то (8) – система Стокса. При расчетах нестационарных течений типичной является зависимость $\alpha \sim (\delta t)^{-1}$, где δt – шаг по времени. Можно масштабировать первое уравнение системы так, что $\alpha = 1$. Таким образом, можем считать, что $\alpha \in \{0; 1\}$, $\varepsilon > 0$.

Пусть $\alpha = 1$, тогда при малых значениях параметра ε система (8) является сингулярно-возмущенной, и стандартные итерационные методы сходятся медленно. В этом случае нетрудно проверить (см. [181]), что число обусловленности оператора Шура для давления растет как $O(\varepsilon^{-1})$ при $\varepsilon \to 0$. В 90-х годах были обоснованы три подхода решения (8) с универсальными оценками по ε: подход основанный на методе фиктивных областей [34], подход основанный на расщеплении граничных условий и приближении операторов Лапласа-Бельтрами [16, 17, 18]. Однако, широко используемым методом является итерационный алгоритм с блочным переобуславливанием, где для дополнения Шура используется переобуславливатель, предложенный Каху-Шабатом [63] (1988). Только через десять лет этот метод получил свое теоретическое обоснование в [50] и работах автора: [188, 186, 181]. В диссертации мы следуем изложению из [181].

Кратко суть подхода можно изложить следующим образом. Сначала доказывается следующий результат, опубликованный в [187]. Рассмотрим обобщенную задачу Стокса с однородными краевыми условиями на нормальную компоненту и вихрь скорости. Для этой задачи оператор Шура для давления S_p можно представить в виде

$$S_p^{-1} = \varepsilon I + \alpha \Delta_N^{-1},$$

где I – единичный оператор на $\mathbb{L}_2$, а Δ_N^{-1} – оператор, решающий задачу Неймана. Аппроксимированный конечными элементами, S_p^{-1} является переобуславливателем Каху-Шабата. Далее показывается, что получение оценки на спектральное число переобусловленного оператора эквивалентно доказательству некоторых обобщённых неравенств Нечаса. Следуя [181], в диссертации приводится доказательство этих неравенств с константой, не зависящей от параметров α и ε для достаточно произвольных 2-х и 3-х мерных областей. Более точно, рассматриваются области, для которых задача Стокса при $g = 0$ обладает $\mathbb{H}^2$-регулярностью; результаты для случая криволинейной трапеции с липшицевой границей из [181] принадлежат соавтору и в диссертацию не включены. Для конечно-разностной аппроксимации аналогичный результат доказан в [188], однако доказательство дано только для прямоугольных областей и равномерных сеток; в диссертации оно не приводится. Подчеркнем, что оценки полученные нами для переобуславливателей на дифференциальном уровне, хотя и переносятся на случай конечных элементов только эмпирически (этот пробел, впрочем, восполнен отчасти в работе [50]), играют ключевую роль в обосновании методов решения, основанных на разложениях по биортогональным базисам и адаптации, см. [71], [72].

В диссертации используются несколько итерационных методов блочного типа для задач типа Стокса, – это метод Узавы, неточный метод Узавы, метод MINRES с блочно-диагональным переобуславливателем (для симметричных систем) и метод BiCGstab с блочно-треугольным переобуславливателем. Обзор и анализ подобных итерационных методов для симметричных систем можно найти в монографии [22] и статье [166].

Многосеточный метод часто применяется на практике для численного решения систем типа Стокса и Навье-Стокса. Однако, математический анализ многосеточного метода для таких систем оказывается значительно сложнее, чем для эллиптических задач. В настоящее время полностью удаётся провести анализ только для задачи Стокса и нескольких итерационных методов в качестве сглаживаний [23, 46]. Причем, универсальность по параметру при $\alpha \neq 0$ на настоящий момент не доказана, хотя и наблюдается в численных экспериментах для большинства многосеточных методов. Пожалуй, только в [168] этот анализ полностью изложен в виде стандартных для эллиптического случая матрично-векторных свойств сглаживания и аппроксимации, влекущих оценку на норму матрицы итераций метода.

Для обобщенной задачи Стокса в диссертации также изучается эффект стабилизации, известной из литературы как grad-div или div-div стабилизация. Стабилизация состоит в использовании следующей слабой формулировки задачи: для $f \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, найти $(u,p) \in \mathbf{H}^1_0(\Omega) \times \mathbb{L}_2(\Omega)$, $\int_\Omega p(x)\,dx = 0$, удовлетворяющие

$$\begin{aligned} \varepsilon(\nabla u, \nabla v) + \alpha(u,v) + \xi(\operatorname{div} u, \operatorname{div} v) + (\operatorname{div} v, p) \quad &= f(v) \quad \forall \;\; v \in \mathbf{H}^1_0(\Omega), \\ (\operatorname{div} u, q) \quad &= 0 \qquad \forall \;\; q \in \mathbb{L}_2(\Omega), \end{aligned} \tag{9}$$

с дополнительным параметром $\xi \geq 0$. В работе изучается влияние слагаемого $(\operatorname{div} u, \operatorname{div} v)$ на численное решение обобщенной задачи Стокса. В сильной постановке этому слагаемому соответствует дифференциальный оператор $\nabla\mathrm{div}$ и, как будет показано, добавление этого слагаемого имеет стабилизирующий эффект при малых значениях ε. Это объясняет название “$\nabla\mathrm{div}$ стабилизация”. Заметим, что единственное решение задачи (9) не зависит от ξ. Добавление члена $\nabla\mathrm{div}$ в уравнение моментов для задачи Стокса не является новой идеей. В [85] это было предложено и изучалось в точки зрения вариационных методов для задач с ограничениями. Там было показано, что для итерационных методов типа градиентного спуска решения уравнения для давления с оператором Шура скорость сходимости увеличивается. В [62], [104] изучается влияние добавки $\nabla\mathrm{div}$ на скорость сходимости некоторых итерационных методов для задачи Стокса и Навье-Стокса. В [104] было показано, что для уравнений Навье-Стокса при больших числах Рейнольдса добавление слагаемого $\nabla\mathrm{div}$ улучшает сходимость нелинейных итераций. В работе [62] показано, что в случае блочно-диагонального и блочно-треугольного переобуславливания для задачи Стокса такая добавка не приводит к улучшению сходимости, если она используется только при вычислении невязки, но не влияет на переобуславливатель. В диссертации мы рассматриваем переобуславливатель, который зависит от ξ.

В литературе по методу конечных элементов для уравнений Навье-Стокса несжимаемой жидкости $\nabla\mathrm{div}$ добавка иногда встречается при анализе стабилизированных методов, таких как диффузии вдоль потока или Петрова-Галёркина (см., например, [135], [148]). Из этих результатов, однако, оставалось неясно играет ли этот член ключевую роль или вводится только для технических целей.

В цитированных выше работах ([85, 62]) изучалось влияние члена $\nabla\mathrm{div}$ на сходимость итерационных методов решения дискретной задачи. Мы замечаем, что эта добавка имеет интересное влияние также на свойства непрерывной задачи и на сходимость метода конечных элементов для задачи Стокса. Насколько известно автору, ранее в литературе эти результаты не встречались. На практике $\xi = 0$ являлся стандартным выбором. В диссертации будет показано, в каких случаях выбор $\xi > 0$ ведет к (значительному) улучшению.

В главах 1,2 и 3 анализируется влияние $\nabla\mathrm{div}$ слагаемого для непрерывной задачи, метода конечных элементов и итерационного метода решения дискретной системы. Для непрерывной задачи будет показано, что не изменяя непрерывное решение, выбор $\xi > 0$ в (9) имеет выраженный положительный эффект для устойчивости билинейной формы, соответствующей (9). Оказывается, что при $\xi > 0$ для непрерывной задачи выполняются однородные по ε оценки устойчивости в естественной норме. Это не справедливо при $\xi = 0$. Основной результат для метода конечных элементов состоит в следующем: при использовании LBB устойчивых конформных конечных элементов оценка сходимости при $\varepsilon \downarrow 0$ существенно улучшается при использовании $\nabla\mathrm{div}$ стабилизации. Численные эксперименты показывают, что теоретические оценки сверху правильно предсказывают поведение ошибки. Далее, анализируя сходимость алгоритмов типа Узавы (неточный метод Узавы), мы приходим к выводам аналогичным [85]; а именно, скорость сходимости внешних итераций для системы с дополнением Шура увеличивается при добавлении члена ∇div . Однако, при $\varepsilon \downarrow 0$ система для вектора скоростей, которую необходимо решать на внутренних итерациях, становится хуже обусловленной при использовании ∇div стабилизации. Тем не менее, для одного неконформного метода конечных элементов в [141] был построен универсальный многосеточный метод решения данной системы для вектора скоростей. Возможно, этот метод можно использовать и для других конечно-элементных аппроксимаций.

В методах стабилизации важен правильный выбор стабилизационного параметра, в нашем случае – выбор ξ. Этот вопрос кратко обсуждается в разделе 2.4. Более подробно он обсуждается в разделе 2.7 для задачи Осеена. Результаты численных экспериментов для задачи Стокса можно найти в разделе 2.4, а для задачи Осеена в разделе 2.7.

К основным результатам для обобщенной системы Стокса (8) относится доказательство равномерной по ε и α спектральной эквивалентности дополнения Шура и переобуславливателя Каху-Шабата для достаточно произвольных двух- и трехмерных областей (теорема 1.7), а также анализ влияния ∇div стабилизации на сходимость метода конечных элементов (теорема 2.4) и итерационных методов с блочными переобуславливателями (лемма 3.21 и 3.22). К важным вспомогательным результатам относятся доказательство обобщённого неравенства Нечаса (лемма 1.10), представление для дополнения Шура задачи с краевыми условиями на вихрь из теоремы 1.4, оценки для билинейной формы стабилизированной задачи из теорем 1.8 и 1.9.

Задача Стокса с интерфейсом.

В работе рассматривается следующая задача типа Стокса в ограниченной Липшицевой области $\Omega \in \mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$. Найти поле скоростей $\mathbf{u}$ и функцию давления p, удовлетворяющих системе

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,(\nu(\mathbf{x})\mathrm{D}\mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f} \quad &\text{в} \;\; \Omega, \\ \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 \quad &\text{в} \;\; \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 \quad &\text{на} \;\; \partial\Omega, \end{aligned} \tag{10}$$

с *кусочно-постоянной вязкостью*:

$$\nu = \begin{cases} 1 & \text{в } \Omega_1 \\ \varepsilon > 0 & \text{в } \Omega_2. \end{cases}$$

Подобласти Ω_1, Ω_2 предполагаются Липшицевыми, причем такими, что $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ и $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$. Через Γ обозначим *интерфейс* - границу между подобластями: $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. На интерфейсе задаются условия непрерывности поля скоростей и тензора напряжений:

$$[\mathbf{u}] = 0, \qquad [\sigma(\mathbf{u}, p)\cdot\mathbf{n}] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma$$

Выше использованы стандартные обозначения $\sigma(\mathbf{u}, p) = -p\,I + 2\nu\,\mathrm{D}\,\mathbf{u}$, $\mathrm{D}\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)$, $\mathbf{n}$ – нормаль к Γ.

Важной мотивацией рассмотрения такой системы Стокса является моделирование двух-фазных течений. Зачастую такие течения моделируются с помощью уравнений Навье-Стокса с разрывным коэффициентом вязкости. Влияние поверхностных напряжений на интерфейсе учитывается с помощью введения специальных локальных членов в правую часть уравнений. Этот подход известен, как CSF (continuum surface force) модель, см. [45]. Хорошо известной техникой определения неизвестного положения интерфейса является метод функции уровня, см. [149, 121, 64] и цитированную там литературу. Если такой подход используется при расчете сильно вязких течений, то уравнения Стокса с разрывным коэффициентом вязкости являются адекватной моделью.

Отметим, что для уравнения диффузии (уравнения Пуассона) с разрывным коэффициентом в литературе можно найти анализ регулярности решений и методов дискретизации [31, 33, 48, 65, 125], апостериорные оценки погрешности [123, 41] и итерационные методы решения дискретных систем. Итерационные методы для уравнений диффузии с разрывным коэффициентом изучались как многосеточные [47, 54, 126, 163], так и декомпозиции [119, 15, 109], а также основанные на итерациях в подпространствах [103, 2, 105, 3] (обзор подобных методов, включая задачи упругости и уравнения с переменными коэффициентами, содержится в [4]). В качестве одних из первых работ по итерационным методам для уравнений с разрывным коэффициентом отметим [8, 74]. Однако, для уравнений Стокса с разрывным коэффициентом вязкости нам не известны какие-либо опубликованные теоретические результаты за исключением анализа сходимости одного алгоритма из диссертации [7]. В настоящей диссертации проводится анализ метода конечных элементов, итерационного метода, а также доказываются некоторые результаты для вариационной постановки задачи (10). Особое внимание уделяется получению оценок, не зависящих от ε, т.е. от величины скачка в коэффициенте вязкости.

Функция давления (из $\mathbb{L}_2(\Omega)$) определяется из системы (10) с точностью до константы. Поэтому при анализе системы обычно используется какая-либо факторизация пространства $\mathbb{L}_2(\Omega)$. Для задачи Стокса с интерфейсом оказалось удобным использовать следующее пространство для давления:

$$\mathbb{M} := \{\, p \in \mathbb{L}_2(\Omega) \mid \int_\Omega \nu^{-1} p(x)\, dx = 0 \,\} .$$

В разделе 1.5.1 доказывается оценка непрерывности и infsup устойчивости для вариационной постановки задачи (10). В подходящих нормах константы в этих оценках не зависят от ε. С помощью стандартных рассуждений эти результаты влекут однородные оценки для решения задачи.

В разделе 2.5 для задачи (10) рассматривается метод конечных элементов с использованием конформных пар конечных элементов, удовлетворяющих LBB условию. Основным результатом раздела является доказательство подходящего infsup условия устойчивости, однородного относительно параметров h (шаг сетки) и ε. Этот результат используется для получения оценки на ошибку метода конечных элементов.

В пространстве конечных-элементов для давления рассмотрим матрицу масс относительно скалярного произведения с весом $(\nu^{-1}\cdot, \cdot)$. В разделе 3.6.1 доказывается, что эта матрица спектрально эквивалентна дополнению по Шуру с константами эквивалентности, *не зависящими от параметров*, h *и* ε. В сочетании с известными результатами о многосеточном методе для уравнений диффузии с интерфейсом это влечет универсальную сходимость ряда переобусловленных итерационных методов для решения задачи Стокса с интерфейсом. В качестве примера рассматривается метод Узавы и переобусловленный метод MINRES. Для этих методов результаты численных экспериментов приводятся в разделе 3.6.2. Заметим, что алгоритм для задачи типа Стокса с большим разбросом коэффициентов рассмотренный в [7] требует на каждой итерации точного решения обычной задачи Стокса и не допускает выбор итерационных параметров на основе вариационных принципов. Более того, анализ в [7] проводится для дифференциальной задачи, а не для соответствующей дискретной.

Для полноты картины отметим, что в работе [172] изучается случай, если вместо $\mathbb{M}$ используется более стандартное пространство для давления – $\mathbb{L}^2_0(\Omega)$. Этот анализ весьма похож на приведенный в диссертации, поэтому он не включен в нее. Сравнение этих результатов, которые в некотором смысле не улучшаемы, показывает, что анализ вариационной задачи и метода конечных элементов в пространстве $\mathbb{M}$ является более естественным, чем в $\mathbb{L}_0^2(\Omega)$. Более того, использование для конечно-элементного пространства давления факторизации из $\mathbb{L}_0^2(\Omega)$ приводит к зависимости в оценке для переобусловленного дополнения Шура от скачка в коэффициенте вязкости вида $\frac{h}{\varepsilon}$.

Результаты численных экспериментов в разделах 3.6.2 и 2.4.4 получены с помощью пакета DROPS ([91]) и любезно предоставлены Йоргом Петерсом.

<u>Основные результаты</u> для задачи Стокса с интерфейсом следующие. Благодаря правильному выбору факторизации пространства для давления и весовых норм доказано универсальное (относительно скачка в коэффициенте вязкости) inf-sup условие устойчивости, как для дифференциальной задачи (теорема 1.10), так и для конечно-элементной (теорема 2.6). Предложен переобуславливатель для дополнения Шура дискретной задачи, для которого доказана оценка, не зависящая от ε и h (теорема 3.12).

Системы типа Осеена.

Следующей темой диссертации является численное решение уравнений типа Осеена, т.е. системы

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{w}\times\mathbf{u} + \alpha\mathbf{u} + \nabla P &= \mathbf{f} \quad \text{в} \quad \Omega \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \end{aligned} \tag{11}$$

и системы

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{u} + \alpha\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{в} \quad \Omega \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 \quad \text{в} \quad \Omega. \end{aligned} \tag{12}$$

Как обсуждалось выше (см. стр. 16), обе системы возникают при применении неявных схем по времени для уравнений Навье-Стокса в вихревой и конвективной форме, соответственно.

Построение универсальных итерационных методов для задач типа Осеена является давно стоящей и актуальной проблемой. Универсальность понимается относительно параметров ν и α (при этом самым трудным считается случай $\alpha = 0$). Заметим, что свойства систем существенно зависят от функций $\mathbf{w}$ и $\mathbf{a}$, и вряд ли представляется возможным построение итерационных методов удовлетворительно работающих при любых $\mathbf{w} \in \mathbf{L}_\infty$ или $\mathbf{a} \in \mathbf{H}^1$. В настоящее время разумной представляется задача построения универсальных итерационных методов хотя бы для $\mathbf{w}$ или

a “простого” вида, отвечающего набору модельных течений. Даже в такой постановке задача оказывается трудной. За последние 10 лет можно назвать всего четыре относительно успешных попытки продвинуться в данном направлении. Перечислим их. Во-первых, назовем переобуславливатель Элмана (1999) [78] для конвективной формы системы Осеена. Численные эксперименты показывают, что он универсален по вязкости (по ν) только для параллельных течений. Более того, сходимость методов на подпространствах Крылова, использующих данный переобуславливатель, имеет зависимость от шага сетки. Следующий подход - это переобуславливатель, предложенный автором [183] для вихревой формы системы. Об этом переобуславливателе пойдет речь в диссертации. Он универсален по вязкости и шагу сетки при $\alpha > 0$, если $\alpha = 0$ имеет место некоторая зависимость от ν. Далее, переобуславливатель Кея-Логхина (2001) [100, 101] для конвективной формы системы Осеена. Это на настоящий момент самая удачная попытка для системы Осеена в конвективной форме. Переобуславливатель универсален по шагу сетки, но дает рост числа итераций вида $O(\nu^{-\frac{1}{2}})$ даже в случае параллельных течений. Наконец, подход Бенци (2004) [38]. Численные эксперименты показывают универсальность по вязкости для параллельных и циркулирующих двумерных течений, однако имеет место некоторая зависимость сходимости от шага сетки. Подход Бенци просто реализуем только для вихревой формы системы, дальнейшее его обсуждение и сравнение с методом предложенным автором можно найти в [39]. Отметим, что все перечисленные подходы пока носят полу-эмпирический характер. Теоретический анализ ограничивается системами с постоянными функциями **w** или **a** и такими краевыми условиями, которые позволяют проводить анализ Фурье, либо допускают коммутируемость операторов div и Δ. Таким образом, построение переобуславливателя, не приводящего к зависимость от шага сетки и дающего универсальность по вязкости хотя бы для простых течений, является сегодня актуальной задачей, привлекающей внимания ученых.

Прежде, чем вести речь об итерационных методах решения алгебраических систем, возникающих из метода конечных элементов для систем Осеена, необходимо найти адекватные (устойчивые) формулировки метода конечных элементов. Этому вопросу посвящена достаточно обширная литература. Результаты автора по этой теме опубликованы в [177, 169, 175]. В диссертации данному вопросу отведен раздел 2.6, где изложение следует статьям [177] и [169].

Принято считать, что существует две причины, порождающие неустойчивость методов конечных элементов для уравнений Навье-Стокса и системы Осеена. Одна из них – это возможная несовместимость аппроксимаций для скоростей и давления. Эта причина устраняется либо выбором аппроксимаций, удовлетворяющих LBB условию, либо использованием, так называемых, методов стабилизации давления. Другая причина происходит из доминирования конвективных членов при больших числах Рейнольдса. Для конечно-разностных аппроксимаций давно известно, что в этом случае следует использовать разности против потока. Для конечных элементов также существует несколько методов, сочетающих устойчивость и высокий порядок сходимости. Приведем некоторые названия: streamline upwind/ pressure stabilizing Petrov-Galerkin (SUPG/PSPG) метод, the Galerkin/ Least-squares (GLS) и методика известная как algebraic sub-grid scale (ASGS) techniques, см., например, [80, 70, 135, 148, 150]. Перечисленные методы одновременно подавляют возможные нефизические осцилляции в приближенном решении и позволяют использовать аппроксимации скорости-давления, не удовлетворяющие LBB условию, например, использовать для скорости и давления конечные элементы одинакового порядка.

Основными недостатками стабилизированных методов конечных элементов принято считать, во-первых, появление дополнительных стабилизирующих членов, вычисление которых может забирать ощутимую часть компьютерного времени, и усложнять структуру матриц в системах линейных алгебраических уравнений; во-вторых, чувствительность методов к выбору значений для некоторого набора параметров (параметров стабилизации). Неправильный выбор этих параметров приводит либо к потери устойчивости, либо к ухудшению точности.

В диссертации анализ стабилизированных методов конечных элементов для уравнений типа Осеена ведется согласно следующей схеме. Сначала анализируются, так называемые, сокращенные схемы стабилизации. Эти схемы получаются из полного метода Петрова-Галеркина путем исключения членов, связанных со стабилизацией давления. Это приводит к сокращению части дополнительных слагаемых, и такие схемы часто используют на практике в сочетании с LBB-устойчивыми аппроксимациями. Однако анализ таких схем для конформных конечных элементов в литературе отсутствует. Более того, было обнаружено, что для анализа сокращенных схем удобным является использование некоторого inf-sup условия для аппроксимаций скорости-давления, отличающегося от LBB условие. Мы называем его модифицированным inf-sup условием. Оно выглядит следующим образом:

$$\inf_{p_h\in\mathbb{Q}_h}\sup_{\mathbf{u}_h\in\mathbb{V}_h}\frac{(\operatorname{div}\mathbf{u}_h,p_h)}{\|\nabla p_h\|\|\mathbf{u}_h\|}\ge\beta_1>0, \tag{13}$$

где β_1 не зависит от h. Использование (13) позволяет получить оценки устойчивости для сокращенных схем на большем интервале по числу Рейнольдса, чем использование LBB условия. Условие (13) удается доказать для LBB-устойчивых аппроксимаций при некоторых, впрочем, весьма жестких, ограничениях на сетку, см. раздел 2.6.2. В разделе 2.6.2 приводится анализ и без использования модифицированного inf-sup условия. Затем в разделе 2.6.3 проводится анализ полностью стабилизированного метода конечных элементов, т.е. допускающего использование LBB-неустойчивых аппроксимаций скорости-давления. Для обоих подходов выводятся формулы для выбора параметров стабилизации, основанные на минимизации правой части в априорных оценках для ошибки метода конечных элементов. Новым в доказываемых результатах является еще и то, что наряду с задачей Осеена (12) рассматривается линеаризованная задача в вихревой форме, т.е. (11). Ранее в литературе стабилизация метода конечных элементов для (11) встречалась только для случая $\mathbf{w}=const$ [69, 70] (моделирование эффекта Кориолисовых сил).

Более детальное обсуждение и мотивацию методов стабилизации для задачи Осеена можно найти в разделе 2.6. Заметим только, что $\nabla\operatorname{div}$-стабилизация, детально изученная для задачи Стокса, остается важной и продолжает использоваться в стабилизированных методах конечных элементов для задачи Осеена. Раздел 2.6 завершается параграфом 2.6.4 с результатами численных экспериментов, иллюстрирующих теорию.

<u>Основные результаты</u> диссертации для линеаризованной задачи Навье-Стокса состоят в следующем. Для системы типа Осеена в вихревой форме предложен переобуславливатель для дополнения Шура. С помощью анализа Фурье и численных экспериментов продемонстрирована эффективность данного переобуславливания по сравнению известными. Получены оценки для дополнения Шура линеаризованных систем, если в качестве переобуславливателя выбираются те же операторы, что и в симметричном случае. Показана зависимость констант эквиваленстности от параметров (теорема 1.11). Предложен метод стабилизации конечных элементов, подходящий для вихревой формы линеаризованной

системы Навье-Стокса. Для вихревой и конвективной форм получены оценки сходимости стабилизированного метода конечных элементов для различных вариантов стабилизации (теоремы 2.10, 2.11, 2.13 и 2.14). Предложен, ранее отсутствующей, анализ сходимости сокращенных схем стабилизации для системы Осеена, широко использующихся на практике (теорема 2.12). Оценки сходимости детально иллюстрируются результатами численных экспериментов, которые показывают оптимальность оценок.

Система Навье-Стокса.

Построение универсальных по числу Рейнольдса численных методов решения уравнений Навье-Стокса (включая анализ, доказывающий универсальность) находится, по-видимому, вне круга проблем, которые будут решены в ближайшие годы. Исключение может представлять двухмерный случай, для которого существует доказательство глобального существования и единственности решения системы Навье-Стокса. Среди большого количества работ, посвященных численному решению уравнений Навье-Стокса, включая анализ нелинейных итерационных методов, отметим работы российских ученых [10, 11, 12], а также монографии [84, 150], являющиеся прекрасным изложением теоретических ([84]) и практических ([150]) вопросов решения уравнений Навье-Стокса методом конечных элементов.

В настоящей диссертации результаты для уравнений Навье-Стокса носят больше иллюстрационный характер, – необходимость численно решать рассматриваемые линейные задачи возникает при использовании тех или иных схем для расчета течений несжимаемой вязкой жидкости. В разделе 1.6 приводятся примеры таких схем. Более сложные двухуровневые схемы для уравнений Навье-Стокса рассмотрены автором в работе [184]; в диссертацию эти результаты не вошли. В разделе 2.7 обсуждается применение стабилизированного метода конечных элементов для аппроксимации уравнений Навье-Стокса. Далее приводятся результаты расчетов двух двухмерных течений, являющихся стандартными тестовыми примерами. Полученные результаты сравниваются с известными из литературы. Наконец, в разделе 3.8 приводятся результаты по сходимости нелинейных итерационных алгоритмов расчета уравнений Навье-Стокса и показывается, как линейные методы из предыдущих разделов работают в качестве составных частей этих нелинейных итераций.

Обозначения и соглашения

Бо́льшая часть результатов диссертации относится к вычислительной линейной алгебре, однако доказательства во многом базируются на результатах по аппроксимации (метод конечных элементов) и оценках решений дифференциальных уравнений в частных производных. Поэтому в монографии соседствуют математические объекты разной “природы”. Для избежании путаницы автор будет придерживаться следующих правил:
прописными буквами (f, g, u) обозначаются функции из гильбертовых пространств $(\mathbb{L}_2, \mathbb{H}^1)$;
жирным шрифтом $(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{u})$ обозначаются вектор-функции из гильбертовых пространств, которые тоже обозначаются жирным шрифтом $(\mathbf{L}_2, \mathbf{H}^1)$;
функции, порожденные конечными элементами, имеют нижний индекс h $(f_h, g_h, u_h$ или $\mathbf{f}_h, \mathbf{g}_h, \mathbf{u}_h$ для конечно-элементных вектор-функции), пространства конечных элементов также помечаются индексом h ($\mathbb{V}_h$ или $\mathbf{V}_h$);
прямым шрифтом $(\mathrm{f}, \mathrm{g}, \mathrm{u}, \mathrm{x})$ обозначаются вектора из $\mathbb{R}^n$. Как правило, это вектора коэффициентов разложения конечно-элементных функций по базису.
Матрицы обозначаются заглавными латинскими буквами (A, W), а функциональные пространства прямым полужирным $(\mathbb{V}, \mathbb{H})$ за исключением пространств вектор-функций, которые обозначаются жирным $(\mathbf{V}, \mathbf{H})$.

Если явно не накладываются другие ограничения, то Ω – ограниченная Липшицева область в $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, $\partial\Omega$ – граница, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к границе.

Евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ будет обозначаться $\langle\cdot,\cdot\rangle$, а норма $\|\cdot\|$. Через $(\cdot,\cdot)$ и (снова) $\|\cdot\|$ будут обозначаться скалярные произведения в $\mathbb{L}_2(\Omega)$ и $\mathbf{L}_2(\Omega)$. Стандартная норма в пространстве Соболева $\mathbb{H}^k(\Omega)$ обозначается $\|\cdot\|_k$.

Мы будем использовать следующие обозначения

$$
\begin{aligned}
(\nabla u, \nabla v) &:= \sum_{j=1}^{d} \Big(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_j}\Big),\\
(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) &:= \sum_{i=1}^{d} (\nabla u_i, \nabla v_i),
\end{aligned}
$$

порожденную данными формами полунормы на $\mathbb{H}^1(\Omega)$ и $\mathbf{H}^1(\Omega)$ будем обозначать $|\cdot|_1 := \|\nabla\cdot\|$.
Символ $\times$ используется для обозначения векторного произведения, $\operatorname{curl}\mathbf{u} := (\nabla\times\mathbf{u})$, в двухмерном случае $\operatorname{curl}\mathbf{u} := -\partial u_1/\partial x_2 + \partial u_2/\partial x_1$ и

$$a\times\mathbf{u} = -\mathbf{u}\times a := \begin{cases} -a\,u_2 \\ a\,u_1 \end{cases}$$

для скалярной функции a и векторной $\mathbf{u}$.

Будем придерживаться следующих обозначений для встречающихся пространств: $\mathbb{H}^1_0 := \mathbb{H}^1_0(\Omega)$ – пространство функций из $\mathbb{H}^1$ равных нулю на границе Ω. $\mathbf{H}^1_0$ – пространство вектор-функций, каждая компонента которых принадлежит $\mathbb{H}^1_0$. $\bar{\mathbb{H}}^1_0$ определено на стр. 36. Далее

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{L}^0_2 & := & \{q\in\mathbb{L}_2 :\ (q,1)=0\}, \quad \text{снабжено } \mathbb{L}_2 - \text{нормой} \\
\mathbf{W} & := & \mathbf{H}^1_0\times\mathbb{L}^0_2, \\
\mathbf{H}(\operatorname{div}) & := & \{\mathbf{u}\in\mathbf{L}_2(\Omega), \operatorname{div}\mathbf{u}\in\mathbb{L}_2(\Omega)\}, \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\operatorname{div})} = (\|\mathbf{u}\|^2+\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
\mathbf{H}_0(\operatorname{div}) & := & \{\mathbf{u}\in\mathbf{H}(\operatorname{div}) :\ \mathbf{u}{\cdot}\mathbf{n}=0\}, \\
\mathbf{H}(\operatorname{curl}) & := & \left\{\mathbf{u}\in\mathbf{L}_2(\Omega), \operatorname{curl}\mathbf{u}\in\mathbb{L}_2(\Omega)^{2n-3}\right\}, \\
 & & \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\operatorname{curl})} = (\|\mathbf{u}\|^2+\|\operatorname{curl}\mathbf{u}\|^2)^{\frac{1}{2}} \\
\mathbf{U} & := & \mathbf{H}_0(\operatorname{div})\cap\mathbf{H}(\operatorname{curl}), \\
 & & \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{U}} := (\|\mathbf{u}\|^2+\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|^2+\|\operatorname{curl}\mathbf{u}\|^2)^{\frac{1}{2}}, \\
\mathbf{U}^0 & := & \{\mathbf{u}\in\mathbf{U} :\ \operatorname{curl}\mathbf{u}=0\}.
\end{array}$$

Для пространств конечно-элементных функций используются обозначения $\mathbb{V}_h\subset\mathbb{H}^1_0$, $\mathbf{V}_h\subset\mathbf{H}^1_0$, $\mathbb{Q}_h\subset\mathbb{L}^0_2$, $\mathbf{W}_h=\mathbf{V}_h\times\mathbb{Q}_h$.
$\mathbb{V}_k$ обозначает пространство конечно-элементных функций относительно k-ого уровня в иерархии триангуляций области.
$\mathbb{X}_k$ – пространство коэффициентов разложения конечно-элементных функций из $\mathbb{V}_k$ по (нодальному) базису.
Также используются пространства

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{M} & := & \{q\in\mathbb{L}_2 :\ (\nu^{-1}q,1)=0\}, \quad \|q\|_M := (\nu^{-1}q,q)^{\frac{1}{2}} \\
\mathbb{M}_h & \subset & \mathbb{M} \ - \ \text{конечно-элементная аппроксимация } \mathbb{M}
\end{array}$$

здесь ν – кусочно-постоянная положительная функция на Ω, см. стр. 74. На пространстве $\mathbf{H}^1_0$ встречается норма $\|\mathbf{u}\|_\nu = (\nu\mathbf{u},\mathbf{u})^{\frac{1}{2}}$.

Везде в работе через C, c, c_0, c_1 и т.п. обозначаются некоторые абсолютные константы, конкретные значения которых не имеют существенного значения. Эти константы не зависят от параметров, входящих в формулировку уравнений, от параметров дискретизации. Когда речь идет о конечномерных пространствах, то константы не зависят от размерности.

Константа из *неравенства Пуанкаре-Фридрихса* обозначается через C_F:

$$\|u\| \leq C_F \|\nabla u\| \qquad \forall\ u \in \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Мы будем ссылаться на *неравенство Нечаса*:

$$c_0 \|q\| \leq \|\nabla q\|_{\mathbb{H}^{-1}} \qquad \forall\ q \in \mathbb{L}_2^0$$

с положительной константой c_0. $\mathbf{H}^{-1}$ – пространство сопряженное к $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ относительно скалярного произведения из $\mathbb{L}_2$.

Говорят, что для пары конечно-элементных пространств (скалярных функций $\mathbb{Q}_h$ и вектор функций $\mathbf{V}_h$) выполнено LBB условие (аббревиатура происходит от фамилий Ладыженская, Babushka, Brezzi), если

$$\sup_{\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{(\operatorname{div} \mathbf{u}_h, p_h)}{\|\nabla \mathbf{u}_h\|} \geq \beta \|p_h\|, \qquad \forall\ p_h \in \mathbb{Q}_h \tag{14}$$

где $\beta > 0$ не зависит от h для семейства триангуляций Ω. Семейство параметризуется набором значений $h > 0$ (максимального диаметра триангуляций), которые могут быть произвольно малы. Здесь и везде в монографии $\inf_x$ или $\sup_x$ берутся для $x \neq 0$, если x появляется в знаменателе.

Запись $A > B$ для операторов (матриц) A и B означает $(A\mathrm{x}, \mathrm{x}) > (B\mathrm{x}, \mathrm{x}), \quad \forall\ \mathrm{x} \neq 0$.

Средним *показателем сходимости* итерационного метода будем называть величину $q = (\|\mathrm{r}^n\| / \|\mathrm{r}^0\|)^{1/n}$, где r^0 – вектор начальной невязки, r^n – вектор невязки после остановки вычислений, n – число сделанных итераций.

Глава 1

Уравнения и системы уравнений в частных производных

В этой главе рассматриваются уравнения и системы уравнений в частных производных, возникающие, в частности, в приложениях, связанных с моделированием движения жидкостей и газов. Эти задачи имеют особенности, в силу которых непосредственное применение простых итерационных методов для нахождения решения их дискретных аналогов не дает удовлетворительных результатов. Помимо формулировок в этой главе будут получены специальные оценки для решений дифференциальных задач, необходимые далее для доказательства свойства универсальности итерационных методов. Это, как правило, будут априорные оценки, в которых особое внимание уделено зависимости "констант" от различных параметров.

Если оператор $\mathcal{L}(\varepsilon)$ дифференциальной задачи зависит от параметра $\varepsilon \in (0,1]$, задачу

$$\mathcal{L}(\varepsilon)u = f \text{ в } \Omega, \quad \ell(u) = g \text{ на } \partial\Omega \tag{1.1}$$

мы назовём сингурярно-возмущенной при малом ε, если оператор $\mathcal{L}(0)$ имеет другой тип, чем $\mathcal{L}(\varepsilon)$. В этом разделе будут рассмотрены несколько уравнений в частных производных 2-ого порядка и систем уравнений. В каждом из примеров сингулярность при $\varepsilon \to 0$ имеет свой тип и может представлять различную степень трудности при численном решении. Глава начинается с рассмотрения наиболее простого (по мнению автора) случая – уравнения реакции-диффузии, а заканчивается рассмотрением системы нелинейных уравнений Навье-Стокса.

1.1 Уравнения реакции-диффузии.

Уравнение реакции-диффузии имеет вид

$$-\varepsilon\Delta u + d{\cdot}u = f \text{ в } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.2}$$

при заданных $\varepsilon \in (0,1]$, $f \in \mathbb{L}_2(\Omega)$ и $d \in \mathbb{L}_\infty(\Omega)$, причем $0 < d_0 \le d \le d_1$. Возможна постановка и других (Неймана или смешанных) краевых условий. В этом примере $\mathcal{L}(0)$ имеет нулевой порядок.

Задача типа (1.2) возникает, например, при рассмотрении неявных схем по времени для численного решения параболических уравнений (см. [5]). В этом случае $\varepsilon \sim \nu\tau$, где ν – коэффициент диффузии, τ – шаг дискретизации по времени, $d \equiv 1$, а f содержит аппроксимированные явно члены уравнения.

Вариационная постановка (1.2) следующая: найти $u \in \mathbb{H}^1_0(\Omega)$ такую, что

$$a(u,v) = (f,v) \quad \text{для всех} \quad v \in \mathbb{H}^1_0(\Omega) \tag{1.3}$$

с симметричной билинейной формой

$$a(u,v) = \varepsilon(\nabla u, \nabla v) + (d\,u, v) \quad \text{для } u,v \in \mathbb{H}^1_0(\Omega).$$

1.1.1 Априорные оценки.

Предположим, что Ω – выпуклая. Заметим, что $a(\cdot,\cdot)$ является непрерывной и эллиптической на $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$. Следовательно, (1.3) имеет единственное решение. Используя стандартную теорию о регулярности решений эллиптических задач, доказываем следующую лемму.

Лемма 1.1. *Пусть u является решением* (1.3). *Тогда $u \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ и*

$$\|u\| \le c\|f\|\,, \tag{1.4}$$

$$\|u\|_1 \le \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\|f\|\,, \tag{1.5}$$

$$\|u\|_2 \le \frac{c}{\varepsilon}\|f\|\,, \tag{1.6}$$

с константами c, не зависящими от ε и f.

Доказательство. Используя неравенство Юнга, получаем из (1.3)

$$\varepsilon\,|u|_1^2 + d_0\|u\|^2 \le \varepsilon\,|u|_1^2 + (d\,u,u) = a(u,u) = (f,u) \le \frac{1}{2d_0}\|f\|^2 + \frac{d_0}{2}\|u\|^2. \tag{1.7}$$

Неравенство (1.4) доказано. Результат в (1.7) в комбинации с неравенством Фридрихса $\|u\|_1 \le c|u|_1$ влечет (1.5).

Положим $\tilde{f} = \frac{1}{\varepsilon}(f - u)$, тогда u является слабым решением задачи Пуассона: $(\nabla u, \nabla v) = (\tilde{f}, v)$ для всех $v \in \mathbb{H}_0^1$. Так как $\tilde{f} \in \mathbb{L}_2(\Omega)$ и область Ω выпуклая, то из результатов о регулярности для решения уравнения Пуассона (см, например, Теорему 4.3.1 и §8.2 в [90]) следует, что $u \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ и

$$\|u\|_2 \le c\|\tilde{f}\| \le c\frac{1}{\varepsilon}(\|f\| + \|u\|). \tag{1.8}$$

Теперь (1.6) следует из (1.4) и (1.8). □

1.2 Уравнения конвекции-диффузии.

Уравнение конвекции-диффузии в двухмерном случае имеет вид

$$-\varepsilon\Delta u + a_1\frac{\partial u}{\partial x} + a_2\frac{\partial u}{\partial y} = f \text{ в } \Omega, \quad + \quad \text{граничные условия.} \tag{1.9}$$

Будем предполагать $\varepsilon \in (0,1]$, $f \in \mathbb{L}_2(\Omega)$ и $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ – вектор-функция из $\mathbf{L}_\infty \cap \mathbf{H}^1$, причем $\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$. В этом примере $\mathcal{L}(0)$ имеет первый порядок.

Уравнение типа (1.9) возникает при расчете движений жидкости или газов, например, как уравнение конвекции (при учете температуры потока жидкости или газа). В этом случае (a_1, a_2) – вектор скорости потока, u – поле распределения температуры, ε - коэффициент теплопроводности. Помимо этого, (1.9) является линеаризацией эллиптической части уравнения моментов движения жидкости (газа), и часто служит вспомогательной задачей. В этом случае u – компонента вектор-функции, (1.9) – одно из 2-х (в двухмерном случае) уравнений системы, ε – коэффициент кинематической вязкости.

Как обсуждалось в введении, для численного анализа представляют интерес (и уже достаточную трудность) следующие частные случаи (1.9). Будем предполагать $\Omega = (0,1)^2$. Рассмотрим задачу с условиями

Неймана на границе вытекания и с условиями Дирихле на остальной части границы:

$$\begin{aligned} -\varepsilon\Delta u + u_x = f \quad &\text{в} \quad \Omega := (0,1)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad &\text{на} \quad \Gamma_E := \{\,(x,y) \in \overline{\Omega} \mid x = 1\,\} \\ u = 0 \quad &\text{на} \quad \partial\Omega \setminus \Gamma_E \end{aligned} \tag{1.10}$$

Также рассмотрим задачу с условиями Дирихле на всей границе:

$$\begin{aligned} -\varepsilon\Delta u + u_x = f \quad &\text{в} \quad \Omega := (0,1)^2, \\ u = 0 \quad &\text{на} \quad \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Условия Неймана на границе вытекания часто встречаются в приложениях, например, при наличии искусственной границы в задачах вычислительной гидродинамики, см., например, [137, 182]. Постановка условий Неймана исключает возникновение экспоненциального погранслоя в решении у границы вытекания. В тоже время, наличие экспоненциального погранслоя – не редкость в приложениях, например, в задаче фильтрации. Поэтому анализ итерационных методов в случае условий Дирихле на границе вытекания также имеет прикладное значение.

Для вариационной постановки (1.10) нам понадобится пространство $\bar{\mathbb{H}}^1_0 := \{\, v \in \mathbb{H}^1(\Omega) \mid v = 0 \;\text{ на }\; \partial\Omega \setminus \Gamma_E \,\}$. Вариационная постановка (1.10) следующая: найти $u \in \bar{\mathbb{H}}^1_0$ такую, что

$$a(u,v) := \varepsilon(u_x, v_x) + \varepsilon(u_y, v_y) + (u_x, v) = (f, v) \quad \forall\, v \in \bar{\mathbb{H}}^1_0 \tag{1.12}$$

Из леммы Лакса-Мильграма следует существование и единственность решения (1.12).

Вариационная постановка (1.11) требует замены пространства $\bar{\mathbb{H}}^1_0$ на $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$ в (1.12).

1.2.1 Априорные оценки и зависимости вдоль линий тока.

Для анализа дискретной задачи нам понадобится следующая модифицированная билинейная форма:

$$a_k(u,v) := (\varepsilon + \delta_k h_k)(u_x, v_x) + \varepsilon(u_y, v_y) + (u_x, v), \quad u, v \in \bar{\mathbb{H}}^1_0\,(\,\mathbb{H}^1_0\,). \tag{1.13}$$

Смысл положительных параметров δ_k и h_k будет разъяснён в разделе 2.2. Для удобства введем обозначение

$$\varepsilon_k := \varepsilon + \delta_k h_k.$$

Случай условий Неймана на Γ_E

Рассмотрим вариационную задачу Дирихле-Неймана: для заданной $f \in \mathbb{L}_2$ найти $u \in \bar{\mathbb{H}}_0^1$ такую, что

$$a_k(u,v) = (f,v) \quad \forall\, v \in \bar{\mathbb{H}}_0^1. \tag{1.14}$$

Для границы втекания будем использовать обозначение

$$\Gamma_W := \{\, (x,y) \in \overline{\Omega} \mid x = 0 \,\}.$$

Теорема 1.1. *Пусть $f \in \mathbb{L}_2(\Omega)$, u – решение (1.14). Существует константа c, не зависящая от ε_k and ε такая, что*

$$\begin{aligned}
\|u\| + \|u_x\| &\le c\,\|f\|, && (1.15)\\
\sqrt{\varepsilon}\|u_y\| &\le c\,\|f\|, && (1.16)\\
\varepsilon_k\|u_{xx}\| + \sqrt{\varepsilon\varepsilon_k}\|u_{xy}\| + \varepsilon\|u_{yy}\| &\le c\,\|f\|, && (1.17)\\
\int_{\Gamma_E} u^2\,dy + \varepsilon_k \int_{\Gamma_W} u_x^2\,dy + \varepsilon \int_{\Gamma_E} u_y^2\,dy &\le c\|f\|^2. && (1.18)
\end{aligned}$$

Доказательство. Поскольку $f \in \mathbb{L}_2(\Omega)$, то теория о регулярности решений из [90] обеспечивает принадлежность решения (1.14) u к пространству $\mathbb{H}^2(\Omega)$. Следовательно, возможно рассмотреть соотношение

$$-\varepsilon u_{yy} - \varepsilon_k u_{xx} + u_x = f \tag{1.19}$$

и краевые условия из (1.10) в обычном смысле. Умножим (1.19) на u_x и проинтегрируем по частям. Получаем слагаемые:

$$\begin{aligned}
-\varepsilon(u_{yy}, u_x) &= \frac{\varepsilon}{2}((u_y^2)_x, 1) = \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Gamma_E} u_y^2\,dy,\\
-\varepsilon_k(u_{xx}, u_x) &= -\frac{\varepsilon_k}{2}((u_x^2)_x, 1) = \frac{\varepsilon_k}{2}\int_{\Gamma_W} u_x^2\,dy,\\
(u_x, u_x) &= \|u_x\|^2 \ge \|u\|^2,\\
(f, u_x) &\le \frac{1}{2}\|f\|^2 + \frac{1}{2}\|u_x\|^2.
\end{aligned}$$

Из этих соотношений легко следуют оценки (1.15) и (1.18), за исключением оценки для $\int_{\Gamma_E} u^2\,dy$. Далее мы умножаем (1.19) на u, интегрируем по частям и получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon\|u_y\|^2+\varepsilon_k\|u_x\|^2+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_E} u^2\,dy &= (f,u)\le \|f\|\|u\| \\ &\le c\,\|f\|^2. \quad \text{(используем (1.15))} \end{aligned}$$

Оценка (1.16) и оставшаяся часть (1.18) доказаны. Для проверки (1.17) введем $F = f - u_x$. Благодаря (1.15) имеем $\|F\| \le c\,\|f\|$. Более того, справедливо равенство $-\varepsilon u_{yy} - \varepsilon_k u_{xx} = F$. Возведем в квадрат обе части этого равенства и проинтегрируем по Ω. Получаем

$$\varepsilon^2\|u_{yy}\|^2+2\varepsilon\varepsilon_k(u_{yy},u_{xx})+\varepsilon_k^2\|u_{xx}\|^2=\|F\|^2\le c\,\|f\|^2. \tag{1.20}$$

Заметим, что для произвольной достаточно гладкой v, удовлетворяющей краевым условиям (1.10), справедливо

$$v_{xx}(x,0)=v_{xx}(x,1)=0,\ x\in(0,1),\quad v_y(0,y)=v_{xy}(1,y)=0,\ y\in(0,1),$$

поэтому

$$(v_{yy},v_{xx})=-(v_y,v_{xxy})=(v_{xy},v_{xy}).$$

С помощью стандартных рассуждений о предельном переходе заключаем, что для решения $u\in\mathbb{H}^2(\Omega)$ задачи (1.14) соотношение $(u_{yy},u_{xx}) = (u_{xy},u_{xy})$ также выполнено. Теперь (1.20) дает

$$\varepsilon^2\|u_{yy}\|^2+2\varepsilon\varepsilon_k\|u_{xy}\|^2+\varepsilon_k^2\|u_{xx}\|^2\le c\,\|f\|^2.$$

□

Далее нам понадобится также следующая лемма.

Лемма 1.2. *Рассмотрим функцию $\phi\in\mathbb{H}^1_\infty(0,1)$ такую, что*

$$0\le -\varepsilon_k\phi_x\le\phi.$$

Обозначим через $\|\cdot\|_\phi$ полу-норму, задаваемую скалярным произведением $(\phi\cdot,\cdot)$. Тогда решение u задачи (1.14) удовлетворяет оценкам

$$\|u_x\|_\phi \le 2\|f\|_\phi \tag{1.21}$$

$$\varepsilon_k\ \phi(0)\int_{\Gamma_W} u_x^2\,dy \le \|f\|_\phi^2 \tag{1.22}$$

$$\frac{1}{4}\|u\|^2_{-\phi_x}+\varepsilon\|u_y\|_\phi^2 \le (\phi\, f,u). \tag{1.23}$$

Доказательство. Рассмотрим соотношение (1.19), умножим его на ϕu_x и проинтегрируем по частям. Получаем следующие слагаемые

$$\begin{aligned}
-\varepsilon(u_{yy},\phi u_x) &= \frac{\varepsilon}{2}\|u_y\|^2_{-\phi_x} + \frac{\varepsilon}{2}\phi(1)\int_{\Gamma_E} u_y^2\,dy \geq 0 \ , \\
-\varepsilon_k(u_{xx},\phi u_x) &= -\frac{\varepsilon_k}{2}\|u_x\|^2_{-\phi_x} + \frac{\varepsilon_k}{2}\phi(0)\int_{\Gamma_W} u_x^2\,dy \\
&\geq -\frac{1}{2}\|u_x\|^2_{\phi} + \frac{\varepsilon_k}{2}\phi(0)\int_{\Gamma_W} u_x^2\,dy \ , \\
(u_x,\phi u_x) &= \|u_x\|^2_{\phi} \ , \\
(f,\phi u_x) &\leq \|f\|_{\phi}\|u_x\|_{\phi} \leq \|f\|^2_{\phi} + \frac{1}{4}\|u_x\|^2_{\phi}.
\end{aligned}$$

Теперь (1.21) и (1.22) непосредственно следуют. Для получения оценки (1.23) мы умножим (1.19) на $\phi\, u$ и проинтегрируем по частям. Получаем следующие слагаемые

$$\begin{aligned}
-\varepsilon(u_{yy},\phi\, u) &= \varepsilon\|u_y\|^2_{\phi}, \\
-\varepsilon_k(u_{xx},\phi\, u) &= \varepsilon_k\|u_x\|^2_{\phi} + \varepsilon_k(u_x,\phi_x\, u) \\
&\geq \varepsilon_k\|u_x\|^2_{\phi} - \varepsilon_k^2\|u_x\|^2_{-\phi_x} - \frac{1}{4}\|u\|^2_{-\phi_x} \geq -\frac{1}{4}\|u\|^2_{-\phi_x}. \\
(u_x,\phi\, u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2_{-\phi_x} + \frac{\phi(1)}{2}\int_{\Gamma_E} u^2\,dy.
\end{aligned}$$

Таким образом соотношение (1.23) доказано. □

Случай условий Дирихле на Γ_E

Рассмотрим вариационную задачу Дирихле: для заданной $f \in \mathbb{L}_2$ найти $u \in \mathbb{H}^1_0$ такую, что

$$a_k(u,v) = (f,v) \quad \forall\ v \in \mathbb{H}^1_0. \tag{1.24}$$

В следующей теореме собраны необходимые в дальнейшем априорные оценки для решения (1.24).

Теорема 1.2. *Пусть функция $\phi \in \mathbb{H}^1_\infty(0,1)$ такая, что*

$$0 \leq -\phi_x \leq H + \phi/\varepsilon_k$$

с некоторой константой $H \in [0, \frac{1}{2}\varepsilon_k^{-1}]$, *и* $\phi(1) = 0$. *Обозначим через* $\|\cdot\|_\phi$ *полу-норму, задаваемую скалярным произведением* $(\phi\cdot,\cdot)$. *Тогда для произвольной* $f \in \mathbb{L}_2(\Omega)$ *решение* $u(x,y)$ *задачи* (1.24) *удовлетворяет оценкам*

$$\begin{aligned}
\|u\| + \sqrt{\varepsilon}\|u_y\| + \sqrt{\varepsilon_k}\|u_x\| + \varepsilon\sqrt{\varepsilon_k}\|u\|_2 &\leq c\|f\|, && (1.25)\\
\varepsilon_k\ \phi(0)\int_{\Gamma_W} u_x^2\,dy + \|u_x\|_\phi^2 &\leq c\,(\|f\|_\phi^2 + H\|f\|^2) && (1.26)\\
\frac{1}{4}\|u\|_{-\phi_x}^2 + \varepsilon\|u_y\|_\phi^2 &\leq c\,\varepsilon_k H\|f\|^2 + (\phi\, f, u), && (1.27)\\
\varepsilon_k\|u_{xx}\|_\phi + \sqrt{\varepsilon\varepsilon_k}\|u_{xy}\|_\phi + \varepsilon\|u_{yy}\|_\phi &\leq c\|f\|_\phi + c\sqrt{H}\|f\|. && (1.28)
\end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство (1.25) можно найти во многих источниках, например, [79]. Докажем оценки (1.26) – (1.28). Поскольку правая часть f из $\mathbb{L}_2(\Omega)$, то теория о регулярности решений [90] обеспечивает принадлежность решения (1.24) u пространству $\mathbb{H}^2(\Omega)$. Следовательно, возможно рассмотреть соотношение

$$-\varepsilon u_{yy} - \varepsilon_k u_{xx} + u_x = f \tag{1.29}$$

и краевые условия из (1.11) в обычном смысле. Умножим (1.29) на ϕu_x и проинтегрируем по частям. Получаем слагаемые:

$$-\varepsilon(u_{yy}, \phi u_x) \ = \ \frac{\varepsilon}{2}\|u_y\|_{-\phi_x}^2 \geq 0\ ,$$

$$\begin{aligned}
-\varepsilon_k(u_{xx}, \phi u_x) &= -\frac{\varepsilon_k}{2}\|u_x\|_{-\phi_x}^2 + \frac{\varepsilon_k}{2}\phi(0)\int_{\Gamma_W} u_x^2\,dy\\
&\geq -\frac{1}{2}((\varepsilon_k\, H + \phi)\, u_x, u_x) + \frac{\varepsilon_k}{2}\phi(0)\int_{\Gamma_W} u_x^2\,dy\\
&\geq -\frac{H\,\varepsilon_k}{2}\|u_x\|^2 - \frac{1}{2}\|u_x\|_\phi^2 + \frac{\varepsilon_k}{2}\phi(0)\int_{\Gamma_W} u_x^2\,dy\ ,\\
(u_x, \phi u_x) &= \|u_x\|_\phi^2\ ,\\
(f, \phi u_x) &\leq \|f\|_\phi\|u_x\|_\phi \leq \|f\|_\phi^2 + \frac{1}{4}\|u_x\|_\phi^2.
\end{aligned}$$

Благодаря (1.25) имеем $H\,\varepsilon_k\|u_x\|^2 \leq c\,H\|f\|^2$, и неравенство (1.26) непосредственно следуют.

Для получения оценки (1.27) умножаем (1.29) на $\phi\, u$ и интегрируем по частям. Получаем слагаемые:

$$
\begin{aligned}
-\varepsilon(u_{yy}, \phi\, u) &= \varepsilon \|u_y\|^2_\phi, \\
-\varepsilon_k(u_{xx}, \phi\, u) &= \varepsilon_k \|u_x\|^2_\phi + \varepsilon_k (u_x, \phi_x\, u) \geq \varepsilon_k \|u_x\|^2_\phi - \varepsilon_k^2 \|u_x\|^2_{-\phi_x} - \frac{1}{4}\|u\|^2_{-\phi_x} \\
&\geq -H\, \varepsilon_k^2 \|u_x\|^2 - \frac{1}{4}\|u\|^2_{-\phi_x} \geq -c\, H\, \varepsilon_k \|f\|^2 - \frac{1}{4}\|u\|^2_{-\phi_x}, \\
(u_x, \phi\, u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2_{-\phi_x}.
\end{aligned}
$$

Суммируя эти неравенства, мы доказываем (1.27).

Для доказательства (1.28) рассмотрим $F = f - u_x$. В силу (1.26) справедлива оценка $\|F\|_\phi \leq c\,(\|f\|_\phi + \sqrt{H}\|f\|)$. Более того,

$$
-\varepsilon u_{yy} - \varepsilon_k u_{xx} = F.
$$

Умножим это равенство на $\sqrt{\phi}$, возведем в квадрат и проинтегрируем по Ω. Получаем

$$
\varepsilon^2 \|u_{yy}\|^2_\phi + 2\varepsilon\varepsilon_k (\phi\, u_{yy}, u_{xx}) + \varepsilon_k^2 \|u_{xx}\|^2_\phi = \|F\|^2_\phi \leq c\,(\|f\|^2_\phi + H\|f\|^2). \quad (1.30)
$$

Заметим, что для произвольной достаточно гладкой функции v равной нулю на границе выполняется

$$
v_x(x,0) = v_x(x,1) = 0,\ x \in (0,1), \quad v_{yy}(0,y) = v_{yy}(1,y) = 0,\ y \in (0,1).
$$

Следовательно,

$$
(\phi\, v_{yy}, v_{xx}) = \|v_{xy}\|^2_\phi - (\phi_x\, v_x, v_{yy}).
$$

Переходя к пределу в $\mathbb{H}^2(\Omega)$, мы заключаем, что для u справедливо

$$
\begin{aligned}
\varepsilon\varepsilon_k (\phi\, u_{yy}, u_{xx}) &= \varepsilon\varepsilon_k \|u_{xy}\|^2_\phi - \varepsilon\varepsilon_k (\phi_x\, u_x, u_{yy}) \\
&\geq \varepsilon\varepsilon_k \|u_{xy}\|^2_\phi - \varepsilon((\phi + \varepsilon_k H)\, |u_x|, |u_{yy}|) \\
&\geq \varepsilon\varepsilon_k \|u_{xy}\|^2_\phi - \frac{\varepsilon^2}{4}\|u_{yy}\|^2_\phi - \|u_x\|^2_\phi - \frac{\varepsilon_k}{2} H(\varepsilon^2 \|u_{yy}\|^2 + \|u_x\|^2).
\end{aligned}
$$

Подставляя полученное неравенство в (1.30) и используя уже доказанную оценку $\|u_x\|^2_\phi \leq c\,(\|f\|^2_\phi + H\|f\|^2)$, условие $\varepsilon_k H \leq \frac{1}{2}$ и (1.25), получаем (1.28). $\square$

Оценка на близость решений задач Дирихле и Неймана.

Нам будет полезна следующая лемма, дающая оценку на разницу решений задач с условиями Дирихле и Неймана на границе вытекания.

Лемма 1.3. *Пусть* $\hat{u}$ *– решение задачи* (1.14), *а* $\hat{u}$ *– решение задачи* (1.24). *В предположениях теоремы 1.2 справедлива оценка*

$$h_k\|\hat{u}_x - u_x\|_\phi^2 + \varepsilon\|\hat{u}_y - u_y\|_\phi^2 \le c\, h_k H\|f\|^2 \tag{1.31}$$

Доказательство. После рассмотрения уравнения для разности $\hat{u}-u$ доказательство проводится аналогично доказательству (1.26) и (1.27) $\square$

Зависимость против потока и оценки вдали от Γ_E

В этом разделе будет изучено влияние против потока правой части f на решение u задач (1.14) и (1.24). В разделе 2.2 то же будет сделано для соответствующей дискретной задачи. Результаты такого плана известны из литературы, где они обычно формулируются в виде оценок на функцию Грина (см., например, [155, 120]), доказательство которых довольно технично; см. также оценки для конечно-разностной схемы 1-ого порядка в [81]. Мы приводим элементарное доказательство необходимых нам результатов, базирующееся на лемме 1.2 и теореме 1.2.

Для $\xi \in [0,1]$ рассмотрим функцию срезки

$$\phi_\xi(x) = \begin{cases} 1 - H_0, & \text{если } x \in [0,\xi], \\ \exp\left(-\frac{x-\xi}{\varepsilon_k}\right) - H_0, & \text{если } x \in (\xi,1], \end{cases}$$

где $H_0 = \exp\left(-\frac{1-\xi}{\varepsilon_k}\right)$. *В случае задачи с условиями Неймана на* Γ_E *считаем* $H_0 = 0$. Для произвольного ξ функция $\phi_\xi(x)$ удовлетворяет предположениям теоремы 1.2 с константой $H = H_0\varepsilon_k^{-1}$ или леммы 1.2 с $H_0 = 0$. Определим области

$$\begin{aligned} \Omega_\xi &= \{(x,y) \in \Omega : x < \xi\}, \\ \Omega_\eta &= \{(x,y) \in \Omega : x > \eta\}, \quad \eta \in (0,1). \end{aligned} \tag{1.32}$$

Непосредственное применение теоремы 1.2 с $\phi = \phi_\xi$ доказывает следующий результат.

Следствие 1.1. *Рассмотрим* $f \in \mathbb{L}_2(\Omega)$ *такую, что* $\operatorname{supp}(f) \in \Omega_\eta$. *Пусть* u *– соответствующее решение* (1.14) *или* (1.24). *Предположим, что* $\eta - \xi \geq 2\,\varepsilon_k\, p\,|\ln h_k|$, $p \geq 0$. *В случае задачи Дирихле потребуем дополнительно* $1 - \eta \geq \varepsilon_k\,|\ln \varepsilon_k|$. *Имеют место оценки*

$$\|u_x\|_{\mathbb{L}_2(\Omega_\xi)} \leq c\, h_k^p \|f\|, \tag{1.33}$$

$$\varepsilon_k \int_{\Gamma_W} u_x^2\, dy \leq c\, h_k^{2p} \|f\|^2, \tag{1.34}$$

$$\sqrt{\varepsilon}\|u_y\|_{\mathbb{L}_2(\Omega_\xi)} \leq c\,\sqrt{\varepsilon_k}\, h_k^p \|f\|. \tag{1.35}$$

Доказательство. Проведем рассуждения для случая задачи (1.24). Второе слагаемое в правой части оценки (1.27) оценим, как

$$\begin{aligned}(\phi f, u) &= (\phi f, u)_{\Omega_\eta} \leq \varepsilon_k \|f\|_\phi^2 + \frac{1}{4\varepsilon_k}(\phi u, u)_{\Omega_\eta} = \varepsilon_k \|f\|_\phi^2 + \frac{1}{4}(-\phi_x u, u)_{\Omega_\eta} \\ &\leq \varepsilon_k \|f\|_\phi^2 + \frac{1}{4}\|u\|_{-\phi_x}^2. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Далее заметим, что $H = \varepsilon_k^{-1} \exp\left(-\frac{1-\xi}{\varepsilon_k}\right) \leq h^{2p}$, так как

$$1 - \xi \geq \varepsilon_k (2p\,|\ln h_k| + |\ln \varepsilon_k|);$$

$\phi(\eta) = h_k^{2p} - H_0$. Теперь оценка

$$\|f\|_\phi^2 = (\phi f, f)_{\Omega_\eta} \leq \phi(\eta) \|f\|_{\Omega_\eta}^2 = h_k^{2p} \|f\|^2,$$

(1.26) и (1.27) влекут результаты в (1.33) - (1.35). □

Следствие 1.2. *Пусть* $f \in \mathbb{L}_2(\Omega)$ *и* $u(x, y)$ *– решение* (1.24), ξ *и* η, *как в следствии 1.1, и* $\omega = \Omega \setminus \Omega_\eta$. *Имеет место оценка*

$$\varepsilon \|u\|_{H^2(\Omega_\xi)} + \left(\varepsilon_k \int_{\Gamma_W} u_x^2\, dy\right)^{\frac{1}{2}} + \|u_x\|_{L_2(\Omega_\xi)} \leq c\,(\|f\|_{L_2(\omega)} + h^p \|f\|) \tag{1.37}$$

Доказательство. Следствие неравенств (1.26), (1.28), $H \leq h_k^{2p}$ и

$$\|f\|_\phi^2 = (\phi f, f)_\omega + (\phi f, f)_{\Omega_\eta} \leq \|f\|_\omega^2 + \phi(\eta)\|f\|_{\Omega_\eta}^2 = \|f\|_\omega^2 + h_k^{2p} \|f\|^2.$$

□

Сделаем очевидное

Замечание 1.1. Оценки (1.33) – (1.37) остаются верны для решения сопряженной задачи к (1.24) с той разницей, что область Ω_ξ должна быть отделена на расстояние $\varepsilon_k\,|\ln \varepsilon_k|$ не от Γ_E, а от Γ_W, а интегралы берутся по Γ_E. □

1.3 Система уравнений с кососимметричной реакцией.

В разделе рассматривается следующая система уравнений

$$
\begin{aligned}
-\varepsilon\Delta\mathbf{u}+\mathbf{w}\times\mathbf{u}+\alpha\mathbf{u}=\mathbf{f} \quad &\text{в} \quad \Omega,\\
\mathbf{u}=0 \quad &\text{на} \quad \partial\Omega,
\end{aligned}
\tag{1.38}
$$

Здесь $\mathbf{u},\mathbf{w}$ и $\mathbf{f}$ – вектор функции, а $\times$ обозначает векторное произведение; $\varepsilon>0,\ \alpha\ge 0$. Система (1.38) возникает как вспомогательная при расчетах уравнений Навье-Стокса, см. введение и раздел 1.6.

Анализ итерационного метода будет проводиться на примере двухмерной задачи. Пусть Ω – выпуклый многоугольник в $\mathbb{R}^2$. Это ограничение на Ω понадобится для получения приемлемых $\mathbb{H}^2$-оценок для решения. Такие оценки упрощают анализ сходимости многосеточного метода. Однако, известно, что многосеточный метод сохраняет высокую скорость сходимости, если предположение о выпуклости области нарушено.

Рассмотрим вариационную постановку (1.38) в двухмерном случае: для заданных $\varepsilon>0,\ \alpha\ge 0,\ w\in\mathbb{L}_\infty(\Omega),\ \mathbf{f}\in\mathbb{L}_2(\Omega)^2$ найти $\mathbf{u}\in\mathbf{H}^1_0(\Omega)$ решение

$$
a(\mathbf{u},\mathbf{v})=(\mathbf{f},\mathbf{v}) \quad \text{для всех } \mathbf{v}\in\mathbf{H}^1_0, \tag{1.39}
$$

где

$$
a(\mathbf{u},\mathbf{v})=\varepsilon(\nabla\mathbf{u},\nabla\mathbf{v})+\alpha(\mathbf{u},\mathbf{v})+(w\times\mathbf{u},\mathbf{v}) \quad \text{для всех } \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{H}^1_0.
$$

Из определение векторного произведения следует $(w\times\mathbf{u},\mathbf{v})=-(w\times\mathbf{v},\mathbf{u})$ для всех $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{L}_2(\Omega)^2$. Поэтому билинейная форма $a(\cdot,\cdot)$ является эллиптической

$$
C\,\varepsilon\|\mathbf{u}\|_1^2\le a(\mathbf{u},\mathbf{u}) \quad \text{для всех } \mathbf{u}\in\mathbf{H}^1_0\,.
$$

Используя $\|w\times\mathbf{u}\|\le\|w\|_\infty\|\mathbf{u}\|$, получаем непрерывность билинейной формы

$$
a(\mathbf{u},\mathbf{v})\le(\varepsilon+\alpha+\|w\|_\infty)\|\mathbf{u}\|_1\|\mathbf{v}\|_1 \quad \text{для всех } \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{H}^1_0. \tag{1.40}
$$

Из леммы Лакса-Мильграма следует существование и единственность решения (1.39).

В целях анализа введем на $\mathbf{H}_0^1$ норму, зависящую от параметра:

$$|||\mathbf{u}|||_\tau = \left(\varepsilon\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}\|^2 + \frac{\tau}{\|w\|_\infty}\|w\times\mathbf{u}\|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \tau \geq 0.$$

Через C_F обозначаем константу из неравенства Фридрихса:

$$\|\varphi\| \leq C_F\|\nabla\varphi\| \quad \text{для всех} \;\; \varphi \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \tag{1.41}$$

Условия на Ω выбраны так, что для $g \in \mathbb{L}_2(\Omega)$ решение ϕ вариационной задачи

$$(\nabla\varphi, \nabla v) = (g, v) \;\; \text{для всех} \quad v \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \tag{1.42}$$

принадлежит $\mathbb{H}^2(\Omega)$ и удовлетворяет оценке $\|\varphi\|_2 \leq C_P\|g\|$.

В процессе дальнейшего анализа задачи (1.39) нам понадобятся следующие три условия. Обозначим $c_w := \operatorname{ess\,inf}_\Omega |w|$.

(A1) Условие (A1) выполнено, если $\alpha + c_w > 0$ и

$$\eta := \frac{\|w\|_\infty}{\alpha + c_w} \leq C.$$

(A2) Условие (A2) выполнено, если

$$w(\mathbf{x}) \geq 0 \;\; \text{п.в. в } \Omega \quad \text{или } w(\mathbf{x}) \leq 0 \;\; \text{п.в. в } \Omega.$$

(A3) Условие (A3) выполнено, если $\nabla w \in \mathbb{L}_q(\Omega)^2$ для некоторого $q > 2$ и

$$\|\nabla w\|_{L_q} \leq C\,\|w\|_\infty.$$

Если w – функция из конечно-элементного пространства, то C предполагается независимым от h.

В ходе дальнейшего анализа мы будем явно указывать, которые из условий (A1)–(A3) предполагаются выполненными.

Замечание 1.2. (A2) выполнено, к примеру, если w происходит из учета сил Кориолиса при расчетах движений жидкости (см., например, [69]). (A1) выполнено, если w непрерывна и не имеет нулей в Ω. (A1) также выполнено, если благодаря дискретизации по времени уравнений Навье-Стокса имеет место оценка снизу на α: $0 < \alpha_{\min} \leq \alpha$. $\square$

Заметим, что $(|w|\mathbf{u},\mathbf{u}) = (|w|\times\mathbf{u}, 1\times\mathbf{u}) \geq 0$. Поэтому для произвольной $\mathbf{u}\in\mathbf{L}_2(\Omega)$

$$c_w\|\mathbf{u}\|^2 \leq (|w|\times\mathbf{u}, 1\times\mathbf{u}). \tag{1.43}$$

Используя $(|w|\times\mathbf{u}, 1\times\mathbf{u}) \leq \||w|\times\mathbf{u}\|\|1\times\mathbf{u}\| = \|w\times\mathbf{u}\|\|\mathbf{u}\|$, получаем

$$(\alpha + c_w)\|\mathbf{u}\| \leq \|w\times\mathbf{u}\| + \alpha\|\mathbf{u}\|. \tag{1.44}$$

Неравенства (1.43) и (1.44) понадобятся далее.

1.3.1 Априорные оценки.

В этом разделе будут доказаны некоторые априорные оценки для решений (Теорема 1.3) и оценка непрерывности для билинейной формы (Лемма 1.4). В последней, в отличии от (1.40), будет использована норма $|||\cdot|||_\tau$ зависящая от параметра. Новая оценка нерерывности будет использована для получения оценок сходимости метода конечных элементов в разделе 2.3.

Теорема 1.3. *Пусть* $\mathbf{f}\in\mathbf{L}_2(\Omega)$, *и* $\mathbf{u}\in\mathbf{H}_0^1$ *– решение задачи* (1.39). *Тогда* $\mathbf{u}$ *принадлежит* $\mathbf{H}^2(\Omega)$, *и справедливы оценки*

$$\begin{aligned} \varepsilon\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}\|^2 &\leq c(\varepsilon,\alpha)\|\mathbf{f}\|^2\ , &(1.45)\\ \varepsilon^2\|\mathbf{u}\|_2^2 + C_P^2\|w\times\mathbf{u}\|^2 &\leq 2C_P^2\big(4 + 2c(\varepsilon,\alpha)^2\|w\|_\infty^2\big)\|\mathbf{f}\|^2 &(1.46)\end{aligned}$$

с константой $c(\varepsilon,\alpha) = \frac{C_F^2}{\varepsilon + C_F^2\alpha}$. *Если дополнительно выполнены условия* (A1) *и* (A3), *то*

$$\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|_2^2 + \varepsilon(\|w\|_\infty + \alpha)\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \alpha^2\|\mathbf{u}\|^2 + \|w\times\mathbf{u}\|^2 \leq C\|\mathbf{f}\|^2 \tag{1.47}$$

с константой C, *не зависящей от* $\mathbf{f}$, ε, α, *и* w.

Доказательство. Положим $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f} - w\times\mathbf{u} - \alpha\mathbf{u}$. Заметим, что $\tilde{\mathbf{f}}\in\mathbf{L}_2(\Omega)$ и $(\nabla\mathbf{u},\nabla\mathbf{v}) = -\frac{1}{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{f}},\mathbf{v})$ для всех $\mathbf{v}\in\mathbf{H}_0^1$. Следовательно, благодаря оценке (1.42) для задачи Пуассона имеем $\mathbf{u}\in\mathbf{H}^2(\Omega)$ и

$$\|\mathbf{u}\|_2 \leq \frac{C_P}{\varepsilon}\|\tilde{\mathbf{f}}\| \leq \frac{C_P}{\varepsilon}(\|\mathbf{f}\| + \|w\times\mathbf{u}\| + \alpha\|\mathbf{u}\|). \tag{1.48}$$

Заметим, что $\|\mathbf{u}\|^2 = c(\varepsilon,\alpha)(\varepsilon C_F^{-2} + \alpha)\|\mathbf{u}\|^2 \leq c(\varepsilon,\alpha)(\varepsilon\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}\|^2)$. Используя это и выбирая $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ в (1.39), получаем

$$\varepsilon\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}\|^2 \leq \|\mathbf{f}\|\|\mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{f}\|c(\varepsilon,\alpha)^{\frac{1}{2}}(\varepsilon\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}\|^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.49}$$

Таким образом, оценка (1.45) выполняется. Используя (1.45), также имеем

$$\|w\times\mathbf{u}\|^2 \le \|w\|_\infty^2\|\mathbf{u}\|^2 \le c(\varepsilon,\alpha)\|w\|_\infty^2(\varepsilon\|\nabla\mathbf{u}\|^2+\alpha\|\mathbf{u}\|^2) \le c(\varepsilon,\alpha)^2\|w\|_\infty^2\|\mathbf{f}\|^2. \tag{1.50}$$

Использование этой оценки вместе с (1.48), и $\alpha\|\mathbf{u}\| \le \|\mathbf{f}\|$, дает

$$\begin{aligned}\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|_2^2 + C_P^2\|w\times\mathbf{u}\|^2 &\le C_P^2(\|\mathbf{f}\| + c(\varepsilon,\alpha)\|w\|_\infty\|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{f}\|)^2 \\ &\quad + C_P^2 c(\varepsilon,\alpha)^2\|w\|_\infty^2\|\mathbf{f}\|^2 \\ &= C_P^2((2+c(\varepsilon,\alpha)\|w\|_\infty)^2 + c(\varepsilon,\alpha)^2\|w\|_\infty^2)\|\mathbf{f}\|^2 \\ &\le 2C_P^2(3+2c(\varepsilon,\alpha)^2\|w\|_\infty^2)\|\mathbf{f}\|^2.\end{aligned}$$

Оценка (1.46) доказана.

Теперь предположим выполнение условий (A1) и (A3). Так как $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$ и $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$, уравнения (1.39) выполняются в обычном смысле, следовательно, справедливо равенство $\|-\varepsilon\Delta\mathbf{u} + \alpha\mathbf{u} + w\times\mathbf{u}\| = \|\mathbf{f}\|$. Возведем это равенство в квадрат и используем, что $(\mathbf{u}, w\times\mathbf{u}) = 0$. Как результат имеем

$$\varepsilon^2\|\Delta\mathbf{u}\|^2+2\varepsilon\alpha\|\nabla\mathbf{u}\|^2+\alpha^2\|\mathbf{u}\|^2+2\varepsilon(\nabla\mathbf{u},\nabla(w\times\mathbf{u}))+\|w\times\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{f}\|^2. \tag{1.51}$$

Простые вычисления приводят к соотношениям

$$(\nabla\mathbf{u},\nabla(w\times\mathbf{u})) = -(\nabla u_1, u_2\nabla w) + (\nabla u_2, u_1\nabla w)$$

и

$$|(\nabla\mathbf{u},\nabla(w\times\mathbf{u}))| \le \|\nabla\mathbf{u}\|(\|u_1\nabla w\|^2 + \|u_2\nabla w\|^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.52}$$

Выберем q из условия (A3) и положим $\tilde{q} = \frac{1}{2}q$. Неравенство Гёльдера с показателями $\frac{1}{p} + \frac{1}{\tilde{q}} = 1$ и вложение $\mathbb{H}_1(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}_{2p}(\Omega)$ влечет для $i = 1,2$ оценки

$$\begin{aligned}\|u_i\nabla w\| &= (u_i^2, \nabla w\cdot\nabla w)^{\frac{1}{2}} \le \|u_i\|_{L_{2p}}\|\nabla w\cdot\nabla w\|_{L_{\tilde{q}}}^{\frac{1}{2}} \\ &\le C\|\nabla u_i\|\|\nabla w\|_{L_q} \le C\|\nabla u_i\|\|w\|_\infty.\end{aligned} \tag{1.53}$$

В последнем неравенстве в (1.53) мы использовали (A3). Комбинация (1.52) и (1.53) даёт

$$2\varepsilon|(\nabla\mathbf{u},\nabla(w\times\mathbf{u}))| \le \bar{c}\,\varepsilon\|w\|_\infty\,\|\nabla\mathbf{u}\|^2.$$

С помощью этого результата и (1.51) получаем

$$\varepsilon^2\|\Delta\mathbf{u}\|^2+2\varepsilon\alpha\|\nabla\mathbf{u}\|^2+\alpha^2\|\mathbf{u}\|^2+\|w\times\mathbf{u}\|^2\le\|\mathbf{f}\|^2+\bar c\,\varepsilon\|w\|_\infty\,\|\nabla\mathbf{u}\|^2. \quad (1.54)$$

Из (1.39) и (1.44) следует, что $\delta>0$,

$$\begin{aligned}\varepsilon\|\nabla\mathbf{u}\|^2\le\|\mathbf{f}\|\,\|\mathbf{u}\|&=\frac{1}{\sqrt{\delta}(\alpha+c_w)}\|\mathbf{f}\|\sqrt{\delta}(\alpha+c_w)\|\mathbf{u}\|\\&\le\frac{\|\mathbf{f}\|^2}{2\delta(\alpha+c_w)^2}+\delta(\alpha^2\|\mathbf{u}\|^2+\|w\times\mathbf{u}\|^2).\end{aligned} \quad (1.55)$$

Если мы положим $\delta=(4\,\bar c\,\|w\|_\infty)^{-1}$ и умножим (1.55) на $\frac{1}{2\delta}$, то это приведет к неравенству

$$2\bar c\varepsilon\|w\|_\infty\|\nabla\mathbf{u}\|^2\le\bar c^2\frac{\|w\|_\infty^2}{(\alpha+c_w)^2}\|\mathbf{f}\|^2+\frac12\alpha^2\|\mathbf{u}\|^2+\frac12\|w\times\mathbf{u}\|^2\ .$$

Складывая это неравенство и (1.54), имеем

$$\begin{aligned}&\varepsilon^2\|\Delta\mathbf{u}\|^2+\varepsilon(\bar c\|w\|_\infty+2\alpha)\|\nabla\mathbf{u}\|^2+\alpha^2\|\mathbf{u}\|^2+\|w\times\mathbf{u}\|^2\\&\le\Big(1+\bar c^2\frac{\|w\|_\infty^2}{(\alpha+c_w)^2}\Big)\|\mathbf{f}\|^2+\frac12\alpha^2\|\mathbf{u}\|^2+\frac12\|w\times\mathbf{u}\|^2.\end{aligned}$$

Использование предположения (A1), т.е., $\frac{\|w\|_\infty^2}{(\alpha+c_w)^2}=\eta^2\le C$ и $\|\mathbf{u}\|_2\le C_P\|\Delta\mathbf{u}\|$ даёт результат в (1.47). $\square$

Лемма 1.4. *Пусть $\tau>0$. Имеет место оценка*

$$a(\mathbf{v},\mathbf{u})\le C_\tau\,|||\mathbf{v}|||_\tau\Big(\varepsilon\|\nabla\mathbf{u}\|^2+(\alpha+\|w\|_\infty)\|\mathbf{u}\|^2\Big)^{\frac12}\qquad\forall\ \mathbf{u},\mathbf{u}\in\mathbf{H}_0^1. \quad (1.56)$$

Если выполняется условие (A1), *то*

$$a(\mathbf{v},\mathbf{u})\le C_\tau\,|||\mathbf{v}|||_\tau\,|||\mathbf{u}|||_\tau\qquad\forall\ \mathbf{v},\mathbf{u}\in\mathbf{H}_0^1. \quad (1.57)$$

Константы C_τ могут зависеть от τ.

Доказательство. Для произвольных $\mathbf{v},\mathbf{u}\in\mathbf{H}_0^1$ имеем

$$\begin{aligned}a(\mathbf{v},\mathbf{u})&=\varepsilon(\nabla\mathbf{v},\nabla\mathbf{u})+\alpha(\mathbf{v},\mathbf{u})+(w\times\mathbf{v},\mathbf{u})\\&\le\varepsilon\|\nabla\mathbf{v}\|\|\nabla\mathbf{u}\|+\alpha\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{u}\|+\|w\times\mathbf{v}\|\|\mathbf{u}\|.\end{aligned} \quad (1.58)$$

Определим $\kappa := \tau\|w\|_\infty^{-1}$. Используем далее равенство $\|w \times \mathbf{v}\|\|\mathbf{u}\| = (\kappa^{\frac{1}{2}}\|w \times \mathbf{v}\|)(\kappa^{-\frac{1}{2}}\|\mathbf{u}\|)$ и применим к (1.58) неравенство Коши-Шварца, получаем

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}, \mathbf{u}) &\leq \Big(\varepsilon\|\nabla\mathbf{v}\|^2 + \alpha\|\mathbf{v}\|^2 + \kappa\|w \times \mathbf{v}\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\varepsilon\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{\kappa}\|\mathbf{u}\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_\tau |||\mathbf{v}|||_\tau \Big(\varepsilon\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + (\alpha + \|w\|_\infty)\|\mathbf{u}\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{1.59}$$

Мы доказали (1.56). Если условие (A1) выполняется, то благодаря (1.44) получаем

$$\begin{aligned} \|w \times \mathbf{v}\|\,\|\mathbf{u}\| &\leq \|w \times \mathbf{v}\| \frac{1}{\alpha + c_w}(\alpha\|\mathbf{u}\| + \|w \times \mathbf{u}\|) \\ &\leq \kappa^{\frac{1}{2}}\|w \times \mathbf{v}\| \frac{\kappa^{-\frac{1}{2}}(\alpha^{\frac{1}{2}} + \kappa^{-\frac{1}{2}})}{\alpha + c_w}(\alpha^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{u}\| + \kappa^{\frac{1}{2}}\|w \times \mathbf{u}\|) \\ &\leq C_\tau(\kappa^{\frac{1}{2}}\|w \times \mathbf{v}\|)(\alpha\|\mathbf{u}\|^2 + \kappa\|w \times \mathbf{u}\|^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{1.60}$$

Получая последнее неравенство из (1.60), мы использовали условие (A1):

$$\frac{\kappa^{-\frac{1}{2}}(\alpha^{\frac{1}{2}} + \kappa^{-\frac{1}{2}})}{\alpha + c_w} \leq \frac{\frac{3}{2}\kappa^{-1} + \frac{1}{2}\alpha}{\alpha + c_w} \leq \frac{3}{2\tau}\eta + \frac{\alpha}{2(\alpha + c_w)} \leq C_\tau.$$

Из оценок (1.58), (1.60) и неравенства Коши-Шварца мы получаем (1.57). $\square$

1.4 Обобщённая система Стокса.

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, с липшицивой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим в Ω систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} -\varepsilon\Delta\mathbf{u} + \alpha\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, \\ -\operatorname{div}\mathbf{u} &= g, \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} &= 0, \\ \textstyle\int_\Omega p\,dx &= 0, \end{aligned} \tag{1.61}$$

здесь $\mathbf{u} = (u_1(x), \ldots, u_n(x))$ – поле скоростей, $p = p(x)$ – функция давления, $\mathbf{f} = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ – поле внешних сил, $\varepsilon = const \geq 0$ – вещественный параметр. В частном случае несжимаемой жидкости $g = 0$, в общем случае для разрешимости системы накладывается условие $\int_\Omega g\ dx = 0$. Если $\alpha = 0$, то (1.61) – система Стокса. При расчетах нестационарных течений типичной является зависимость $\alpha \sim (\delta t)^{-1}$, где δt – шаг по времени. Мы можем масштабировать 1-ое уравнение системы так, что $\alpha = 1$. В этом случае, как правило, $\varepsilon \ll 1$. Таким образом, для простоты можем считать, что $\alpha \in \{0; 1\}$, $\varepsilon > 0$.

Далее используем обозначение:

$$\mathbb{L}_2^0 := \{\, f \in \mathbb{L}_2(\Omega) \mid \int_\Omega f(x)\, dx = 0 \,\}.$$

Для вывода слабой формулировки задачи умножим первое уравнения в (1.61) на произвольную $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Интегрируем равенство по Ω, используя формулы интегрирования по частям. Второе уравнение в (1.61) скалярно умножаем на $q \in \mathbb{L}_2^0(\Omega)$. Назовем слабым решение задачи функции $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ и $p \in \mathbb{L}_2^0(\Omega)$, удовлетворяющие соотношениям

$$\varepsilon(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \operatorname{div}\mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{1.62}$$

$$-(\operatorname{div}\mathbf{u}, q) = (g, q) \quad \forall\, q \in \mathbb{L}_2^0(\Omega). \tag{1.63}$$

Бывает удобнее использовать эквивалентное определение слабого решения, как пары $\{\mathbf{u}, p\} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbb{L}_2^0(\Omega)$, удовлетворяющей

$$a(\mathbf{u}, p\,; \mathbf{v}, q) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - (g, q) \qquad \forall\, \{\mathbf{v}, q\} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times \mathbb{L}_2^0(\Omega), \tag{1.64}$$

с положительной, но несимметричной, билинейной формой $a(\cdot\,;\cdot)$:

$$a(\mathbf{u}, p\,;\, \mathbf{v}, q) := \varepsilon(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \operatorname{div}\mathbf{v}) + (\operatorname{div}\mathbf{u}, q).$$

Дополнением Шура (оператором Шура) системы (1.61) называется оператор

$$A_0(\alpha) = \operatorname{div}(\varepsilon\Delta - \alpha I)_0^{-1}\nabla,$$

где $(\varepsilon\Delta - \alpha I)_0^{-1} : \mathbf{H}^{-1} \to \mathbf{H}_0^1$ – оператор Грина для векторного уравнения реакции-диффузии: запись $(\varepsilon\Delta - \alpha I)_0^{-1}\mathbf{f}$ обозначает функцию $\mathbf{u}$ такую, что $\varepsilon\Delta\mathbf{u} - \alpha\mathbf{u} = \mathbf{f}$, $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$. При достаточно общих предположениях на Ω $A_0(\alpha)$ является ограниченным, линейным, самосопряженным, положительно определенным оператором на $\mathbb{L}_2^0$.

Функция давления p из (1.61) удовлетворяет уравнению:

$$A_0 p = g + \operatorname{div}(\varepsilon\Delta - \alpha I)_0^{-1}\mathbf{f}. \qquad (1.65)$$

Замечательным является то, что уравнение (1.65) *не требует* каких-либо дополнительных граничных условий или предположений о гладкости для функции давления, в отличии от уравнения Пуассона для p, которое получается в результате формального применения оператора div к первому соотношению системы (1.61) (см., например, [87], [86]). Уравнение (1.65) может служить исходным при построении численных методов для решения системы (1.61), а знание спектральных и других свойств оператора A_0 и (или) его дискретного аналога, как станет ясно в дальнейшем, является ключевым при анализе различных итерационных методов численного решения задачи Стокса.

1.4.1 Априорные оценки.

Для $\mathbf{u}$ оценка непосредственно следует из (1.62), если взять $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ и использовать (1.63) с $q = p$:

$$\varepsilon\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}\|^2 = (\mathbf{f}, \mathbf{u}) + (p, g). \qquad (1.66)$$

Далее, благодаря неравенству Фридрихса имеем:

$$\|\mathbf{u}\|^2 \le \frac{C_F^2}{(\varepsilon + C_F^2\alpha)}(\varepsilon\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}\|^2).$$

Используя неравенство Коши, из (1.66) получаем:

$$\varepsilon\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}\|^2 \le \frac{C_F^2}{(\varepsilon + C_F^2\alpha)}\|\mathbf{f}\|^2 + \frac{1}{\delta}\|p\|^2 + \delta\|g\|^2 \quad \forall\, \delta > 0. \qquad (1.67)$$

Оценку для давления можно получить благодаря неравенству Нечаса:

$$c_0\|q\| \le \|\nabla q\|_{\mathbb{H}^{-1}} \qquad \forall\, q \in \mathbb{L}_2^0.$$

с положительной константой c_0. По определению функционала ∇q на $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ неравенство Нечаса может быть переписано:

$$c_0\|q\| \le \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{H}_0^1} \frac{(q, \operatorname{div}\mathbf{v})}{\|\nabla\mathbf{v}\|} \qquad \forall\, q \in \mathbb{L}_2^0. \qquad (1.68)$$

Теперь оценка для давления следует из (1.62):

$$\begin{aligned} c_0\|p\| &\le \sup_{\mathbf{v}} \frac{(p, \operatorname{div}\mathbf{v})}{\|\nabla\mathbf{v}\|} = \sup_{\mathbf{v}} \frac{\varepsilon(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathbf{f}, \mathbf{v})}{\|\nabla\mathbf{v}\|} \\ &\le \varepsilon\|\nabla\mathbf{u}\| + C_F\alpha\|\mathbf{u}\| + C_F\|\mathbf{f}\|. \end{aligned}$$

Оценка для решения получается из (1.67) с подходящей δ: ($\delta = \frac{6(\varepsilon + C_F^2\alpha)}{c_0^2}$)

$$\varepsilon\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}\|^2 \le \frac{3C_F^2}{(\varepsilon + C_F^2\alpha)}\|\mathbf{f}\|^2 + \frac{12(\varepsilon + C_F^2\alpha)}{c_0^2}\|g\|^2, \quad (1.69)$$

$$\|p\|^2 \le \frac{12C_F^2}{c_0^2}\|\mathbf{f}\|^2 + \frac{36(\varepsilon + C_F^2\alpha)^2}{c_0^4}\|g\|^2. \quad (1.70)$$

Для существования и единственности решения системы (1.62) - (1.63) достаточно потребовать $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$, $g \in \mathbb{L}_2^0(\Omega)$. Более специальные оценки для решения будут получены в § 1.4.5.

Докажем оценку на производные решений более высокого порядка.

Лемма 1.5. *Предположим, что $\partial\Omega \in C^2$, либо Ω – выпуклая область. Пусть $g = 0$ в (1.63), $\alpha \in \{0, 1\}$. Тогда выполняется оценка*

$$\varepsilon\|\mathbf{u}\|_{H^2} + \|p\|_{H^1} \le c(\Omega)\|\mathbf{f}\|. \quad (1.71)$$

Константа $c(\Omega)$ не зависит от ε.

Доказательство. Если $\alpha = 1$, из (1.66) получаем $\|\mathbf{u}\| \le \|\mathbf{f}\|$. Положим $\tilde{\mathbf{f}} = (\mathbf{f} - \mathbf{u})$, тогда $\tilde{\mathbf{u}} = \varepsilon\mathbf{u}$ является решением задачи Стокса:

$$\begin{aligned} -\Delta\tilde{\mathbf{u}} + \nabla p &= \tilde{\mathbf{f}}, \\ \operatorname{div}\tilde{\mathbf{u}} &= 0, \\ \tilde{\mathbf{u}}|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned}$$

Так как $\tilde{\mathbf{f}} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$ и благодаря предположениям на Ω, результаты о регулярности решения уравнения Стокса (см, [84], [73]) следует, что $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ и

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{H^2} + \|p\|_{H^1} \le c\|\tilde{\mathbf{f}}\| \le 2c\|\mathbf{f}\|.$$

$\square$

В случае $\partial\Omega \in C^2$ оценка (1.71) может быть обобщена на случай ненулевой $g \in \mathbb{H}^1(\Omega)$, см. например [84]. В случае кусочно-гладкой границы необходимы дополнительные условия на поведение (на стремление к нулю) функции g в окрестностях угловых точек и ребер (см. [73]). Если эти условия выполняются, то общая оценка примет следующий вид

$$\varepsilon\|\mathbf{u}\|_{H^2} + \|p\|_{H^1} \le c\|\mathbf{f}\| + \varepsilon\|g\|_{H^1}. \tag{1.72}$$

1.4.2 Краевые условия на вихрь и задача для давления.

Этот раздел носит вспомогательный характер. В нем будет изучена обобщенная задача Стокса с краевыми условиями специального вида. Будет доказан ряд важных утверждений для этой задачи, которые понадобятся в дальнейшем для анализа численных методов для системы (1.61). Начнем с подраздела, в котором даются недостающие определения и собраны технические результаты.

Определения и вспомогательные утверждения.

Нам понадобятся функциональные пространства:

$$\mathbf{H}(\mathrm{div}\,) \equiv \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega), \mathrm{div}\,\mathbf{u} \in \mathbb{L}_2(\Omega)\}\,,$$

с нормой

$$||\mathbf{u}||_{\mathbf{H}(\mathrm{div}\,)} = (||\mathbf{u}||^2 + ||\mathrm{div}\,\mathbf{u}||^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathbf{H}(\mathrm{curl}\,) \equiv \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega), \mathrm{curl}\,\mathbf{u} \in \mathbb{L}_2(\Omega)^r\}\,,$$

где $r = 1$ для $n = 2$ и $r = 3$ для $n = 3$, с нормой

$$||\mathbf{u}||_{\mathbf{H}(\mathrm{curl}\,)} = (||\mathbf{u}||^2 + ||\mathrm{curl}\,\mathbf{u}||^2)^{\frac{1}{2}},$$

и $\mathbf{H}_0(\mathrm{div}\,) \equiv \overline{(C_0^\infty(\Omega)^n)}^{\mathbf{H}(\mathrm{div}\,)}$ – замыкание относительно нормы $\mathbf{H}(\mathrm{div}\,)$ множества $C_0^\infty(\Omega)^n$ финитных вектор-функций с носителем в Ω.

Через $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ обозначим пространство следов функций из $\mathbf{H}^1(\Omega)$ на $\partial\Omega$ с нормой

$$||\mu||_{\frac{1}{2}} = \inf_{\mathbf{v}\in\mathbf{H}^1(\Omega):\ \mathbf{v}=\mu \text{ на } \partial\Omega} ||\mathbf{v}||_1, \quad \mu \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega),$$

а через $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ сопряженное пространство к $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Нам понадобятся следующие утверждения относительно определенных выше пространств.

Лемма 1.6 ([84]). *Отображения* $\gamma_n : \mathbf{u} \to \mathbf{u}{\cdot}\mathbf{n}|_{\partial\Omega}$ *и* $\gamma_\tau : \mathbf{u} \to \mathbf{u}{\cdot}\tau|_{\partial\Omega}$ $(n = 2)$, $\gamma_\tau : \mathbf{u} \to \mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega}$ $(n = 3)$ *определенные на* $C^\infty(\bar{\Omega})^n$ *могут быть продолжены по непрерывности до непрерывных линейных отображений* γ_n *из* $\mathbf{H}(\mathrm{div}\,)$ *в* $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ *и* γ_τ *из* $\mathbf{H}(\mathrm{curl}\,)$ *в* $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^r$, $r = 1$ *для* $n = 2$, $r = 3$ *для* $n = 3$, *причем*

$$\mathbf{H}_0(\mathrm{div}\,) = \ker(\gamma_n) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathrm{div}\,) :\ \mathbf{u}{\cdot}\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Замечание 1.3 ([84]). Более того, выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}{\cdot}\mathbf{n}\|_{-\frac{1}{2}} \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|, \\ &\|\gamma_\tau \mathbf{u}\|_{-\frac{1}{2}} \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathrm{curl}\,\mathbf{u}\|. \end{aligned} \tag{1.73}$$

Определим далее пространства

$$\mathbf{U} \equiv \mathbf{H}_0(\mathrm{div}\,) \cap \mathbf{H}(\mathrm{curl}\,) \ \text{ и } \ \mathbf{U}^0 \equiv \{\mathbf{u} \in \mathbf{U} :\ \mathrm{curl}\,\mathbf{u} = 0\},$$

со скалярным произведением

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{U}} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L_2} + (\mathrm{div}\,\mathbf{u}, \mathrm{div}\,\mathbf{v})_{L_2} + (\mathrm{curl}\,\mathbf{u}, \mathrm{curl}\,\mathbf{v})_{L_2} \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{U}$$

и соответствующей нормой $||\mathbf{u}||_{\mathbf{U}} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{U}}^{\frac{1}{2}}$. Справедлива

Лемма 1.7. *Пространство* $\mathbf{U}$ *является гильбертовым и*

$$||\mathbf{u}||_{\mathbf{U}} \cong ||\mathrm{div}\,\mathbf{u}|| + ||\mathrm{curl}\,\mathbf{u}||, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{U}. \tag{1.74}$$

Доказательство. Пространство $\mathbf{U}$ гильбертово, так как пространства $\mathbf{H}_0(\mathrm{div}\,)$ и $\mathbf{H}(\mathrm{curl}\,)$ гильбертовы [84]. Эквивалентность двух нормировок в (1.74) следует из оценки $||\mathbf{u}|| \le c(\Omega)(||\mathrm{div}\,\mathbf{u}|| + ||\mathrm{curl}\,\mathbf{u}||)$ для $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ (лемма 3.6 [84]). □

Замечание 1.4 ([84] лемма 2.5). Если $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ и $\gamma_\tau \mathbf{u} = 0$, то $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1$.

Лемма 1.8. *Отображение* $\mathrm{div}\, : \mathbf{U}^0 \to \mathbb{L}_2^0$ *является изоморфизмом.*

Доказательство. Так как $\mathbf{U}^0$ является подпространством $\mathbf{U}$, то в силу (1.74) $Ker(\mathrm{div}\,) = \{0\}$. Пусть ϕ – произвольная функция из $\mathbb{L}_2^0$, рассмотрим задачу Неймана

$$\begin{array}{rcc} \Delta\psi = \phi & \text{в} & \Omega \\ \partial\psi/\partial\mathbf{n} = 0 & \text{на} & \partial\Omega \end{array}$$

Решение данной задачи из $\mathbb{H}^1(\Omega)\cap\mathbb{L}_2^0$ существует, единственно и $||\psi||_{W_2^1} \leq c||\phi||$. Пусть $\mathbf{u} = \nabla\psi$, тогда $\mathbf{u} \in \mathbf{U}^0$, $\mathrm{div}\,\mathbf{u} = \phi$ и $||\mathbf{u}||_{\mathbf{U}} \leq c_1||\phi||$. $\square$

Через $\mathbf{U}^{-1}$ обозначим пространство ограниченных линейных функционалов на $\mathbf{U}$ с нормой

$$||\mathbf{f}||_{-1} \equiv \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{U}} \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle}{||\mathbf{v}||_{\mathbf{U}}}, \quad \mathbf{f} \in \mathbf{U}^{-1},$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle :\ \mathbf{U}^{-1} \times \mathbf{U} \to \mathbb{R}$, причем $\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{L_2}$ для $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2,\ \mathbf{v} \in \mathbf{U}$.

Для $p \in \mathbb{L}_2^0$, мы можем рассмотреть ∇p как элемент $\mathbf{U}^{-1}$. Действительно, полагая по определению $\langle \nabla p, \mathbf{u}\rangle = -(p, \mathrm{div}\,\mathbf{u})$ для произвольных $p \in \mathbb{L}_2^0,\ \mathbf{u} \in \mathbf{U}$, имеем $\langle \nabla p, \mathbf{u}\rangle \leq ||p||||\mathrm{div}\,\mathbf{u}|| \leq ||p||||\mathbf{u}||_{\mathbf{U}}$, следовательно, выполняется $||\nabla p||_{-1} \leq ||p||$.

Задача с граничными условиями на вихрь.

Рассмотрим обобщённую систему Стокса с другими краевыми условиями

$$\begin{aligned} &-\varepsilon\Delta\mathbf{u} + \alpha\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \\ &-\mathrm{div}\,\mathbf{u} = g, \\ &\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathcal{R}\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned} \tag{1.75}$$

где

$$\mathcal{R}\mathbf{u} = \begin{cases} \mathrm{curl}\,\mathbf{u}, & n = 2; \\ (\mathrm{curl}\,\mathbf{u}) \times \mathbf{n}, & n = 3. \end{cases}$$

Слабая постановка задачи состоит в нахождении пары $\{\mathbf{u}, p\}$ из $\mathbf{U} \times \mathbb{L}_2^0$ при заданных $\{\mathbf{f}, g\} \in \mathbf{U}^{-1} \times \mathbb{L}_2^0$ такой, что

$$\begin{aligned} &\varepsilon(\mathrm{div}\,\mathbf{u}, \mathrm{div}\,\mathbf{v}) + \varepsilon(\mathrm{curl}\,\mathbf{u}, \mathrm{curl}\,\mathbf{v}) + \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \mathrm{div}\,\mathbf{v}) =< \mathbf{f}, \mathbf{v} >, \\ &-(\mathrm{div}\,\mathbf{u}, q) = (g, q), \qquad\qquad \forall\mathbf{v} \in \mathbf{U},\ q \in \mathbb{L}_2^0. \end{aligned} \tag{1.76}$$

Лемма 1.9. *Задача* (1.76) *имеет единственное решение из* $\mathbf{U} \times \mathbb{L}_2^0$.

Доказательство. Коэрцитивность билинейной формы $\varepsilon(\operatorname{div}\mathbf{u}, \operatorname{div}\mathbf{v}) + \varepsilon(\operatorname{curl}\mathbf{u}, \operatorname{curl}\mathbf{v}) + \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ на $\mathbf{U}$ следует из (1.74), как при $\alpha = 1$, так и при $\alpha = 0$. Коэрцитивность билинейной формы на пространстве соленоидальных функций из $\mathbf{U}$ следует из коэрцитивности формы на $\mathbf{U}$. Для билинейной формы $b(\mathbf{u}, p) = (\operatorname{div}\mathbf{u}, p)$, $b(\cdot,\cdot) : \mathbf{U} \times \mathbb{L}_2^0 \to \mathbb{R}$, $infsup$ - условие эквивалентно неравенству

$$||p|| \leq c(\Omega)||\nabla p||_{\mathbf{U}^{-1}}, \quad p \in \mathbb{L}_2^0.$$

Для доказательства этого неравенства заметим, что для произвольной $p \in \mathbb{L}_2^0$ имеет место цепочка неравенств

$$||p|| \leq c_0 \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{H}_0^1} \frac{(p, \operatorname{div}\mathbf{v})}{||\nabla\mathbf{v}||} \leq \sqrt{2}c_0 \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{H}_0^1} \frac{(p, \operatorname{div}\mathbf{v})}{||\operatorname{div}\mathbf{v}|| + ||\operatorname{curl}\mathbf{v}||}$$

$$\leq \sqrt{2}c_0 \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{U}} \frac{(p, \operatorname{div}\mathbf{v})}{||\operatorname{div}\mathbf{v}|| + ||\operatorname{curl}\mathbf{v}||} \leq c_1 \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{U}} \frac{(p, \operatorname{div}\mathbf{v})}{||\mathbf{v}||_{\mathbf{U}}} \equiv c(\Omega)||\nabla p||_{\mathbf{U}^{-1}}.$$

Первое неравенство из цепочки – это неравенство Нечаса (1.68), далее мы пользовались очевидным равенством $||\nabla\mathbf{v}||^2 = ||\operatorname{div}\mathbf{v}||^2 + ||\operatorname{curl}\mathbf{v}||^2$, для $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1$, вложением $\mathbf{H}_0^1 \subset \mathbf{U}$ и (1.74). Теперь следствие 4.1 из [84] влечет утверждение леммы. □

Через $A_\nu(\alpha)$ обозначим дополнение по Шуру системы (1.75):

$$A_\nu(\alpha) \equiv \operatorname{div}(\varepsilon\Delta - \alpha\, I)_\nu^{-1}\nabla,$$

где $(\varepsilon\Delta - \alpha\, I)_\nu^{-1} : \mathbf{U}^{-1} \to \mathbf{U}$ обозначает оператор Грина задачи

$$\varepsilon\Delta\mathbf{u} - \alpha\mathbf{u} = \mathbf{f},$$
$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathcal{R}\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0,$$

и ∇ действует из $\mathbb{L}_2^0$ в $\mathbf{U}^{-1}$, т.е., $\mathbf{w} = (\varepsilon\Delta - \alpha\, I)_\nu^{-1}\nabla p$ и $\mathbf{w} \in \mathbf{U}$ – решение задачи

$$\varepsilon(\operatorname{div}\mathbf{w}, \operatorname{div}\mathbf{v}) + \varepsilon(\operatorname{curl}\mathbf{w}, \operatorname{curl}\mathbf{v}) + \alpha(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = (p, \operatorname{div}\mathbf{v}). \qquad \forall\ \mathbf{v} \in \mathbf{U}$$

Оператор $A_\nu(\alpha)$ является самосопряжённым и положительно определённым на $\mathbb{L}_2^0$.

Основным результатом этого параграфа является теорема:

Теорема 1.4. *Для произвольной $\alpha \in [0,\infty)$ и $p \in \mathbb{L}_2^0$, положим $q = A_\nu(\alpha)p$, $q \in \mathbb{L}_2^0$. Тогда $p = \varepsilon\, q - \alpha\, \Delta_N^{-1} q$, где $r := \Delta_N^{-1} q \in \mathbb{H}^1(\Omega) \cap \mathbb{L}_2^0$ – решение задачи Неймана*

$$\Delta r = q, \quad \left.\frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0.$$

Доказательство. Докажем сначала теорему для $\alpha = 0$. В этом случае теорема утверждает, что оператор A_ν совпадает с единичным оператором с точностью до множителя ε^{-1} (без ограничения общности можем положить $\varepsilon = 1$). Пусть p – произвольная функция из $\mathbb{L}_2^0$, и $q = A_\nu p \in \mathbb{L}_2^0$. Обозначим через $\mathbf{u}$ вектор-функцию $\Delta_\nu^{-1} \nabla p$ из $\mathbf{U}$, тогда в силу определения (1.76) слабого решения задачи (1.75) и определения оператора A_ν имеем

$$\begin{aligned} (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) &= (\operatorname{div} \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{v}) + (\operatorname{curl} \mathbf{u}, \operatorname{curl} \mathbf{v}), \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{U}, \\ q &= \operatorname{div} \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Умножим скалярно последнее равенство на $\operatorname{div} \mathbf{v}$ и рассмотрим $\mathbf{v}$ такие, что $\operatorname{curl} \mathbf{v} = 0$, т.е. $\mathbf{v} \in \mathbf{U}^0$. Затем вычтем второе равенство из первого, получаем

$$(p, \operatorname{div} \mathbf{v}) - (q, \operatorname{div} \mathbf{v}) = 0, \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{U}^0.$$

В силу леммы 1.8 имеем $(p, r) = (q, r)$ для всех $r \in \mathbb{L}_2^0$, а так как пространство $\mathbb{L}_2^0$ гильбертово, то из последнего равенства следует $p = q$. Для $\alpha = 0$ теорема доказана.

Предположим теперь, что $\alpha > 0$, тогда произвольная функция p из $\mathbb{L}_2^0$ и $q = A_\nu(\alpha)p$ связаны соотношениями

$$\begin{aligned} &-\varepsilon \Delta \mathbf{u} + \alpha \mathbf{u} + \nabla p = 0, \\ &\operatorname{div} \mathbf{u} = q, \\ &\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathcal{R}\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \tag{1.77}$$

Рассмотрим функции $p_1 = -\alpha \Delta_N^{-1} q$ и $\mathbf{u}_1 = \alpha^{-1} \nabla p_1$. Определим вектор-функцию $\mathbf{u}_2 \in \mathbf{U}$ из системы

$$-\Delta \mathbf{u}_2 = \nabla q, \quad \mathbf{u}_2\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathcal{R}\mathbf{u}_2|_{\partial\Omega} = 0.$$

Имеем $\Delta \mathbf{u}_1 = \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = -\nabla q = \Delta \mathbf{u}_2$, а так как $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{U}$ и $\mathcal{R}\mathbf{u}_1|_{\partial\Omega} = 0$, то $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$.

Положим $\tilde{p} = \varepsilon\, q + p_1$, тогда для $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ и $\tilde{p}$ выполняется

$$\begin{aligned} &-\varepsilon\Delta\tilde{\mathbf{u}} + \alpha\tilde{\mathbf{u}} + \nabla\tilde{p} = 0, \\ &\operatorname{div}\tilde{\mathbf{u}} = q, \\ &\tilde{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathcal{R}\tilde{\mathbf{u}}|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \tag{1.78}$$

В силу единственности решения (1.75) и соотношений (1.77), (1.78) получаем $p = \tilde{p} = \varepsilon\, q - \alpha\Delta_N^{-1}q$. Теорема доказана.
□

Утверждение теоремы 1.4 может быть записано в виде равенства:

$$A_\nu(\alpha)^{-1} \equiv \varepsilon\, I - \alpha\Delta_N^{-1}. \tag{1.79}$$

Замечание 1.5. Поясним на простом примере, почему для произвольных липшицевых областей приведенные выше рассуждения не могут быть проведены в рамках пространства $\mathbf{H}^1(\Omega)$.

Рассмотрим область $\Omega = \{x = \rho e^{i\theta},\ 0 < \rho < 1,\ 0 < \theta < \pi + \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Очевидно, что Ω – ограниченная односвязная липшицева область из $\mathbb{R}^2$. Возьмем функцию q из $\mathbb{L}_2^0$ такую, что обобщенное решение $\psi \in \mathbb{H}^1(\Omega)\cap\mathbb{L}_2^0$ задачи $\Delta\psi = q,\ \partial\psi/\partial\nu|_{\partial\Omega} = 0$, не принадлежит $\mathbb{H}^2(\Omega)$ (см. пример в [90]). Рассмотрим вектор-функцию $\mathbf{u} = \nabla\psi$. Легко видеть, что $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$, но $\mathbf{u} \notin \mathbf{H}^1(\Omega)$, более того, справедливо

$$(\operatorname{div}\mathbf{u}, \operatorname{div}\mathbf{v}) + (\operatorname{curl}\mathbf{u}, \operatorname{curl}\mathbf{v}) = (q, \operatorname{div}\mathbf{v}), \qquad \forall\mathbf{v} \in \mathbf{U},$$

т.е. $\mathbf{u} = \Delta_\nu^{-1}\nabla q$ для некоторой $q \in \mathbb{L}_2^0$.

Приведем для полноты изложения ещё два утверждения относительно задачи Стокса (1.75). Они не понадобятся нам в дальнейшем, поэтому приводятся без доказательств. Доказательства можно прочесть в [187].

Теорема 1.5. *Пусть Ω – ограниченная односвязная область, удовлетворяющая условию: либо $\partial\Omega$ из класса C^2, либо область является выпуклым многоугольником ($n = 2$), или многогранником ($n = 3$). Пусть $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$, $g \in \mathbb{H}^1(\Omega) \cap \mathbb{L}_2^0$, тогда решение p задачи* (1.75) *из $\mathbb{H}^1(\Omega) \cap \mathbb{L}_2^0$ удовлетворяет в слабом смысле уравнению:*

$$\begin{aligned} \Delta p &= \varepsilon\Delta g - \alpha g + \operatorname{div}\mathbf{f} \\ \frac{\partial p}{\partial\mathbf{n}} &= \varepsilon\frac{\partial g}{\partial\mathbf{n}} + \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}. \end{aligned}$$

Теорема 1.6. *Пусть* $m \geq 1$, Ω *– ограниченная односвязная область из* $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^r$, $r = \max(m, 2)$, $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{m-2}(\Omega)$, $g \in \mathbb{H}^{m-1}(\Omega) \cap \mathbb{L}_2^0$, *тогда решение* $\{\mathbf{u}, p\}$ *задачи* (1.75) *принадлежит* $(\mathbf{H}^m(\Omega) \cap \mathbf{U}) \times (\mathbb{H}^{m-1}(\Omega) \cap \mathbb{L}_2^0)$, *причем*

$$||\mathbf{u}||_m + ||p||_{m-1} \leq c(m, \Omega)(||g||_{m-1} + ||\mathbf{f}||_{m-2})$$

1.4.3 Обобщенное неравенство Нечаса.

Для удобства введём на $\mathbf{U}$ скалярное произведение:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\alpha = \varepsilon(\operatorname{div} \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{v}) + \varepsilon(\operatorname{curl} \mathbf{u}, \operatorname{curl} \mathbf{v}) + \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Для произвольной $p \in \mathbb{L}_2^0$ рассмотрим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} (A_\nu(\alpha)\, p, p) &= (\operatorname{div}(\Delta - \alpha\, I)_\nu^{-1} \nabla p, p) = -\langle (\Delta - \alpha\, I)_\nu^{-1} \nabla p, \nabla p \rangle \\ &= -\langle (\Delta - \alpha\, I)_\nu^{-1} \nabla p, (\Delta - \alpha\, I)(\Delta - \alpha\, I)_\nu^{-1} \nabla p \rangle \\ &= \|(\Delta - \alpha\, I)_\nu^{-1} \nabla p\|_\alpha^2 = \sup_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \frac{((\Delta - \alpha\, I)_\nu^{-1} \nabla p, \mathbf{u})_\alpha^2}{\|\mathbf{u}\|_\alpha^2} \\ &= \sup_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \frac{\langle \nabla p, \mathbf{u} \rangle^2}{\|\mathbf{u}\|_\alpha^2} = \sup_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \frac{(p, \operatorname{div} \mathbf{u})^2}{\varepsilon\|\operatorname{div} \mathbf{u}\|^2 + \varepsilon\|\operatorname{curl} \mathbf{u}\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}\|^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо равенство

$$(A_\nu(\alpha)\, p, p) = \sup_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \frac{(p, \operatorname{div} \mathbf{u})^2}{\varepsilon\|\operatorname{div} \mathbf{u}\|^2 + \varepsilon\|\operatorname{curl} \mathbf{u}\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}\|^2}. \tag{1.80}$$

Замечание 1.6. Рассмотрим $\hat{\mathbf{u}} = (\varepsilon\Delta - \alpha\, I)_\nu^{-1} \nabla p$ для некоторой $p \in \mathbb{L}_2^0$. Из цепочки равенств перед (1.80) следует

$$(A_0(\alpha)\, p, p) = \|\hat{\mathbf{u}}\|_\alpha^2 = \varepsilon\|\operatorname{div} \hat{\mathbf{u}}\|^2 + \varepsilon\|\operatorname{curl} \hat{\mathbf{u}}\|^2 + \alpha\|\hat{\mathbf{u}}\|^2.$$

В то же время имеем $(A_\nu(\alpha)\, p, p) = (\operatorname{div} \hat{\mathbf{u}}, p)$. Следовательно, верхняя грань в выражении

$$\sup_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \frac{(p, \operatorname{div} \mathbf{u})^2}{\varepsilon\|\operatorname{div} \mathbf{u}\|^2 + \varepsilon\|\operatorname{curl} \mathbf{u}\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}\|^2}$$

достигается на функции $\hat{\mathbf{u}}$.

Основным результатом этого параграфа является лемма:

Лемма 1.10 (Обобщённое неравенство Нечаса). *Пусть Ω, такая что выполнено условие: либо $\partial\Omega$ из класса C^2, либо Ω – выпуклая липшицева. Для произвольных $\alpha \in [0, \infty)$ и $p \in \mathbb{L}_2^0$ выполняется неравенство*

$$c(\Omega) \sup_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}} \frac{(p, \operatorname{div}\mathbf{u})^2}{\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|^2 + \|\operatorname{curl}\mathbf{u}\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}\|^2} \leq \sup_{\mathbf{u}\in\mathbf{H}_0^1} \frac{(p, \operatorname{div}\mathbf{u})^2}{\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|^2 + \|\operatorname{curl}\mathbf{u}\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}\|^2} \tag{1.81}$$

с константой $c(\Omega) > 0$, не зависящей от α и p.

Замечание 1.7. В силу (1.79) $A_\nu(0) = I$ при $\varepsilon = 1$. Более того, $\|\nabla\mathbf{u}\|^2 = \|\operatorname{div}\mathbf{u}\|^2 + \|\operatorname{curl}\mathbf{u}\|^2$ для $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1$. Поэтому из (1.80) следует, что (1.81) при $\alpha = 0$ эквивалентно неравенству Нечаса (1.68).

Для доказательства леммы 1.10 нам понадобятся вспомогательные утверждения: леммы 1.11 и 1.12.

Лемма 1.11. *Рассмотрим произвольные $\alpha \geq 0$ и $\mathbf{u}$ из $\mathbf{U}$. Равенство $\mathbf{u} = \nabla\psi$ для некоторой $\psi \in \mathbb{H}^1(\Omega) \cap \mathbb{L}_2^0$ справедливо тогда и только тогда, когда*

$$\mathbf{u} = (\Delta - \alpha\, I)_\nu^{-1} \nabla p \tag{1.82}$$

для некоторой $p \in \mathbb{L}_2^0$.

Доказательство. 1. Предположим $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ и $\mathbf{u} = \nabla\psi$ для некоторой $\psi \in \mathbb{H}^1(\Omega) \cap \mathbb{L}_2^0$. легко видеть, что для такой $\mathbf{u}$ соотношение

$$\Delta\mathbf{u} - \alpha\mathbf{u} = \nabla p$$

справедливо (в слабом смысле) с $p = \operatorname{div}\mathbf{u} - \alpha\psi$, $p \in \mathbb{L}_2^0$; и так как $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = \mathcal{R}\mathbf{u} = 0$, то равенство (1.82) выполнено.

2. Рассмотрим произвольную $p \in \mathbb{L}_2^0$ и $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ такую, что (1.82) выполнено. Тогда согласно теореме 1.4 $\mathbf{u}$ и p связаны соотношением

$$p = \operatorname{div}\mathbf{u} - \alpha\Delta_N^{-1}\operatorname{div}\mathbf{u}.$$

Положим теперь $\psi = \Delta_N^{-1}\operatorname{div}\mathbf{u}$, $\psi \in \mathbb{H}^1(\Omega) \cap \mathbb{L}_2^0$ и $\mathbf{v} = \nabla\psi$. Мы сразу получаем $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} = 0$, $\mathcal{R}\mathbf{v} = \mathcal{R}\nabla\psi = 0$ на $\partial\Omega$ и $\operatorname{div}\mathbf{v} = \Delta\psi = \operatorname{div}\mathbf{u}$. Более того,

$$\Delta\mathbf{v} - \alpha\mathbf{v} = \nabla\operatorname{div}\mathbf{v} - \alpha\nabla\Delta_N^{-1}\operatorname{div}\mathbf{u} = \nabla(\operatorname{div}\mathbf{u} - \alpha\Delta_N^{-1}\operatorname{div}\mathbf{u}) = \nabla p.$$

Следовательно, функция $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{U}$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}&\Delta\mathbf{w} - \alpha\mathbf{w} = 0,\\ &\mathbf{w}{\cdot}\mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathcal{R}\mathbf{w}|_{\partial\Omega} = 0,\end{aligned}$$

которое влечёт $\mathbf{w} = 0$. Таки образом, получаем $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \nabla\psi$, следовательно, $\operatorname{curl}\mathbf{u} = 0$. Лемма доказана. □

Лемма 1.12. *Пусть* $\mathbf{v}$ *– произвольная функция из* $\mathbf{U}$ *и* $\mathbf{u}, p \in \mathbf{U} \times \mathbb{L}_2^0$ *– решение задачи*

$$-\Delta\mathbf{u} + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{v}|_{\partial\Omega}\,. \tag{1.83}$$

выполняется следующие оценки:

$$\begin{aligned}\|\operatorname{div}\mathbf{u}\| + \|\operatorname{curl}\mathbf{u}\| &\le c(\Omega)(\|\operatorname{div}\mathbf{v}\| + \|\operatorname{curl}\mathbf{v}\|), &(1.84)\\ \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega} &\le c(\Omega)\|\gamma_\tau\mathbf{u}\|_{-\frac{1}{2},\partial\Omega}. &(1.85)\end{aligned}$$

Доказательство. Решение $\mathbf{u}$ задачи (1.83) можно записать, как $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$, где $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1$ – решение (вместе с p) задачи

$$\begin{aligned}&(\nabla\mathbf{w}, \nabla\xi) - (p, \operatorname{div}\xi) = (\operatorname{div}\mathbf{v}, \operatorname{div}\xi) + (\operatorname{curl}\mathbf{v}, \operatorname{curl}\xi),\\ &(\operatorname{div}\mathbf{w}, \eta) = (\operatorname{div}\mathbf{v}, \eta) \qquad\qquad \forall\xi \in \mathbf{H}_0^1,\ \eta \in \mathbb{L}_2^0.\end{aligned} \tag{1.86}$$

Из (1.86) с помощью стандартных рассуждений (см., например, [84]) получаем для $\mathbf{w}$ оценку

$$\|\nabla\mathbf{w}\| \le c(\|\operatorname{div}\mathbf{v}\| + \|\operatorname{curl}\mathbf{v}\|).$$

Из этого неравенства и соотношений $\|\operatorname{div}\mathbf{w}\|^2 + \|\operatorname{curl}\mathbf{w}\|^2 = \|\nabla\mathbf{w}\|^2$, $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$, получаем (1.84).

Для того чтобы доказать (1.85), предположим на время, что $\mathbf{v}$ принадлежит $\mathbf{H}^2(\Omega)^n$. Это предположение на $\mathbf{v}$ влечёт, что $\mathbf{w}$ из (1.86) принадлежит $\mathbf{H}^2_{loc}(\Omega)^n$. Поэтому $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2_{loc}(\Omega)$ и $p \in \mathbb{H}^1_{loc}$. Следовательно, мы можем рассмотреть равенство (1.83) в обычном смысле. Умножим обе части (1.83)на произвольную функцию ψ из $\mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1$, такую что $\operatorname{div}\psi = 0$, и проинтегрируем по Ω. После интегрирования по частям получаем

$$-(\mathbf{u}, \Delta\psi) = \langle\gamma_\tau\mathbf{v}, \operatorname{curl}\psi\rangle_{\partial\Omega}.$$

Предполагая $\psi \neq 0$, получаем из последнего равенства

$$\frac{-(\mathbf{u}, \Delta\psi)}{\|\psi\|_2} = \frac{\langle \gamma_\tau \mathbf{v}, \operatorname{curl}\psi\rangle_{\partial\Omega}}{\|\psi\|_2}. \tag{1.87}$$

Для получения оценки в правой части (1.87) заметим, что

$$\|\operatorname{curl}\psi\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega} \leq \|\operatorname{curl}\psi\|_{W_2^1(\Omega)} \leq c_1\|\psi\|_2$$

и, следовательно,

$$\frac{|\langle \gamma_\tau \mathbf{v}, \operatorname{curl}\psi\rangle_{\partial\Omega}|}{\|\psi\|_2} \leq c\frac{|\langle \gamma_\tau \mathbf{v}, \operatorname{curl}\psi\rangle_{\partial\Omega}|}{\|\operatorname{curl}\psi\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega}}$$
$$\leq c \sup_{\xi\in\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^{2n-3}} \frac{\langle \gamma_\tau \mathbf{v}, \xi\rangle_{\partial\Omega}}{\|\xi\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega}} \equiv c\|\gamma_\tau \mathbf{v}\|_{-\frac{1}{2}}.$$

Теперь из (1.87) получаем

$$\frac{|(\mathbf{u}, \Delta\psi)|}{\|\psi\|_2} \leq c\|\gamma_\tau \mathbf{v}\|_{-\frac{1}{2}}. \tag{1.88}$$

Так как (1.88) выполняется для любой $0 \neq \psi \in \mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1$ такой, что $\operatorname{div}\psi = 0$, выберем в качестве ψ решение задачи

$$\begin{aligned} -\Delta\psi + \nabla q &= \mathbf{u}, \\ \operatorname{div}\psi &= 0, \\ \psi|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned} \tag{1.89}$$

Так как $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$. То благодаря условиям на Ω из леммы 1.10, из стандартных результатов о регулярности решения задачи Стокса следует $\{\psi, q\} \in \mathbf{H}^2(\Omega) \times \mathbb{H}^1(\Omega) \cap \mathbb{L}_2^0$ и

$$\|q\|_{W_2^1} + \|\psi\|_2 \leq c\|\mathbf{u}\|. \tag{1.90}$$

Для получения оценки на $\|\mathbf{u}\|$ умножим первое равенство системы (1.89) на $\mathbf{u}$ и проинтегрируем по Ω. Получаем

$$\|\mathbf{u}\|^2 = (\nabla q, \mathbf{u}) - (\Delta\psi, \mathbf{u}).$$

Из этого соотношения, используя оценки (1.88), (1.90) и равенство

$$(\nabla q, \mathbf{u}) = \langle\, q, \mathbf{u}{\cdot}\mathbf{n}\rangle_{\partial\Omega},$$

мы выводим

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\|^2 &\le |\langle q, \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\rangle_{\partial\Omega}| + c\|\psi\|_2\, \|\gamma_\tau \mathbf{v}\|_{-\frac{1}{2},\partial\Omega} \\ &\le \|q\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega}\|\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\|_{-\frac{1}{2},\partial\Omega} + c\|\mathbf{u}\|\, \|\gamma_\tau \mathbf{v}\|_{-\frac{1}{2},\partial\Omega} \\ &\le \|q\|_{W_2^1}\|\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\|_{-\frac{1}{2},\partial\Omega} + c\|\mathbf{u}\|\, \|\gamma_\tau \mathbf{v}\|_{-\frac{1}{2},\partial\Omega} \\ &\le c_1\|\mathbf{u}\|\,(\|\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\|_{-\frac{1}{2},\partial\Omega} + \|\gamma_\tau \mathbf{v}\|_{-\frac{1}{2},\partial\Omega}).\end{aligned}$$

Из последней оценки следует, что

$$\|\mathbf{u}\| \le c(\|\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\|_{-\frac{1}{2},\partial\Omega} + \|\gamma_\tau \mathbf{v}\|_{-\frac{1}{2},\partial\Omega}). \tag{1.91}$$

Пусть теперь $\mathbf{v}$ – произвольная функция из $\mathbf{U}$. Тогда $\mathbf{v}$ может быть приближена в $\mathbf{U}$-норме функциями из $(\mathbf{H}^2)$. Следовательно, используя неравенства (1.73), (1.84), и переходя к замыканию в $\mathbf{U}$, выводим из (1.91) оценку (1.85). Лемма 1.12 доказана.
□

Доказательство Леммы 1.10. Пусть p – произвольная функция из $\mathbb{L}_2^0$. В замечании 1.6 указано, что верхняя грань в левой части (1.81) достигается на функции

$$\mathbf{u} = (\Delta - \alpha\, I)_\nu^{-1}\nabla p, \quad \mathbf{u}\in\mathbf{U}. \tag{1.92}$$

Благодаря лемме 1.11 и соотношению (1.92) получаем $\operatorname{curl}\mathbf{u} = 0$. Следовательно, (1.73) влечёт

$$\|\gamma_\tau \mathbf{u}\|_{-\frac{1}{2},\partial\Omega} \le \|\mathbf{u}\|. \tag{1.93}$$

Чтобы доказать лемму нам достаточно для заданной $\mathbf{u}$ из (1.92) построить такую функцию $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}_0^1$, что

$$\begin{aligned}&(p, \operatorname{div}\tilde{\mathbf{u}}) = (p, \operatorname{div}\mathbf{u}), \\ &\|\operatorname{div}\tilde{\mathbf{u}}\|^2 + \|\operatorname{curl}\tilde{\mathbf{u}}\|^2 + \alpha\|\tilde{\mathbf{u}}\|^2 \le c\,(\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|^2 + \|\operatorname{curl}\mathbf{u}\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}\|^2)\end{aligned} \tag{1.94}$$

с константой c, не зависящей от $\mathbf{u}$, $\tilde{\mathbf{u}}$ и α.

Положим $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{w}$, где $\mathbf{w}\in\mathbf{U}$ – решение задачи

$$\begin{aligned}&-\Delta\mathbf{w} + \nabla q = 0, \\ &\operatorname{div}\mathbf{w} = 0, \\ &\mathbf{w}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}|_{\partial\Omega}.\end{aligned} \tag{1.95}$$

Легко видеть, что $(p, \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}) = (p, \operatorname{div} \mathbf{u})$ и, в силу замечания 1.4, $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}_0^1$.

Теперь проверим выполнение второго условия в (1.94). Используя априорные оценки из леммы 1.12 и соотношение (1.93), мы получаем для решения задачи (1.95)

$$\begin{aligned}
&\|\operatorname{div} \mathbf{w}\|^2 + \|\operatorname{curl} \mathbf{w}\|^2 \le c(\|\operatorname{div} \mathbf{u}\|^2 + \|\operatorname{curl} \mathbf{u}\|^2), \\
&\|\mathbf{w}\|^2 \le c\|\gamma_\tau \mathbf{u}\|_{-\frac{1}{2}, \partial\Omega} \le c\|\mathbf{u}\|^2.
\end{aligned}$$

Суммируя неравенства, получаем

$$\|\operatorname{div} \mathbf{w}\|^2 + \|\operatorname{curl} \mathbf{w}\|^2 + \alpha\|\mathbf{w}\|^2 \le c\left(\|\operatorname{div} \mathbf{u}\|^2 + \|\operatorname{curl} \mathbf{u}\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}\|^2\right). \quad (1.96)$$

с константой c, не зависящей от α и $\mathbf{u}$.

В виду равенства $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{w}$ и (1.96), второе условие в (1.94) также выполнено. Лемма 1.10 доказана.

Замечание 1.8. Известно, что неравенство Нечаса верно для произвольных липшицовых областей. Лемма 1.10 устанавливает обобщенное неравенство Нечаса в более регулярном случае. В работе [181] лемма 1.10 доказывается также для липшицевых областей со следующим ограничением: Ω – криволинейная трапеция с Липшицевой границей $y = g(x)$, где $|g'|$ не слишком велико. Доказательство этого случая очень технично и здесь приводится не будет.

1.4.4 Теорема о перемежаемости опрераторов Шура

Важным следствием обобщённого неравенства Нечаса является теорема о перемежаемости операторов Шура с различными краевыми условиями.

Теорема 1.7. *Существует константа $c(\Omega) > 0$, не зависящая от ε и α такая, что*

$$c(\Omega) A_\nu(\alpha) \le A_0(\alpha) \le A_\nu(\alpha).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную $p \in \mathbb{L}_2^0$. В разделе 1.4.3 на странице 1.80 были выведены равенства

$$\begin{aligned}
(A_0(\alpha)\, p, p) &= \sup_{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1} \frac{(p, \operatorname{div} \mathbf{u})^2}{\varepsilon\|\operatorname{div} \mathbf{u}\|^2 + \varepsilon\|\operatorname{curl} \mathbf{u}\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}\|^2}, \\
(A_\nu(\alpha)\, p, p) &= \sup_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \frac{(p, \operatorname{div} \mathbf{u})^2}{\varepsilon\|\operatorname{div} \mathbf{u}\|^2 + \varepsilon\|\operatorname{curl} \mathbf{u}\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}\|^2}.
\end{aligned}$$

Следовательно, достаточно убедиться в справедливости неравенств

$$\sup_{\mathbf{u}\in\mathbf{H}_0^1}\frac{(p,\operatorname{div}\mathbf{u})^2}{\varepsilon\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|^2+\varepsilon\|\operatorname{curl}\mathbf{u}\|^2+\alpha\|\mathbf{u}\|^2}$$
$$\le\sup_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}}\frac{(p,\operatorname{div}\mathbf{u})^2}{\varepsilon\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|^2+\varepsilon\|\operatorname{curl}\mathbf{u}\|^2+\alpha\|\mathbf{u}\|^2}$$
$$c(\Omega)\sup_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}}\frac{(p,\operatorname{div}\mathbf{u})^2}{\varepsilon\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|^2+\varepsilon\|\operatorname{curl}\mathbf{u}\|^2+\alpha\|\mathbf{u}\|^2}$$
$$\le\sup_{\mathbf{u}\in\mathbf{H}_0^1}\frac{(p,\operatorname{div}\mathbf{u})^2}{\varepsilon\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|^2+\varepsilon\|\operatorname{curl}\mathbf{u}\|^2+\alpha\|\mathbf{u}\|^2}$$

с некоторой $c(\Omega)>0$, зависящей только от Ω. Первое из этих неравенств тривиально, так как $\mathbf{H}_0^1\subset\mathbf{U}$. Вторая оценка при $\varepsilon=1$ – это обобщённое неравенство Нечаса (1.81) из леммы 1.10. Так как (1.81) верно для любых положительных α, то с помощью простого масштабирования можно рассмотреть случай произвольного $\varepsilon>0$.

□

Замечание 1.9. Благодаря равенству (1.79) утверждение теоремы можно записать в виде оценок

$$c(\Omega)(\varepsilon\, I-\alpha\Delta_N^{-1})^{-1}\le A_0(\alpha)\le(\varepsilon\, I-\alpha\Delta_N^{-1})^{-1} \tag{1.97}$$

1.4.5 Оценки для стабилизированной задачи Стокса.

Вспомогательные результаты из линейной алгебры.

В этот параграфе мы докажем два несложных результата для матрицы $\mathcal{A}$ вида:

$$\begin{gathered}\mathcal{A}=\begin{pmatrix}A & B^T\\ B & 0\end{pmatrix},\quad \mathbb{R}^{n\times n}\ni A=A^T>0,\\ B\in\mathbb{R}^{m\times n},\ m<n,\ \operatorname{rank}(B)=m.\end{gathered} \tag{1.98}$$

Введём обозначение $\langle x,y\rangle_A=\langle Ax,y\rangle$ для энергетического скалярного произведения и энергетической нормы $\|x\|_A^2=\langle x,x\rangle_A$. Спектральное число обусловленности матрицы C обозначим через $\kappa(C)=\|C\|\|C^{-1}\|$. Важную роль будут играть величины:

$$\sqrt{\Gamma}:=\sup_{y\in\mathbb{R}^m,\,x\in\mathbb{R}^n}\frac{\langle Bx,y\rangle}{\|x\|_A\|y\|}\ ,\quad \sqrt{\gamma}:=\inf_{y\in\mathbb{R}^m}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\frac{\langle Bx,y\rangle}{\|x\|_A\|y\|}\ . \tag{1.99}$$

Следующий простой результат известен из литературы (см. [152]). Для полноты изложения приведем доказательство.

Лемма 1.13. *Пусть* $\lambda_{\min}(BA^{-1}B^T)$ *и* $\lambda_{\max}(BA^{-1}B^T)$ *наименьшее и наибольшее собственные числа оператора Шура* $BA^{-1}B^T$. *Справедливы равенства*

$$\gamma = \lambda_{\min}(BA^{-1}B^T), \qquad \Gamma = \lambda_{\max}(BA^{-1}B^T)\ .$$

Доказательство. Заметим

$$\sup_x \frac{\langle Bx, y\rangle^2}{\|x\|_A^2\|y\|^2} = \sup_x \frac{\langle BA^{-\frac{1}{2}}x, y\rangle^2}{\|x\|^2\|y\|^2} = \sup_x \frac{\langle x, A^{-\frac{1}{2}}B^T y\rangle^2}{\|x\|^2\|y\|^2}$$
$$= \frac{\|A^{-\frac{1}{2}}B^T y\|^2}{\|y\|^2} = \frac{\langle BA^{-1}B^T y, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\ .$$

Следовательно,

$$\gamma = \inf_y \frac{\langle BA^{-1}B^T y, y\rangle}{\langle y, y\rangle} = \lambda_{\min}(BA^{-1}B^T)\ ,$$
$$\Gamma = \sup_y \frac{\langle BA^{-1}B^T y, y\rangle}{\langle y, y\rangle} = \lambda_{\max}(BA^{-1}B^T)\ .$$

□

Используя эту лемму докажем утверждение о спектральном числе обусловленности переобусловленной матрицы $\mathcal{A}$. Похожие результаты известны из литературы (так равенство (1.102) можно найти в [36]).

Лемма 1.14. *Определим*

$$\mathcal{P} := \begin{pmatrix} A^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \mathcal{A} \begin{pmatrix} A^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A^{-\frac{1}{2}}B^T \\ BA^{-\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}\ . \tag{1.100}$$

Предположим $\gamma > 0$. *Тогда* $\mathcal{P}$ *обратима и*

$$\|\mathcal{P}\| = \frac{1}{2}(\sqrt{1+4\Gamma}+1) \tag{1.101}$$
$$\|\mathcal{P}^{-1}\| = \frac{2}{\min\{2\,,\ \sqrt{1+4\gamma}-1\}}\ . \tag{1.102}$$

Доказательство. Полагая $C := BA^{-\frac{1}{2}}$, получаем

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} I & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix} .$$

Заметим, что C имеет нетривиальное ядро. Для $v \in \mathrm{Ker}(C)$, $v \neq 0$ имеем $\mathcal{P}\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$, следовательно, выполнено $1 \in \sigma(\mathcal{P})$. Для $\mu \in \sigma(\mathcal{P})$, $\mu \neq 1$ имеем

$$\begin{pmatrix} I & C^T \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} , \quad \text{с} \;\; v_2 \neq 0 .$$

Это выполняется только, если $\mu(\mu - 1) \in \sigma(CC^T)$. Пусть $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_m$ будут собственными числами матрицы $CC^T = BA^{-1}B^T$. Получаем

$$\sigma(\mathcal{P}) \setminus \{1\} = \left\{ \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda_j}) \;\middle|\; 1 \leq j \leq m \right\} .$$

Следовательно, наибольшее собственное значение $\mathcal{P}$ задаётся, как

$$\|\mathcal{P}\| = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4\lambda_m}) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4\Gamma}) .$$

Благодаря лемме 1.13 и предположению $\gamma > 0$ получаем, что $\lambda_1 > 0$. Следовательно, $\mathcal{P}$ обратима и наибольшее собственное значение обратной матрицы задаётся, как

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}^{-1}\| &= \max\Big\{1\,,\ \max_{1 \leq j \leq m} 2\Big|1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda_j}\Big|^{-1}\Big\} \\ &= \max\Big\{1\,,\ 2\Big|1 - \sqrt{1 + 4\lambda_1}\Big|^{-1}\Big\} \\ &= \frac{2}{\min\{2\,,\ \sqrt{1 + 4\gamma} - 1\}} . \end{aligned}$$

□

Доказанные результаты показывают, что величины γ и Γ полностью определяют $\kappa(BA^{-1}B^T)$ и $\kappa(\mathcal{P})$. Заметим, что первое зависит лишь от отношения Γ/γ, в то время как последнее – не только. Результат из леммы 1.14 понадобится нам в дальнейшем.

Вспомогательные результаты для абстрактной вариационной задачи.

Перед тем как перейти к (обобщённой) задаче Стокса (1.61) рассмотрим общую вариационную задачу с седловой точкой. Введём две непрерывные билинейные формы гильбертовых пространствах $\mathbf{V}, \mathbb{Q}$ (для удобства можно представлять, что $\mathbf{V} := \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ и $\mathbb{Q} := \mathbb{L}_2^0(\Omega)$):

$$a_1(\cdot,\cdot): \ \mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbb{R}, \qquad b(\cdot,\cdot): \ \mathbf{V}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{R} .$$

Предположим, что $a_1(\cdot,\cdot)$ симметрична и эллиптична на $\mathbf{V}$. Рассмотрим вариационную задачу с седловой точкой: для заданных $f \in \mathbf{V}'$ и $g \in \mathbb{Q}$ найти $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V}\times\mathbb{Q}$ такие, что

$$\begin{cases} a_1(\mathbf{u},\mathbf{v}) + b(\mathbf{v},p) & = f(\mathbf{v}) \quad \text{для} \ \ \mathbf{v}\in\mathbf{V}, \\ \qquad\qquad\quad b(\mathbf{u},q) & = (g,q) \quad \text{для} \ \ q\in\mathbb{Q} . \end{cases} \tag{1.103}$$

Используя билинейную форму $a: \ (\mathbf{V}\times\mathbb{Q})\times(\mathbf{V}\times\mathbb{Q})\to\mathbb{R}$,

$$a(\mathbf{u},p;\mathbf{v},q) := a_1(\mathbf{u},\mathbf{v}) + b(\mathbf{v},p) + b(\mathbf{u},q) ,$$

задача (1.103) может быть переписана: найти $(\mathbf{u},p)\in\mathbf{V}\times\mathbb{Q}$ такие, что

$$a(\mathbf{u},p;\mathbf{v},q) = f(\mathbf{v}) + (g,q) \quad \text{для всех} \ \ (\mathbf{v},q)\in\mathbf{V}\times\mathbb{Q} . \tag{1.104}$$

На $\mathbf{V}$ введём норму с помощью билинейной формы a_1: $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}} := a_1(\mathbf{u},\mathbf{u})^{\frac{1}{2}}$ для $\mathbf{u}\in\mathbf{V}$. На произведении пространств $\mathbf{V}\times\mathbb{Q}$ зададим норму

$$|||(\mathbf{u},p)||| = (\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2 + \|p\|^2)^{\frac{1}{2}} .$$

Введём обозначения

$$\sqrt{\Gamma} := \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{V}, q\in\mathbb{Q}} \frac{b(\mathbf{v},q)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}\|q\|} , \qquad \sqrt{\gamma} := \inf_{q\in\mathbb{Q}}\sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{V}} \frac{b(\mathbf{v},q)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}\|q\|} . \tag{1.105}$$

Заметим, что Γ, γ использовались в (1.99) для обозначения схожих величин. Ниже Γ, γ будут обозначать величины из (1.105). Предположим, что $\gamma > 0$. Величины Γ и γ полностью определяют оценки непрерывности и устойчивости формы a:

Теорема 1.8. *Для произвольных* $(\mathbf{u},p)$, $(\mathbf{v},q)\in\mathbf{V}\times\mathbb{Q}$ *выполняется*

$$|a(\mathbf{u},p;\mathbf{v},q)|\le\frac{1}{2}(\sqrt{1+4\Gamma}+1)|||(\mathbf{u},p)|||\;|||(\mathbf{v},q)||| \tag{1.106}$$

и

$$\sup_{(\mathbf{v},q)\in\mathbf{V}\times\mathbb{Q}}\frac{a(\mathbf{u},p;\mathbf{v},q)}{|||(\mathbf{v},q)|||}\ge\frac{1}{8}\min\{1\,,\,\gamma\}\,|||(\mathbf{u},p)|||\;. \tag{1.107}$$

Доказательство. Определим $\theta:=\frac{1}{2}(\sqrt{1+4\Gamma}+1)$ и заметим, что

$$\begin{aligned}
&|a(\mathbf{u},p;\mathbf{v},q)|=|a_1(\mathbf{u},\mathbf{v})+b(\mathbf{v},p)+b(\mathbf{u},q)|\\
&\le\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}+\Gamma^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}\|p\|+\Gamma^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}\|q\|\\
&\le\big(\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2+\frac{\Gamma}{\theta}\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2+\theta\|p\|^2\big)^{\frac{1}{2}}\big(\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2+\frac{\Gamma}{\theta}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2+\theta\|q\|^2\big)^{\frac{1}{2}}\\
&=\theta|||(\mathbf{u},p)|||\,|||(\mathbf{v},q)|||\;.
\end{aligned}$$

Это доказывает результат в (1.106).
Для $(f,g)\in\mathbf{V}'\times\mathbb{Q}$ пусть $(\mathbf{u},p)\in\mathbf{V}\times\mathbb{Q}$ является решением

$$a(\mathbf{u},p;\mathbf{v},q)=f(\mathbf{v})+(g,q)\quad\text{для всех}\;\;(\mathbf{v},q)\in\mathbf{V}\times\mathbb{Q}\;.$$

Отображение $(f,g)\to(\mathbf{u},p)$ является биекцией. Стандартные результаты (см, например, [84] § 4.1, [127], § 7.4.1) влекут следующие неулучшаемые оценки на нормы $\mathbf{u}$ и p:

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}\le\|f\|_{\mathbf{V}'}+2\gamma^{-\frac{1}{2}}\|g\|\;,\\
&\quad\|p\|\le\gamma^{-\frac{1}{2}}\big(\|f\|_{\mathbf{V}'}+\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}\big)\le2\gamma^{-\frac{1}{2}}(\|f\|_{\mathbf{V}'}+\gamma^{-\frac{1}{2}}\|g\|)\;.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
|||\mathbf{u},p|||&\le\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}+\|p\|\le2\big(1+\gamma^{-\frac{1}{2}}\big)\big(\|f\|_{\mathbf{V}'}+\gamma^{-\frac{1}{2}}\|g\|\big)\\
&=2\big(1+\gamma^{-\frac{1}{2}}\big)\Big(\sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{V}}\frac{f(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}}+\gamma^{-\frac{1}{2}}\sup_{q\in\mathbb{Q}}\frac{(g,q}{\|q\|}\Big)\\
&\le4\big(1+\gamma^{-\frac{1}{2}}\big)\max\{1\,,\,\gamma^{-\frac{1}{2}}\}\sup_{(\mathbf{v},q)\in\mathbf{V}\times\mathbb{Q}}\frac{f(\mathbf{v})+(g,q)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}+\|q\|}\\
&\le4\big(1+\gamma^{-\frac{1}{2}}\big)\max\{1\,,\,\gamma^{-\frac{1}{2}}\}\sup_{(\mathbf{v},q)\in\mathbf{V}\times\mathbb{Q}}\frac{a(\mathbf{u},p;\mathbf{v},q)}{|||(\mathbf{v},q)|||}\;.
\end{aligned}$$

Пусть $z = \gamma^{-\frac{1}{2}} \in (0, \infty)$. Простые преобразования дают

$$\frac{1}{4(1+z)\max\{1\,,\,z\}} \geq \frac{1}{8\max\{1\,,\,z^2\}} = \frac{1}{8}\min\{1\,,\,z^{-2}\}\ .$$

Мы доказали результат в (1.107). $\square$

Равенство (1.101) показывает, что оценка в (1.106) точна. Величина обратная к infsup константе из (1.107) ведёт себя, как $\mathcal{O}(\gamma^{-1})$ для $\gamma \to 0$. Аналогичное поведение $\|\mathcal{P}^{-1}\| = \mathcal{O}(\gamma^{-1})$ для $\gamma \to 0$ наблюдается в (1.102). В этом смысле оценка (1.107) также точна.

Теорема 1.8 показывает, что число обусловленности

$$C(\gamma, \Gamma) := \frac{4(\sqrt{1+4\Gamma}+1)}{\min\{1\,,\,\gamma\}} \tag{1.108}$$

может быть использовано для оценки устойчивости задачи (1.104) в норме $|||\cdot|||$.

Оценки для непрерывного оператора

Зададим некоторое $\xi \geq 0$ и перепишем вариационную постановку задачи Стокса (1.62) – (1.63) следующим образом: $\forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1_0(\Omega), q \in \mathbb{L}^0_2(\Omega)$

$$\begin{aligned} \varepsilon(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \xi(\operatorname{div}\mathbf{u}, \operatorname{div}\mathbf{v}) - (p, \operatorname{div}\mathbf{v}) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - \xi(g, \operatorname{div}\mathbf{v}) \\ -(\operatorname{div}\mathbf{u}, q) &= (g, q). \end{aligned} \tag{1.109}$$

Напомним, что мы считаем $\alpha \in \{0, 1\}$. Заметим, что единственное решение данной задачи *не зависит* от ξ. Рассмотрим случай различных значений параметров и изучим их влияние на константы устойчивости и непрерывности системы. Итак, в качестве билинейных форм a_1 и b в (1.103) возьмём

$$\begin{aligned} a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \varepsilon(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \xi(\operatorname{div}\mathbf{u}, \operatorname{div}\mathbf{v}) \quad \text{для} \ \ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1_0\ , \\ b(\mathbf{u}, q) &:= (\operatorname{div}\mathbf{u}, q) \quad \text{для} \ \ \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1_0,\ q \in \mathbb{L}^0_2\ . \end{aligned} \tag{1.110}$$

Заметим, что b удовлетворяет infsup условию:

$$\inf_{q\in\mathbb{Q}} \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{V}} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\nabla\mathbf{v}\|\|q\|} \geq c_0 > 0. \tag{1.111}$$

которое эквивалентно неравенству Нечаса (1.68). Форма a_1 является симметричной и эллиптичной на $\mathbf{H}_0^1$. Норма $\|\cdot\|_{\mathbf{V}} := a_1(\cdot,\cdot)^{\frac{1}{2}}$ зависит от параметров ε, α, ξ. Следующая теорема описывает зависимость числа обусловленности $C(\gamma, \Gamma)$ от параметров ε, α, ξ. Используем оценку $\|\operatorname{div}\mathbf{u}\| \leq \|\nabla\mathbf{u}\|$ для $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1$ и неравенство Фридрихса

Теорема 1.9. *Справедливы оценки*

$$C(\gamma,\Gamma) \leq \frac{4(\sqrt{5}+1)}{c_0^2}\frac{\max\{c_0^2\,,\,\varepsilon+\xi\}}{\min\{1\,,\,\sqrt{\varepsilon+\xi}\}} =: C_0(\varepsilon,\xi), \quad \text{\textit{если}} \;\; \alpha = 0\;, \tag{1.112}$$

$$C(\gamma,\Gamma) \leq \frac{4(\sqrt{5}+1)}{c_0^2}\frac{\max\{c_0^2\,,\,\varepsilon+C_F^2+\xi\}}{\min\{1\,,\,\sqrt{\varepsilon+\xi}\}} =: C_1(\varepsilon,\xi), \quad \text{\textit{если}} \;\; \alpha = 1, \tag{1.113}$$

где c_0 *задаётся в* (1.111).

Доказательство. Положим $\alpha \in [0,1]$. Из

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2 \leq (\varepsilon + \alpha c_F^2 + \xi)\|\nabla\mathbf{u}\|^2 \tag{1.114}$$

и infsup условия (1.111) получаем

$$\gamma \geq \frac{c_0^2}{\varepsilon + \alpha c_F^2 + \xi}\;.$$

С помощью

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}^2 \geq (\varepsilon + \xi)\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|^2$$

и неравенства Коши-Шварца имеем

$$\Gamma \leq \frac{1}{\varepsilon+\xi}\;.$$

Используя неравенство $\sqrt{1+4x}+1 \leq (\sqrt{5}+1)\max\{1\,,\,\sqrt{x}\}$ получаем

$$4\frac{\sqrt{1+4\Gamma}+1}{\min\{1\,,\,\gamma\}} \leq 4(\sqrt{5}+1)\frac{\max\{1\,,\,\Gamma^{\frac{1}{2}}\}}{\min\{1\,,\,\gamma\}} \leq 4(\sqrt{5}+1)\frac{\max\{1\,,\,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon+\xi}}\}}{\min\{1\,,\,\frac{c_0^2}{\varepsilon+\alpha C_F^2+\xi}\}}$$

$$= \frac{4(\sqrt{5}+1)}{c_0^2}\frac{\max\{c_0^2\,,\,\varepsilon+\alpha C_F^2+\xi\}}{\min\{1\,,\,\sqrt{\varepsilon+\xi}\}}\;.$$

Выбор $\alpha \in \{0,1\}$ влечёт оценки (1.112) и (1.113) . $\square$

Следствие 1.3. Рассмотрим несколько интересных случаев

1. $\alpha = 0,\ \xi = 0$. Функция $\varepsilon \to C_0(\varepsilon, 0)$ ведёт себя , как $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ при $\varepsilon \downarrow 0$ и, следовательно, не ограничена при $\varepsilon \downarrow 0$.

2. $\alpha = 0,\ \xi = \xi_0 > 0$. Функция $\varepsilon \to C_0(\varepsilon, \xi_0)$ ограничена при $\varepsilon \downarrow 0$, следовательно, *задача имеет однородную оценку устойчивости в норме*

$$|||(\mathbf{u}, p)||| = \left(\varepsilon\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \xi_0\|\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|^2 + \|p\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\ . \tag{1.115}$$

3. $\alpha = 1,\ \xi = 0$. Функция $\varepsilon \to C_1(\varepsilon, 0)$ не ограничена при $\varepsilon \downarrow 0$.

4. $\alpha = 1,\ \xi = \xi_0 > 0$. Ограниченность имеет место при $\varepsilon \downarrow 0$, следовательно, мы имеем *однородную оценку устойчивости в норме*

$$|||(\mathbf{u}, p)||| = \left(\varepsilon\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 + \xi_0\|\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|^2 + \|p\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\ . \tag{1.116}$$

Благодаря данным результатам мы видим, что добавление в вариационную задачу Стокса члена $(\mathrm{div}\,\mathbf{u}, \mathrm{div}\,\mathbf{v})$ делает её устойчивой в соответствующей естественной норме $|||(\cdot,\cdot)|||$ *равномерно по* $\varepsilon \in (0, 1]$. Хотя добавление $(\mathrm{div}\,\mathbf{u}, \mathrm{div}\,\mathbf{v})$ не изменяет решения, оно даёт универсальные оценки устойчивости по ε.

Замечание 1.10. В случае $\alpha = 1$ и $\varepsilon \downarrow 0$ задача Стокса является сингулярно-возмущённой. В качестве предельной задачи $(\varepsilon = 0, \xi = 0)$ разумно рассмотреть смешанную формулировку уравнения Пуассона с краевыми условиями Неймана. Вариационная постановка этой предельной задачи использует пространство $\mathbf{H}(\mathrm{div}\,) \times \mathbb{L}_2^0$ с нормой

$$(\mathbf{u}, p) \to \left(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|^2 + \|p\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\ . \tag{1.117}$$

При анализе задачи Стокса мы используем норму

$$|||(\mathbf{u}, p)||| = \left(\varepsilon\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 + \xi\|\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|^2 + \|p\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\ . \tag{1.118}$$

Заметим, что в предельном случае $\varepsilon = 0$ эта норма эквивалентна норме (1.117) только для $\xi > 0$. В этом смысле $\nabla\mathrm{div}$ является естественным стабилизирующим членом для обобщенной задачи Стокса при $\varepsilon \downarrow 0$.

Замечание 1.11. В случае $\alpha = 0$, $\varepsilon \downarrow 0$, $\xi = 0$ однородная оценка устойчивости может быть доказана относительно специальной нормы. Хорошо известно, что стандартная задача Стокса, (1.109) с $\varepsilon = 1$, $\xi = \alpha = 0$, устойчива в норме $(\mathbf{u}, \tilde{p}) \to (\|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \|\tilde{p}\|^2)^{\frac{1}{2}}$ на $\mathbf{H}_0^1 \times \mathbb{L}_2^0$. Подходящее масштабирование переменных непосредственно влечёт устойчивость обобщенной задачи относительно нормы

$$|||(\mathbf{u}, p)|||_* := \left(\|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\|p\|^2\right)^{\frac{1}{2}} . \tag{1.119}$$

Как было сделано выше, можно показать однородную оценку для соответствующего числа обусловленности $C_*(\gamma, \Gamma)$:

$$C_*(\gamma, \Gamma) \leq 4\frac{\sqrt{1 + 4\frac{\Gamma}{\varepsilon}} + 1}{\min\{1\,,\, \varepsilon\gamma\}} \leq C \quad \text{для} \;\; \varepsilon \in (0, 1], \tag{1.120}$$

Однако норма $|||\cdot|||_*$ в (1.119) имеет более сильную анизотропность, чем норма в (1.115).

1.5 Задача Стокса с интерфейсом.

При численном моделировании двух-фазных течений часто используется, так называемый, одно-жидкостный (one-fluid) подход (см. [45]). При таком подходе две фазы жидкости описываются с помощью одной системы законов сохранения для всего течения. Разница в физических характеристиках, в свойствах материалов приводит к разрывам в коэффициентах, входящих в формулировку законов сохранения. Силы действующие на интерфейсах, например, поверхностные натяжения, являются частью таких моделей, как, например, в CSF-модели (Continuum Surface Tension) модель Брекбилл и др. В случае сильно вязких течений это приводит к задаче типа Стокса с разрывными коэффициентами. Перейдём в постановке задачи.

Предположим, что ограниченная область липшицева Ω разбита на две связные непересекающиеся липшицевы подобласти $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$. Через Γ обозначим *интерфейс* – общую границу Ω_1 и Ω_2.

Рассмотрим следующую задачу. Требуется найти p и $\mathbf{u}$, удовлетворяющие системе уравнений

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{div}(\nu(\mathbf{x})\nabla\mathbf{u}) + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{в } \Omega, &(1.121)\\
-\operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 \quad \text{в } \Omega, &(1.122)\\
\mathbf{u} &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega, &(1.123)\\
\nu &= \begin{cases} 1 & \text{в } \Omega_1 \\ \varepsilon > 0 & \text{в } \Omega_2. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Отметим, что с точки зрения моделирования вместо $\nabla\mathbf{u}$ в (1.121) правильнее рассмотреть полный тензор деформации $\mathrm{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T)$. Чтобы сделать изложение более понятным будет использоваться вариант с $\nabla\mathbf{u}$. О переносе результатов на задачу с полным тензором деформации пойдет речь в параграфе 3.6.3. Перейдем к вариационной постановке задачи (1.121)-(1.123). Функция давления (из $\mathbb{L}_2(\Omega)$) определяется из системы (1.121)-(1.123) с точностью до константы. Поэтому при рассмотрении вариационной формулировки и анализе системы обычно используется какая-либо факторизация пространства $\mathbb{L}_2(\Omega)$. Для обощенной задачи Стокса из предыдущего раздела использовалось пространство $\mathbb{L}_2^0$. Для задачи Стокса с интерфейсом оказалось удобным использовать следующее пространство для давления:

$$
\mathbb{M} := \left\{ p \in \mathbb{L}_2(\Omega) \mid \int_\Omega \nu^{-1} p(x)\, dx = 0 \right\} . \tag{1.124}
$$

Если $\nu = const \neq 0$, то пространства $\mathbb{M}$ и $\mathbb{L}_2^0$ совпадают. Слабая постановка задачи (1.121) – (1.123) состоит в нахождении $p \in \mathbb{M}$ и $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1$ таких, что выполняется

$$
(\nu\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) - (\operatorname{div}\mathbf{v}, p) + (\operatorname{div}\mathbf{u}, q) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall\ \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1,\ q \in \mathbb{M}. \tag{1.125}
$$

Билинейная форма $(\nu\nabla\cdot, \nabla\cdot)$ задает скалярное произведение на $\mathbf{H}_0^1$. Мы используем его, чтобы определить следующую норму

$$
\|\mathbf{u}\|_\nu := (\nu\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u})^{\frac{1}{2}} \qquad \text{для} \ \ \mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1 \tag{1.126}
$$

На $\mathbb{M}$ помимо скалярного произведения из $\mathbb{L}_2$ будем использовать $\mathbb{L}_2$-произведение с весом:

$$
(p, q)_M := \int_\Omega \nu^{-1}\, p\, q\, dx = (\nu^{-1}p, q) \qquad \text{для} \ \ p, q \in \mathbb{M}\ , \tag{1.127}
$$

и норму $\|p\|_M := (p,p)_M^{\frac{1}{2}}$. При анализе нами будет использоваться норма $\left(\|\cdot\|_\nu^2 + \|\cdot\|_M^2\right)^{\frac{1}{2}}$, заданная на произведении пространств $\mathbf{H}_0^1 \times \mathbb{M}$ и зависящая от ν.

1.5.1 Infsup-условие устойчивости

В этом разделе мы рассматриваем вариационную задачу (1.125). Введем следующую кусочно-постоянную функцию:

$$\bar{p} = \begin{cases} \quad |\Omega_1|^{-1} & \text{на } \Omega_1 \\ -\varepsilon|\Omega_2|^{-1} & \text{на } \Omega_2. \end{cases} \tag{1.128}$$

и одномерное пространство $\mathbb{M}_0 := \operatorname{span}\{\bar{p}\}$ в $\mathbb{M}$. Рассмотрим $(\cdot,\cdot)_M$-ортогональное разложение $\mathbb{M} = \mathbb{M}_0 \oplus \mathbb{M}_0^\perp$. Для произвольной $p \in \mathbb{M}$ будем использовать обозначения

$$p = p_0 + p_0^\perp\ , \quad p_0 \in \mathbb{M}_0,\ p_0^\perp \in \mathbb{M}_0^\perp \tag{1.129}$$

Легко проверить, что

$$\mathbb{M}_0^\perp = \{\, p \in \mathbb{M} \mid \int_{\Omega_1} p\,dx = \int_{\Omega_2} p\,dx = 0 \,\}$$

По определению форма $(\nu\nabla\cdot, \nabla\cdot)$ эллиптична и непрерывна на пространстве $(\mathbf{H}_0^1, \|\cdot\|_\nu)$: $(\nu\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|_\nu^2$. Непрерывность билинейной формы $(\operatorname{div}\cdot,\cdot)$ доказывается в следующей лемме

Лемма 1.15. *Неравенство*

$$|(\operatorname{div}\mathbf{u}, p)| \le \sqrt{d}\|\mathbf{u}\|_\nu \|p\|_M$$

выполняется для произвольных $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1,\ p \in \mathbb{M}$.

Доказательство. Утверждение немедленно следует из неравенства Коши и оценки $\|\nu^{\frac{1}{2}}\operatorname{div}\mathbf{u}\| \le \sqrt{d}\|\mathbf{u}\|_\nu$ для $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1$.
□

Теорема ниже доказывает однородное по ν infsup-условие устойчивости для задачи (1.125). Оно обобщает хорошо известное неравенство Нечаса (1.68). Нам далее понадобится эквивалентная форма неравенства (1.68): для произвольной $p \in \mathbb{L}_2^0$ существует $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1$ такая, что

$$\|p\|^2 = (\operatorname{div}\mathbf{u}, p) \quad \text{и} \quad c(\Omega)\|\nabla\mathbf{u}\| \le \|p\|. \tag{1.130}$$

Теорема 1.10. *Существует константа $C > 0$, не зависящая от ν такая, что*

$$\sup_{\mathbf{u}\in\mathbf{H}_0^1} \frac{(\operatorname{div}\mathbf{u}, p)}{\|\mathbf{u}\|_\nu} \geq C\|p\|_M \quad \forall\, p \in \mathbb{M}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольную $p \in \mathbb{M}$. Сначала рассмотрим компоненту $p_0^\perp$ разложения $p = p_0 + p_0^\perp$ в (1.129). Так как $p_0^\perp|_{\Omega_k} \in \mathbb{L}_2(\Omega_k)$ и $(p_0^\perp, 1)_{\Omega_k} = 0$ для $k = 1, 2$, мы можем применить неравенство Нечаса в форме (1.130) в каждой подобласти. Таким образом, выберем $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega_1)$ такую, что выполнены следующие соотношения с константой $c(\Omega_1) > 0$:

$$\|p_0^\perp\|_{\Omega_1}^2 = (\operatorname{div}\mathbf{u}_1, p_0^\perp)_{\Omega_1} \quad \text{и} \quad c(\Omega_1)\|\nabla\mathbf{u}_1\|_{\Omega_1} \leq \|p_0^\perp\|_{\Omega_1} \tag{1.131}$$

Аналогично, используя подходящее масштабирование, можем выбрать $\mathbf{u}_2 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega_2)$ такую, что

$$\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} p_0^\perp\|_{\Omega_2}^2 = (\operatorname{div}\mathbf{u}_2, p_0^\perp)_{\Omega_2}, \quad c(\Omega_2)\|\varepsilon^{\frac{1}{2}}\nabla\mathbf{u}_2\|_{\Omega_1} \leq \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} p_0^\perp\|_{\Omega_2}, \tag{1.132}$$

с $c(\Omega_2) > 0$. Продолжая $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ нулём на всю область Ω и складывая оценки (1.131) и (1.132), получаем

$$\|p_0^\perp\|_M^2 = (\operatorname{div}\tilde{\mathbf{u}}, p_0^\perp) \quad \text{and} \quad c_1\|\tilde{\mathbf{u}}\|_\nu \leq \|p_0^\perp\|_M, \quad \tilde{\mathbf{u}} := \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \tag{1.133}$$

с $c_1 = \min\{c(\Omega_1), c(\Omega_2)\}$.

Для компоненты p_0 определим $\tilde{p}_0 := \nu^{-1} p_0$. Заметим, что $(\tilde{p}_0, 1) = (p_0, 1)_M = 0$ и мы можем использовать неравенство Нечаса в Ω: существует вектор-функция $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ такая, что

$$\|\tilde{p}_0\|^2 = (\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}, \tilde{p}_0) \quad \text{и} \quad c(\Omega)\|\nabla\bar{\mathbf{u}}\| \leq \|\tilde{p}_0\|. \tag{1.134}$$

Благодаря определению $\mathbb{M}_0$ получаем

$$\|p_0\|_M^2 = C(\varepsilon, \Omega)\|\tilde{p}_0\|^2 \quad \text{и} \quad (\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}, p_0) = C(\varepsilon, \Omega)(\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}, \tilde{p}_0)$$

с $C(\varepsilon, \Omega) = \frac{\varepsilon|\Omega_1| + |\Omega_2|}{|\Omega_1| + |\Omega_2|}$. Заметим, что

$$C(\varepsilon, \Omega) \geq \tilde{c}(\Omega)\, \max\{1, \varepsilon\}, \quad \tilde{c}(\Omega) := \min\Big\{\frac{|\Omega_1|}{|\Omega|}, \frac{|\Omega_2|}{|\Omega|}\Big\} \tag{1.135}$$

Используя это вместе с (1.134), выводим

$$\|p_0\|_M^2 = (\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}, p_0) \quad \text{и} \quad c_3\max\{1,\sqrt{\varepsilon}\}\|\nabla\bar{\mathbf{u}}\| \le \|p_0\|_M, \tag{1.136}$$

с константой $c_3 = c(\Omega)\,\tilde{c}(\Omega)^{\frac{1}{2}}$, не зависящей от ε. Мы также имеем

$$(\operatorname{div}\tilde{\mathbf{u}}, p_0) = 0, \quad \|\nu^{\frac{1}{2}}\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}\| \le \sqrt{d}\|\bar{\mathbf{u}}\|_\nu,$$
$$\|\bar{\mathbf{u}}\|_\nu \le \max\{1,\sqrt{\varepsilon}\}\|\nabla\bar{\mathbf{u}}\| \le c_3^{-1}\|p_0\|_M$$

Используя теперь результаты в (1.133) и (1.136), получаем для произвольного $\alpha > 0$

$$\begin{aligned}(\operatorname{div}(\alpha\tilde{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}}), p) &= \alpha\|p_0^\perp\|_M^2 + \|p_0\|_M^2 + (\operatorname{div}\bar{\mathbf{u}}, p_0^\perp)\\ &\ge \alpha\|p_0^\perp\|_M^2 + \|p_0\|_M^2 - c_3^{-1}\sqrt{d}\|p_0\|_M\|p_0^\perp\|_M\\ &\ge \frac{1}{2}\|p\|_M^2 \quad \text{если} \quad \alpha \ge \frac{1}{2}(1+\frac{d}{c_3^2}) =: \alpha_0\end{aligned}$$

Наконец, если положить $\mathbf{u} = \alpha_0\tilde{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}}$, то получится

$$\|p\|_M^2 \le 2(\operatorname{div}\mathbf{u}, p) \quad \text{и} \quad \|\mathbf{u}\|_\nu^2 \le 2(\alpha_0^2\|\tilde{\mathbf{u}}\|_\nu^2 + \|\bar{\mathbf{u}}\|_\nu^2) \le c\|p\|_M^2,$$

с константой c, не зависящей от ν. $\square$

1.5.2 Априорные оценки

В силу определений и результатов леммы 1.15 и теоремы 1.10 получаем эллиптичность формы $(\nu\nabla\cdot,\nabla\cdot)$, непрерывность билинейных форм $(\nu\nabla\cdot,\nabla\cdot)$ и $(\operatorname{div}\cdot,\cdot)$, а также infsup-условие устойчивости, относительно норм $\|\cdot\|_\nu$ и $\|\cdot\|_M$ *с константами, не зависящими от* ν.

Стандартными рассуждениями (см. [84, 60]) доказывается, что задача (1.125) имеет единственное решение, для которого выполнена априорная оценка

$$(\|u\|_\nu^2 + \|p\|_M^2)^{\frac{1}{2}} \le c\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}} \tag{1.137}$$

с константой c, не зависящей от $\mathbf{f}$ и ν.

Замечание 1.12. Норма из сопряженного пространства $\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}}$ в (1.137) может быть заменена более "удобной"нормой $\mathbf{f}$. Для этого рассмотрим неравенство типа Пуанкаре:

$$\|\nu^{\frac{1}{2}}\mathbf{v}\| \le C_P\|\mathbf{v}\|_\nu, \quad \forall \;\; \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1. \tag{1.138}$$

Наилучшая константа C_P в (1.138) равномерно ограничена по ν, если выполнено одно из следующих условий:

$$\mathrm{meas}(\partial\Omega_k \cap \partial\Omega) > 0 \quad \text{для} \quad k = 1, 2 \tag{1.139}$$

$$\mathrm{meas}(\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega) > 0 \quad \text{и} \quad \varepsilon \le C \tag{1.140}$$

То, что условие (1.139) достаточно для ограниченности C_P следует из леммы 1 в [125]. Достаточность условия (1.140) для равномерной ограниченности C_P доказывается с помощью следующего рассуждения. Благодаря (1.140) вектор-функция $\mathbf{u}$ равна нулю на части $\partial\Omega_1$ с ненулевой мерой, следовательно,

$$\|\mathbf{u}\|_{\Omega_1} \le c\,\|\nabla\mathbf{u}\|_{\Omega_1}. \tag{1.141}$$

Поэтому

$$\|\mathbf{u}|_\Gamma\| = \|\mathbf{u}|_{\partial\Omega_1}\| \le c\,\|\nabla\mathbf{u}\|_{\Omega_1}. \tag{1.142}$$

В подобласти Ω_2 имеем

$$\varepsilon\|\mathbf{u}\|^2_{\Omega_2} \le c\,\varepsilon(\|\nabla\mathbf{u}\|^2_{\Omega_2} + \|\mathbf{u}|_{\partial\Omega_2}\|^2) = c\,\varepsilon(\|\nabla\mathbf{u}\|^2_{\Omega_2} + \|\mathbf{u}|_\Gamma\|^2). \tag{1.143}$$

Неравенства (1.141), (1.142) и (1.143) влекут неравенство (1.138) с константой C, не зависящей от ε, а следовательно, и от ν.

Предположим, что $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$ и выполнено одно из условий (1.139) или (1.140), тогда неравенство Коши и (1.138) непосредственно влекут априорную оценку

$$(\|\mathbf{u}\|^2_\nu + \|p\|^2_M)^{\frac{1}{2}} \le c\,C_P\|\nu^{-\frac{1}{2}}\mathbf{f}\|, \tag{1.144}$$

с константами c, C_P, не зависящими от $\mathbf{f}$ и ν.

1.6 Система Навье-Стокса.

В ограниченной 2х или 3х-мерной области Ω рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, \\ \mathrm{div}\,\mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \quad \text{в} \ \ \Omega \times (0, T] \tag{1.145}$$

Здесь $\mathbf{f}$ – заданное поле внешних сил, $\nu > 0$ – кинематическая вязкость. Векторное поле скоростей жидкости $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ и скалярная функция кинематического давления $p(t, \mathbf{x})$ не известны. На них накладываются дополнительные условия. Классическим случаем являются условия Дирихле на скорость:

$$\mathbf{u} = \varphi \qquad \partial\Omega \times [0, T] \tag{1.146}$$

(далее будем считать $\varphi \equiv 0$), начальные условия при $t = 0$ для скоростей:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \qquad \bar{\Omega}, \tag{1.147}$$

и интегральное условие $\int_\Omega p(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0 \ \forall t \in (0, T]$ для единственности функции давления. Часто предполагают выполнение условия $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0$, хотя для наших целей в нем нет необходимости.

1.6.1 Различные формы системы.

Рассуждения этого подраздела основываются на следующем формальном соотношении для произвольных (достаточно гладких) функций $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$:

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v} = (\operatorname{curl} \mathbf{v}) \times \mathbf{u} + (\operatorname{curl} \mathbf{u}) \times \mathbf{v} + \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}), \tag{1.148}$$

где $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) = v_1 u_1 + \cdots + v_d u_d$ – скалярная функция.

Если в (1.148) положить $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, то оно превратится в хорошо известное равенство

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = (\operatorname{curl} \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla\Big(\frac{\mathbf{u}^2}{2}\Big). \tag{1.149}$$

Благодаря которому, систему Навье-Стокса (1.145) можно переписать в эквивалентном виде:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u} + \operatorname{curl} \mathbf{u} \times \mathbf{u} + \nabla P & = & \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} & = & 0. \end{array} \qquad \Omega \times \ (0, T] \tag{1.150}$$

Через P в (1.150) мы обозначили давление Бернулли $P = p + \nabla\big(\frac{\mathbf{u}^2}{2}\big)$.

Хотя системы (1.145) и (1.150) математически эквивалентны, применение к ним стандартного аппарата дискретизации приводит к системам алгебраических уравнений с различными свойствами, требующими, зачастую, раздельного численного анализа и разных подходов к решению.

1.6.2 Неявные схемы

Схема для нестационарной задачи.

Целью настоящей работы не является изучение или сравнение различных методов расчёта уравнений Навье-Стокса. Задачи, которые подробно изучаются в работе, возникают как вспомогательные при использовании той или иной схемы для уравнений Навье-Стокса. Поэтому материал данного параграфа мы рассматриваем, как иллюстрацию. На практике, скорее, используются схемы более высокого порядка по времени, которые, однако, требуют решения тех же вспомогательных задач.

Через $N(\mathbf{u},\mathbf{u})$ обозначим нелинейные члены в уравнении Навье-Стокса: $N(\mathbf{u},\mathbf{u}) = (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$ или $N(\mathbf{u},\mathbf{u}) = \operatorname{curl}\mathbf{u}\times\mathbf{u}$, в зависимости от формы записи уравнения. Для данного момента времени t_{n+1} пусть $\mathbf{a}^n$ – экстраполяция поля скоростей по времени с предыдущих временных шагов (например, линейная $\mathbf{a}^n = 2\mathbf{u}(n\delta t) - \mathbf{u}((n-1)\delta t)$ для равномерных шагов по времени). Пусть $N(\mathbf{a},\mathbf{u})$ – линеаризация $N(\mathbf{u},\mathbf{u})$.

Одна из возможных схем расчета уравнений Навье-Стокса имеет вид

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{\delta t}\mathbf{u}^{n+1} - \nu\Delta\mathbf{u}^{n+1} + N(\mathbf{a}^n,\mathbf{u}^{n+1}) + \nabla p^{n+1} & = & \mathbf{f}^{n+1} + \frac{1}{\delta t}\mathbf{u}^n \\ \operatorname{div}\mathbf{u}^{n+1} & = & 0, \\ \mathbf{u}^{n+1}|_{\partial\Omega} & = & 0, \end{array} \tag{1.151}$$

Важным моментом является правильная линеаризация $N(\mathbf{u},\mathbf{u})$.

В случае конвективной и вихревой формы это будет, соответственно, $N(\mathbf{a},\mathbf{u}) = (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{u}$ и $N(\mathbf{a},\mathbf{u}) = \operatorname{curl}\,\mathbf{a}\times\mathbf{u}$. В обоих случаях линеаризация проделана так, что сохраняется кососимметричность билинейной формы $(N(\mathbf{a},\mathbf{u}),\mathbf{v})$, причём в случае конвективной формы важным является равенство $\operatorname{div}\,\mathbf{a} = 0$. Данное свойство кососимметричности обеспечивает эллиптичность возникающих вспомогательных задач, а в физических терминах выполнение законов сохранения. Так, например, решение схемы (1.151) удовлетворяет дискретному аналогу следующей энергетической оценки для (1.145)-(1.147)

$$||\mathbf{u}(t)||^2 + \nu\int_0^t ||\nabla\mathbf{u}(s)||^2 ds \le ||\mathbf{u}_0||^2 + \nu^{-1}\int_0^t ||\mathbf{f}(s)||^2_{-1} ds.$$

Схема для стационарной задачи

Если целью является расчёт установившихся течений, то поиск стационарного предела у нестационарной задачи является часто неприемлемым подходом. Более эффективным подходом является использование специальных итерационных методов. Примером могут стать нелинейные итерации вида: заданы $\{\mathbf{u}_0, p_0\}$, выполняем для $k = 1, 2, \dots$

$$\left(\begin{array}{c} \mathbf{u}_k \\ p_k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \mathbf{u}_{k-1} \\ p_{k-1} \end{array} \right) - \kappa_{k-1} F(\mathbf{u}_{k-1})^{-1} \left(\begin{array}{c} res(\mathbf{u}_{k-1}, p_{k-1}) \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_{k-1} \end{array} \right), \qquad (1.152)$$

где $F(\mathbf{u}_{k-1})$ – производная по Фреше в точке $\mathbf{u}_{k-1}$, $res(\mathbf{u}_{k-1}, p_{k-1})$ – нелинейная невязка для $\mathbf{u}_{k-1}, p_{k-1}$, число κ_{k-1} – параметр релаксации, выбираемый, например, как в адаптивном методе неподвижной точки.

Трудный момент при реализации (1.152) – применение $F(\mathbf{u}_{k-1})^{-1}$. Стандартным подходом является замена $F(\mathbf{u}_{k-1})$ на некоторое приближение $\tilde{F}(\mathbf{u}_{k-1})$, которое легче вычислять. Чтобы быть более точными, рассмотрим вклад нелинейных членов в $F(\mathbf{u}_{k-1})\mathbf{u}$. В случае конвективной формы записи, это

$$(\mathbf{u}_{k-1} \cdot \nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}_{k-1}. \qquad (1.153)$$

Первое слагаемое в (1.153) является кососимметричным и сохраняется в $\tilde{F}(\mathbf{u}_{k-1})\mathbf{u}$, второе можно трактовать, как незнакоопределенную реакцию, оно не включается в $\tilde{F}(\mathbf{u}_{k-1})\mathbf{u}$ в целях обеспечения хороших численных свойств $\tilde{F}(\mathbf{u}_{k-1})$.

В случае вихревой формы вклад нелинейных членов в $F(\mathbf{u}_{k-1})\mathbf{u}$:

$$\operatorname{curl} \mathbf{u}_{k-1} \times \mathbf{u} + \operatorname{curl} \mathbf{u} \times \mathbf{u}_{k-1}. \qquad (1.154)$$

По тем же причинам, что и в случае конвективной формы, первое слагаемое из (1.154) сохраняется в $\tilde{F}(\mathbf{u}_{k-1})\mathbf{u}$, второе не включается в $\tilde{F}(\mathbf{u}_{k-1})\mathbf{u}$.

Замечание 1.13. Полностью неявные итерации (1.152) могут быть использованы и при расчёте нестационарных течений, если в (1.151) линеаризация не производится. Так в [150] утверждается, что (1.151) может быть не очень удачной схемой в некоторых случаях сеток с очень анизотропными элементами и в случае адаптивного контроля шага по времени. В то время как полностью неявный подход работает всегда.

1.6.3 Некоторые вспомогательные неравенства.

Математическая теория уравнений Навье-Стокса – область активных исследований на протяжении всей второй половины 20-ого века и вплоть до настоящего времени. Тем не менее, ряд фундаментальных вопросов, таких как существование и единственность глобальных решений в $\mathbb{R}^m, m \geq 3$, остаются открытыми. Существует несколько подходов к определению слабого решения задачи. Один из них (решения Лерея и Хопфа) состоит в нахождении

$$\begin{gathered}\mathbf{u} \in \mathbb{L}_2(0,T;\mathbf{H}_0^1) \cap \mathbb{L}_\infty(0,T;\mathbf{L}^0) \quad \text{и} \quad p \in \mathbb{L}_2(0,T;\mathbb{L}_2^0),\\ \mathbf{L}^0 \equiv \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega) : \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega,\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ на } \partial\Omega\}.\end{gathered}$$

Функции $\mathbf{u}, p$ удовлетворяют для $\mathbf{f} \in \mathbb{L}_2(0,T;\mathbf{H}^{-1})$ соотношению

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v}\right) + \nu\,(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + (N(\mathbf{u},\mathbf{u}), \mathbf{v}) - b(p,\mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle,\\ &b(q,\mathbf{u}) = 0 \qquad\qquad \forall\ \{\mathbf{v}, q\} \in \mathbf{H}_0^1 \times \mathbb{L}_2^0,\\ &\mathbf{u}(0,\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \qquad\qquad \text{в } \bar{\Omega}.\end{aligned}$$

Эти равенства понимаются в смысле равенства функции из $\mathbb{L}_2(0,T]$. Полагая $\mathbf{W} \equiv \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1 : \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega\}$, можно дать альтернативную формулировку: найти

$$\mathbf{u} \in \mathbb{L}_2(0,T;\mathbf{W}) \cap \mathbb{L}_\infty(0,T;\mathbf{L}^0),$$

удовлетворяющую равенству

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\,t}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu\,(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + (N(\mathbf{u},\mathbf{u}), \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle \quad \forall\ \mathbf{v} \in \mathbf{W}\\ &\mathbf{u}(0,\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \qquad\qquad \text{в } \bar{\Omega}.\end{aligned}$$

Теорема Де Рама связывает оба определения (см. [84], [146]).

Известно, что определённое выше слабое решение всегда существует, а в случае $m = 2$ оно единственно, и, более того, дополнительные условия на $\mathbf{f}$, $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}, \mathbf{u}_0$ и Ω обеспечивают $\mathbf{u} \in \mathbb{L}_2(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega))$ (см. [110]).

Нам понадобятся следующие оценки. Они выводятся благодаря теоремам вложения и неравенству Гёльдера. Для произвольных $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1$

выполняется

$$
\begin{aligned}
|(\operatorname{curl}\mathbf{u}\times\mathbf{v},\mathbf{w})| &\le c\,\|\operatorname{curl}\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|_{L_4}\|\mathbf{w}\|_{L_4}, && (1.155)\\
|(\operatorname{curl}\mathbf{u}\times\mathbf{v},\mathbf{w})| &\le c\,\|\operatorname{curl}\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|_{L_3}\|\mathbf{w}\|_{L_6}, && (1.156)\\
|((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v},\mathbf{w})| &\le c(s)\,\|\mathbf{u}\|_s\|\mathbf{v}\|_1\|\mathbf{w}\|_1, && (1.157)\\
|((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v},\mathbf{w})| &\le c(s)\,\|\mathbf{u}\|_1\|\mathbf{v}\|_s\|\mathbf{w}\|_1, && (1.158)\\
|((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v},\mathbf{w})| &\le c(s)\,\|\mathbf{u}\|_1\|\mathbf{v}\|_1\|\mathbf{w}\|_s, \quad s\in[1/2,1] && (1.159)
\end{aligned}
$$

а также

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{u}\|_{L_4} &\le c\,\|\mathbf{u}\|^{\frac{1}{4}}\|\mathbf{u}\|_1^{\frac{3}{4}}, && (1.160)\\
\|\mathbf{u}\|_{L_3} &\le c\,\|\mathbf{u}\|^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{u}\|_1^{\frac{1}{2}}, && (1.161)\\
\|\mathbf{u}\|_{L_6} &\le c\,\|\mathbf{u}\|_1, && (1.162)\\
\|\mathbf{u}\|_s &\le c(s)\,\|\mathbf{u}\|^{1-s}\|\mathbf{u}\|_1^s. && (1.163)
\end{aligned}
$$

Отметим, что в двухмерном случае индексы пространств и показатели степеней в приведённых выше неравенствах можно улучшить.

1.7 Системы типа Осеена.

Системой типа Осеена назовём систему вида

$$
\begin{aligned}
\alpha\mathbf{u}-\nu\Delta\mathbf{u}+N(\mathbf{a},\mathbf{u})+\nabla p &= \mathbf{f}\\
\operatorname{div}\mathbf{u} &= g, \qquad (1.164)\\
\mathbf{u}|_{\partial\Omega} &= 0,
\end{aligned}
$$

В разделе 1.6 было показано, что система 1.164 возникает, как вспомогательная при решении задачи Навье-Стокса. Система является линейной и при любых $\{\mathbf{f},g\}$ из $\mathbf{H}^{-1}\times\mathbb{L}_2^0$ имеет единственное решение $\{\mathbf{u},p\}$ из $\mathbf{H}_0^1\times\mathbb{L}_2^0$. Априорные оценки для решения выводятся ниже аналогично случаю системы Стокса. Более важными для нас в дальнейшем являются оценки на оператор Шура системы Осеена. В зависимости от используемой формы записи нелинейных членов в исходном уравнении оператор Шура можно записать:

$$S(\mathbf{a}) := -\operatorname{div}\left(\alpha\, I-\nu\Delta+(\mathbf{a}\cdot\nabla)\right)_0^{-1}\nabla$$

или

$$S(\mathbf{w}) := -\mathrm{div}\,(\alpha\, I - \nu\Delta + \mathbf{w}\times)_0^{-1}\nabla, \quad \mathbf{w} = \mathrm{curl}\,\mathbf{a}.$$

Оператор Шура действует из $\mathbb{L}_2^0$ в $\mathbb{L}_2^0$, и, конечно, является линейным. Из теоремы 1.11 следует, что он непрерывный и положительно определенный.

1.7.1 Априорные оценки.

Умножая первое уравнение (1.164) на $\mathbf{u}$, а второе на p, используя кососимметричность билинейной формы $(N(\mathbf{a},\mathbf{u}),\mathbf{v})$ и неравенство Коши, получаем с помощью рассуждений аналогичных рассуждениям из § 1.4.1:

$$\nu\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}\|^2 = \frac{C_F^2}{(\nu + C_F^2\alpha)}\|\mathbf{f}\|^2 + \frac{1}{\delta}\|p\|^2 + \delta\|g\|^2 \quad \forall\,\delta > 0. \tag{1.165}$$

Оценку для давления получаем благодаря неравенству Нечаса и оценкам для билинейной формы $(N(\mathbf{a},\mathbf{u}),\mathbf{v})$ и неравенствам из § 1.6.3:

$$\begin{aligned} c_0\|p\| &\le \sup_{\mathbf{v}}\frac{(p,\mathrm{div}\,\mathbf{v})}{\|\nabla\mathbf{v}\|} = \sup_{\mathbf{v}}\frac{\nu(\nabla\mathbf{u},\nabla\mathbf{v}) + \alpha(\mathbf{u},\mathbf{v}) + (N(\mathbf{a},\mathbf{u}),\mathbf{v}) - (\mathbf{f},\mathbf{v})}{\|\nabla\mathbf{v}\|} \\ &\le \nu\|\nabla\mathbf{u}\| + C_F\alpha\|\mathbf{u}\| + c_1\|\mathbf{a}\|_1\|\nabla\mathbf{u}\|^{\frac12}\|\mathbf{u}\|^{\frac12} + C_F\|\mathbf{f}\|. \end{aligned}$$

Теперь оценка для решения получается из (1.165) с подходящей δ: например достаточно положить

$$\delta = 8c_0^{-1}(\nu + C_F^2\alpha + c_1^2\|\mathbf{a}\|_1^2(\nu\alpha)^{-\frac12})$$

и получить оценки:

$$\nu\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}\|^2 \le \frac{C_F^2}{(\nu + C_F^2\alpha)}\|\mathbf{f}\|^2 + C_F^2\delta^{-1}\|\mathbf{f}\|^2 + \delta\|g\|^2,$$

$$\|p\|^2 \le C_F^2\|\mathbf{f}\|^2 + \delta\frac{C_F^2}{(\nu + C_F^2\alpha)}\|\mathbf{f}\|^2 + \delta^2\|g\|^2.$$

Аналогично задаче Стокса при дополнительных предположениях на Ω и g имеет место оценка:

$$\|\mathbf{u}\|_{H^2} + \|p\|_{H^1} \le c(\nu,\alpha,\mathbf{a})\,(\|\mathbf{f}\| + \|g\|_{H^1}). \tag{1.166}$$

1.7.2 Оценки для оператора давления.

Изучим оператор Шура для давления более подробно. Во-первых, обозначим через S_0 оператор Шура симметричной задачи, т.е. $S_0 = S(\mathbf{a})$ для $\mathbf{a} = 0$. Заметим, что S_0, вообще говоря, не является симметричной частью $S(\mathbf{a})$, т.е. в общем случае $S_0 \neq \frac{1}{2}(S(\mathbf{a}) + S^*(\mathbf{a}))$. В следующей теореме через S обозначатся оператор Шура как для конвективной формы, так и для вихревой.

Теорема 1.11. *Для любых $\alpha > 0, \nu > 0$ и $\mathbf{a} \in \mathbf{H}_0^1$ выполняются оценки*

$$\begin{aligned}
\gamma_1\|p\|^2 &\le (Sp,p) \le \gamma_2\|p\|^2 && (1.167)\\
(Sp,q) &\le \gamma_3(Sp,p)^{\frac{1}{2}}(Sq,q)^{\frac{1}{2}}, && (1.168)\\
\gamma_4\|p\|^2 &\le (S^{-1}p,p), && (1.169)\\
\gamma_5(S_0p,p) &\le (Sp,p) \le (S_0p,p) && (1.170)\\
\gamma_5(S_0^{-1}p,p) &\le (S^{-1}p,p), && (1.171)
\end{aligned}$$

с произвольными $p, q \in \mathbb{L}_2^0(\Omega)$ и

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{1}{4\,c_0}\big(C_F\alpha + \nu + K(\nu,\alpha,\mathbf{a})\big)^{-1},\\
\gamma_2 &= \nu^{-1},\\
\gamma_3 &= \big(1 + C(\nu,\alpha,\mathbf{a})\big),\\
\gamma_4 &= \nu,\\
\gamma_5 &= \big(1 + C(\nu,\alpha,\mathbf{a})^2\big)^{-1}.
\end{aligned}$$

Константы $K(\nu,\alpha,\mathbf{a})$ и $C(\nu,\alpha,\mathbf{a})$ могут быть выбраны следующим образом:

$$K(\nu,\alpha,\mathbf{a}) = c\frac{\|\mathbf{a}\|_1^2}{\sqrt{\alpha\nu}}\ (\alpha \neq 0) \quad \text{или} \quad K(\nu,\alpha,\mathbf{a}) = c\frac{\|\mathbf{a}\|_1^2}{\nu}.$$

и

$$C(\nu,\alpha,\mathbf{a}) = c\frac{\|\mathbf{a}\|_1}{\sqrt{\nu}\,(\alpha\nu)^{\frac{1}{4}}}\ (\alpha \neq 0) \quad \text{или} \quad C(\nu,\alpha,\mathbf{a}) = c\frac{\|\mathbf{a}\|_1}{\nu}.$$

Более того, при большей гладкости $\mathbf{a}$ и $\alpha > 0$ зависимость констант $K(\nu,\alpha,\mathbf{a})$ и $C(\nu,\alpha,\mathbf{a})$ от ν может быть ослаблена. Например, при вихревой форме

$$K(\nu,\alpha,\mathbf{a}) = c\frac{\|\mathrm{curl}\,\mathbf{a}\|_{L_3}^2}{\alpha}, \quad C(\nu,\alpha,\mathbf{a}) = c\frac{\|\mathrm{curl}\,\mathbf{a}\|_{L_\infty}}{\alpha}.$$

Доказательство. Для определённости рассмотрим вихревую форму для задачи типа Осеена. Отметим очевидное неравенство $\|\operatorname{curl}\mathbf{a}\| \le \|\mathbf{a}\|_1$ для $\mathbf{a} \in \mathbf{H}_0^1$, более того, при условии $\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$ неравенство обращается в равенство. Там где потребуется сделаем замечания по ходу доказательства об отличии в рассуждениях для конвективной формы. Докажем сначала оценки (1.167) при условии $\alpha > 0$. С этой целью выберем произвольные $\nu > 0, \alpha > 0, \mathbf{a} \in \mathbf{H}_0^1, p \in \mathbb{L}_2^0$ и рассмотрим вспомогательный вектор скоростей $\mathbf{u}_1$ из $\mathbf{H}_0^1$, являющийся решением

$$\alpha(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + \nu(\nabla\mathbf{u}_1, \nabla\mathbf{v}) + (\operatorname{curl}\mathbf{a} \times \mathbf{u}_1, \mathbf{v}) = -(p, \operatorname{div}\mathbf{v}), \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1. \tag{1.172}$$

По определению S имеем $(Sp, p) = -(\operatorname{div}\mathbf{u}_1, p)$. Следовательно, полагая $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1$ в (1.172), получаем

$$(Sp, p) = \alpha\|\mathbf{u}_1\|^2 + \nu\|\nabla\mathbf{u}_1\|^2. \tag{1.173}$$

Далее мы используем частный случай неравенства (1.97):

$$c_0\|p\|^2 \le (\operatorname{div}\Delta_0^{-1}\nabla p, p) \le \|p\|^2 \quad \forall\, p \in \mathbb{L}_2^0. \tag{1.174}$$

Рассмотрим ещё одну вспомогательную вектор-функцию $\mathbf{u}_2$ из $\mathbf{H}_0^1$, являющуюся решением

$$(\nabla\mathbf{u}_2, \nabla\mathbf{v}) = -(p, \operatorname{div}\mathbf{v}) \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1. \tag{1.175}$$

Так же, как и ранее, получаем

$$-(\operatorname{div}\Delta_0^{-1}\nabla p, p) = \|\nabla\mathbf{u}_2\|^2 \tag{1.176}$$

Положим теперь в (1.172) и (1.175) $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1$, вычтем (1.175) из (1.172) и используем ε-неравенство с $\varepsilon = \nu$ для оценки $(\nabla\mathbf{u}_2, \nabla\mathbf{u}_1)$. Получаем

$$2\alpha\|\mathbf{u}_1\|^2 + \nu\|\nabla\mathbf{u}_1\|^2 \le \nu^{-1}\|\mathbf{u}_2\|_1^2.$$

Откуда оценка

$$(Sp, p) \le \nu^{-1}\|p\|^2$$

непосредственно следует в силу (1.173), (1.174) и (1.176).

Теперь докажем оценку снизу для S. Положим $\mathbf{v} = \mathbf{u}_2$ в (1.172) и (1.175). Вычитая (1.175) из (1.172), получаем следующую цепочку неравенств.

$$\|\nabla\mathbf{u}_2\|^2 = \alpha(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2) + \nu(\nabla\mathbf{u}_1,\nabla\mathbf{u}_2) + (\operatorname{curl}\mathbf{a}\times\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)$$
$$\le \rho\alpha^2\|\mathbf{u}_1\|^2 + \frac{1}{4}\|\nabla\mathbf{u}_2\|^2 + \nu^2\|\nabla\mathbf{u}_1\|^2 + \frac{1}{4}\|\nabla\mathbf{u}_2\|^2 + c\|\operatorname{curl}\mathbf{a}\|\|\mathbf{u}_1\|_{L_3}\|\mathbf{u}_2\|_{L_6}$$
$$\le \frac{1}{2}\|\nabla\mathbf{u}_2\|^2 + (\rho\alpha+\nu)(\alpha\|\mathbf{u}_1\|^2 + \nu\|\nabla\mathbf{u}_1\|^2) + c\|\operatorname{curl}\mathbf{a}\|\|\mathbf{u}_1\|^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{u}_2\|_1^{\frac{3}{2}}$$
$$\le \frac{1}{2}\|\nabla\mathbf{u}_2\|^2 + (\rho\alpha+\nu)(\alpha\|\mathbf{u}_1\|^2 + \nu\|\nabla\mathbf{u}_1\|^2) + c\|\operatorname{curl}\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{u}_1\|\|\nabla\mathbf{u}_1\| + \frac{1}{4}\|\nabla\mathbf{u}_2\|^2$$
$$\le \frac{3}{4}\|\nabla\mathbf{u}_2\|^2 + (\rho\alpha+\nu)(\alpha\|\mathbf{u}_1\|^2 + \nu\|\nabla\mathbf{u}_1\|^2) + c\frac{\|\operatorname{curl}\mathbf{a}\|^2}{\sqrt{\nu\alpha}}(\alpha\|\mathbf{u}_1\|^2 + \nu\|\nabla\mathbf{u}_1\|^2).$$

Для оценки $|(\operatorname{curl}\mathbf{a}\times\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)|$ мы здесь использовали (1.156), (1.161) и (1.162). Если рассматривается конвективная форма, то оценка

$$|(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)| \le c\|\mathbf{a}\|_1\|\mathbf{u}_1\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\mathbf{u}_1\|^{\frac{1}{2}}\|\nabla\mathbf{u}_2\|$$

получается последовательным применением (1.158) и (1.163). Следовательно, как в случае вихревой, так и конвективной формы, имеем

$$\|\nabla\mathbf{u}_2\|^2 \le 4(\rho\alpha+\nu+c\frac{\|\mathbf{a}\|_1^2}{\sqrt{\nu\alpha}})(\alpha\|\mathbf{u}_1\|^2 + \nu\|\nabla\mathbf{u}_1\|^2).$$

Последнее неравенство вместе с (1.173), (1.174) и (1.176) доказывает оценку (1.167) с константой $K(\nu,\alpha,\mathbf{a}) = c\frac{\|\mathbf{a}\|_1^2}{\sqrt{\nu\alpha}}$.

Равенство (1.172) с $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1$ даёт

$$\nu(\operatorname{div}\mathbf{u}_1,\operatorname{div}\mathbf{u}_1) \le -(\operatorname{div}\mathbf{u}_1,p),$$

это ни что другое, как

$$\nu(Sp,Sp) \le (Sp,p).$$

Делая замену $q = Sp$, получаем неравенство (1.169) с $\gamma_4 = \nu$.

Для доказательства оценки (1.168) зафиксируем произвольную $q \in \mathbb{L}_2^0(\Omega)$ и рассмотрим $\mathbf{u}_2$ – решение уравнения

$$\alpha(\mathbf{u}_2,\mathbf{v}) + \nu(\nabla\mathbf{u}_2,\nabla\mathbf{v}) + (\operatorname{curl}\mathbf{a}\times\mathbf{u}_2,\mathbf{v}) = -(q,\operatorname{div}\mathbf{v}), \quad \forall\,\mathbf{v}\in\mathbf{H}_0^1. \tag{1.177}$$

Аналогично (1.173) имеем

$$(Sq,q) = \alpha\|\mathbf{u}_2\|^2 + \nu\|\nabla\mathbf{u}_2\|^2.$$

По определению оператора S выполнено равенство $(Sp,q) = -(\operatorname{div}\mathbf{u}_1, q)$ для $\mathbf{u}_1$ из (1.172), поэтому, полагая в (1.177) $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1$, получаем

$$\begin{gathered}
(Sp,q) = \alpha(\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_1) + \nu(\nabla\mathbf{u}_2,\nabla\mathbf{u}_1) + (\operatorname{curl}\mathbf{a}\times\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_1)\\
\le (\alpha\|\mathbf{u}_1\|^2 + \nu\|\nabla\mathbf{u}_1\|^2)^{\frac12}(\alpha\|\mathbf{u}_2\|^2 + \nu\|\nabla\mathbf{u}_2\|^2)^{\frac12} + c\|\operatorname{curl}\mathbf{a}\|\|\mathbf{u}_1\|_{L_4}\|\mathbf{u}_2\|_{L_4}\\
\le (Sp,p)^{\frac12}(Sq,q)^{\frac12} + c\|\operatorname{curl}\mathbf{a}\|\|\mathbf{u}_1\|^{\frac14}\|\mathbf{u}_2\|^{\frac14}\|\nabla\mathbf{u}_1\|^{\frac34}\|\nabla\mathbf{u}_2\|^{\frac34}\\
\le (Sp,p)^{\frac12}(Sq,q)^{\frac12} + c\|\operatorname{curl}\mathbf{a}\|(\frac{1}{2\varepsilon}\|\mathbf{u}_1\|^{\frac12}\|\nabla\mathbf{u}_1\|^{\frac12}\|\mathbf{u}_2\|^{\frac12}\|\nabla\mathbf{u}_2\|^{\frac12} + \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla\mathbf{u}_1\|\|\nabla\mathbf{u}_2\|)\\
\le (Sp,p)^{\frac12}(Sq,q)^{\frac12} + c\|\operatorname{curl}\mathbf{a}\|(\frac{1}{4\varepsilon\delta}\|\mathbf{u}_1\|\|\mathbf{u}_2\| + (\frac{\delta}{4\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2})\|\nabla\mathbf{u}_1\|\|\nabla\mathbf{u}_2\|)
\end{gathered}$$

Если рассматривается конвективная форма, то оценка

$$|(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)| \le c\|\mathbf{a}\|_1\|\nabla\mathbf{u}\|^{\frac14}\|\mathbf{u}_2\|^{\frac14}\|\nabla\mathbf{u}\|_1^{\frac34}\|\nabla\mathbf{u}_2\|^{\frac34}$$

получается последовательным применением (1.158), (1.159) и (1.163). Так как ε и δ – произвольные положительные константы, то выберем в последнем неравенстве $\delta = \frac12\left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^{\frac12}$ и $\varepsilon = \frac12\left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^{\frac14}$. Получаем

$$\begin{gathered}
(Sp,q) \le (Sp,p)^{\frac12}(Sq,q)^{\frac12} + c\frac{\|\operatorname{curl}\mathbf{a}\|}{\sqrt{\nu}\,(\alpha\nu)^{\frac14}}(\alpha\|\mathbf{u}_1\|\|\mathbf{u}_2\| + \nu\|\nabla\mathbf{u}_1\|\|\nabla\mathbf{u}_2\|)\\
\le (Sp,p)^{\frac12}(Sq,q)^{\frac12} + c\frac{\|\mathbf{a}\|_1}{\sqrt{\nu}\,(\alpha\nu)^{\frac14}}(\alpha\|\mathbf{u}_1\|^2 + \nu\|\nabla\mathbf{u}_1\|^2)^{\frac12}(\alpha\|\mathbf{u}_2\|^2 + \nu\|\nabla\mathbf{u}_2\|^2)^{\frac12}\\
= (Sp,p)^{\frac12}(Sq,q)^{\frac12} + c\frac{\|\mathbf{a}\|_1}{\sqrt{\nu}\,(\alpha\nu)^{\frac14}}(Sp,p)^{\frac12}(Sq,q)^{\frac12}.
\end{gathered}$$

Следовательно, как в случае вихревой, так и конвективной формы, оценка (1.168) доказана с $C(\nu,\alpha,\mathbf{a}) = c\frac{\|\mathbf{a}\|_1}{\sqrt{\nu}\,(\alpha\nu)^{\frac14}}$.

Оценка (1.170) доказывается аналогично (1.167). Вместо (1.175) мы выбираем теперь $\mathbf{u}_2$, как решение уравнения

$$\alpha(\mathbf{u}_2,\mathbf{v}) + \nu(\nabla\mathbf{u}_2,\nabla\mathbf{v}) = -(p,\operatorname{div}\mathbf{v}), \quad \forall\,\mathbf{v}\in\mathbf{H}_0^1.$$

Слагаемое $(\operatorname{curl}\mathbf{a}\times\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)$ оценивается точно так же, как при доказательстве (1.168).

Заключительная оценка (1.171) доказывается следующим образом. Для заданного $p \in \mathbb{L}_2^0$ рассмотрим p_1 и p_2, как решение вместе с $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ вариационных уравнений: $\forall\ \{\mathbf{v}, q\} \in \mathbf{H}_0^1 \times \mathbb{L}_2^0$

$$\begin{array}{rcl} \alpha(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + \nu(\nabla \mathbf{u}_1, \nabla \mathbf{v}) - (p_1, \operatorname{div} \mathbf{v}) & = & 0, \\ (\operatorname{div} \mathbf{u}_1, q) & = & (p, q) \end{array} \tag{1.178}$$

и

$$\begin{array}{rcl} \alpha(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) + \nu(\nabla \mathbf{u}_2, \nabla \mathbf{v}) + (\operatorname{curl} \mathbf{a} \times \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) - (p_2, \operatorname{div} \mathbf{v}) & = & 0, \\ (\operatorname{div} \mathbf{u}_2, q) & = & (p, q). \end{array} \tag{1.179}$$

Неравенство (1.171) равносильно

$$\gamma_5(p_1, p) \le (p_2, p) \tag{1.180}$$

Более того, справедливы равенства

$$\begin{array}{rcccccl} (p_1, p) & = & (p_1, \operatorname{div} \mathbf{u}_2) & = & (p_1, \operatorname{div} \mathbf{u}_1) & = & \alpha\|\mathbf{u}_1\|^2 + \nu\|\nabla \mathbf{u}_1\|^2, \\ (p_2, p) & = & (p_2, \operatorname{div} \mathbf{u}_1) & = & (p_2, \operatorname{div} \mathbf{u}_2) & = & \alpha\|\mathbf{u}_2\|^2 + \nu\|\nabla \mathbf{u}_2\|^2. \end{array} \tag{1.181}$$

Положим в (1.178) $\mathbf{v} = \mathbf{u}_2$, а в (1.179) $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1$, вычитание одного равенства из другого даёт

$$(p_1, \operatorname{div} \mathbf{u}_2) = (p_2, \operatorname{div} \mathbf{u}_1) - (\operatorname{curl} \mathbf{a} \times \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1) \tag{1.182}$$

Также как при доказательстве оценки (1.168) получаем

$$|(\operatorname{curl} \mathbf{a} \times \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1)| \le \frac{1}{2}(\alpha\|\mathbf{u}_1\|^2 + \nu\|\nabla \mathbf{u}_1\|^2) + c\frac{\|\mathbf{a}\|_1^2}{\nu\,(\alpha\nu)^{\frac{1}{2}}}(\alpha\|\mathbf{u}_2\|^2 + \nu\|\nabla \mathbf{u}_2\|^2).$$

Использование последней оценки вместе с (1.181) и (1.182) даёт (1.180). Следовательно, неравенство (1.171) доказано.

Если функция $\mathbf{a}$ является более гладкой, то можно использовать другие оценки для кососимметричного слагаемого:

$$\begin{array}{rcl} |(\operatorname{curl} \mathbf{a} \times \mathbf{u}, \mathbf{v})| & \le & c\|\operatorname{curl} \mathbf{a}\|_{L_3}\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|_{L_6} \\ |(\operatorname{curl} \mathbf{a} \times \mathbf{u}, \mathbf{v})| & \le & c\|\operatorname{curl} \mathbf{a}\|_{L_\infty}\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \end{array}$$

Аналогичные предыдущему рассуждения приведут к другим константам γ_1, γ_3 и γ_5.

Точно также рассматривается случай $\alpha = 0$. Единственное различие – использование нормы $\|\nabla\cdot\|$ вместо $\|\cdot\|$ при оценке кососимметричного слагаемого. Это всегда может быть сделано благодаря неравенству Фридрихса.

$\square$

1.8 Выводы

В этой главе были рассмотрены уравнения и системы уравнений в частных производных, возникающие, в частности, в приложениях, связанных с моделированием движения жидкостей и газов. Эти задачи имеют особенности при стремлении некоторых физических или численных параметров к своим критическим значениям. Выше были доказаны априорные оценки для решений и частных производных решений, в которых особое внимание уделено зависимости “констант” от различных параметров. Эти оценки будут необходимы в следующей главе для доказательства оценок сходимости методов конечных элементов. Для задач седлового типа были доказаны равномерные по соответствующим параметрам условия устойчивости типа inf-sup неравенств. Эти оценки послужат далее для обоснования универсальности по параметрам блочных переобуславливателей для соответствующих матриц систем алгебраических уравнений. В конце главы мы обсудили линеаризированные уравнения Навье-Стокса в различных формах и получили оценки на операторы окаймления для давления линеризованных систем уравнений.

Глава 2

Устойчивые методы конечных элементов

Если в данной главе не сделано других предположений и уточнений, то мы будем предполагать заданным семейство $(\mathcal{T}_h)$ квазиравномерных триангуляций Ω с параметром разбиения h. Через $\mathbb{V}_h \subset \mathbb{H}^1(\Omega)$ будем обозначать кусочно-элементное подпространство $\mathbb{H}^1(\Omega)$, состоящее из кусочно-полиномиальных функций степени $r \in \mathbb{N}$.

Далее нам понадобится *обратное неравенство* вида

$$\|\nabla v_h\| \le \mu_u h^{-1} \|v_h\| \quad \text{для всех} \;\; v_h \in \mathbb{V}_h. \tag{2.1}$$

Предположим следующие аппроксимационные свойства пространств $\mathbb{V}_h$ (см, например, [67]): существует оператор интерполяции $I_h : \mathbb{H}^1(\Omega) \to \mathbb{V}_h$ такой, что

$$\|u - I_h u\| \le C h^m \|u\|_m \,, \quad m = 0, \ldots, r+1 \quad \text{для } u \in \mathbb{H}^m(\Omega) \tag{2.2}$$

$$\|u - I_h u\|_1 \le C h^{m-1} \|u\|_m \,, \quad m = 1, \ldots, r+1 \quad \text{для } u \in \mathbb{H}^m(\Omega)\,. \tag{2.3}$$

В (2.2) мы использовали обозначение $\mathbb{H}^0(\Omega) := \mathbb{L}_2(\Omega)$ и $\|\cdot\|_0 := \|\cdot\|$.

2.1 Уравнения реакции-диффузии.

В этом разделе $\mathbb{V}_h$ является подпространством $\mathbb{H}^1_0$. Рассмотрим следующую дискретную задачу: найти $u_h \in \mathbb{V}_h$ такую, что

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \text{для всех} \quad v_h \in \mathbb{V}_h. \tag{2.4}$$

где
$$a(u,v)=\varepsilon(\nabla u,\nabla v)+(d\,u,v)\quad \text{для } u,v\in\mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

2.1.1 Сходимость.

Ниже доказаны оценки на норму разности между непрерывным решением и конечно-элементным. Для $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ этот результат был доказан в [154]. Тем не менее, используемые в [154] рассуждения можно обобщить на случай $\Omega\subset\mathbb{R}^3$. В целях завершенности изложения ниже приводится доказательство.

Лемма 2.1. *Пусть u – решение* (1.3)*, а u_h – соответствующее конечно-элементное решение* (2.4)*. Тогда имеет место оценка*
$$\|u-u_h\|\le c\min\left\{1,\frac{h^2}{\varepsilon}\right\}\|f\| \tag{2.5}$$
с константой c, не зависящей от f, ε, h.

Доказательство. Положим $e_h=u-u_h$. Замечая, что
$$a(e_h,v_h)=0\quad\text{для всех}\quad v_h\in\mathbb{V}_h,$$
получаем
$$d_0\|e_h\|^2\le a(e_h,e_h)=a(u,e_h)=(f,e_h)\le\|f\|\|e_h\|,$$
следовательно,
$$\|e_h\|\le d_0^{-1}\|f\|. \tag{2.6}$$
Для произвольной $v_h\in\mathbb{V}_h$ имеем
$$\begin{aligned}&\varepsilon|e_h|_1^2+d_0\|e_h\|^2\le a(e_h,e_h)=a(u-v_h,e_h)\\&\ \le\varepsilon|u-v_h|_1|e_h|_1+d_1\|u-v_h\|\|e_h\|\\&\ \le(\varepsilon|u-v_h|_1^2+\frac{d_1^2}{d_0}\|u-v_h\|^2)^{\frac12}(\varepsilon|e_h|_1^2+d_0\|e_h\|^2)^{\frac12}\end{aligned}$$

В качестве v_h возьмем интерполянт к u из $\mathbb{V}_h$, удовлетворяющий (2.2) – (2.3). Используя свойства (2.2) – (2.3) для $m=2$ и априорные оценку (1.6), выводим
$$\varepsilon|e_h|_1^2+d_0\|e_h\|^2\le c\frac{h^2}{\varepsilon}(1+\frac{h^2}{\varepsilon})\|f\|^2. \tag{2.7}$$

Теперь используем рассуждения двойственности. Пусть $w \in \mathbb{H}_0^1$ такое, что $a(w, v) = (e_h, v)$ для всех $v \in \mathbb{H}_0^1$. Из Леммы 1.1 следует $w \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ и $\|w\|_2 \le \frac{c}{\varepsilon}\|e_h\|$. Путь w_h – интерполянт к w из $\mathbb{V}_h$, удовлетворяющий (2.2) – (2.3). Выполняются соотношения:

$$\begin{aligned}\|e_h\|^2 &= a(w, e_h) = a(w - w_h, e_h) \le \varepsilon |w - w_h|_1 |e_h|_1 + d_1 \|w - w_h\| \|e_h\| \\ &\le c\,(\varepsilon\, h \|w\|_2 |e_h|_1 + d_1 h^2 \|w\|_2 \|e_h\|) \le c(h|e_h|_1 + d_1 \frac{h^2}{\varepsilon}\|e_h\|)\|e_h\|.\end{aligned}$$

Теперь используя (2.6) и (2.7), мы получаем для $\frac{h^2}{\varepsilon} \le 1$

$$\begin{aligned}\|e_h\| &\le c(h|e_h|_1 + \frac{h^2}{\varepsilon}\|f\|) \\ &\le c\,h\frac{h}{\varepsilon}\big(1 + \frac{h^2}{\varepsilon}\big)^{\frac{1}{2}}\|f\| + c\frac{h^2}{\varepsilon}\|f\| \le c\frac{h^2}{\varepsilon}\|f\|.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Комбинация (2.6) и (2.8) доказывает оценку (2.5). □

2.2 Уравнения конвекции-диффузии.

2.2.1 Метод диффузии вдоль потока – конечных элементов.

В этом параграфе будет рассмотрен способ построения схем высокого порядка сходимости для уравнений конвекции-диффузии, устойчивых к появлению численных осцилляций. Метод известен под названием SUPG-метод – аббревиатура от Streamline Upwinding Petrov Galerkin. Он был предложен Бруксом и Хьюгесом в 1979 году и позже заслужил внимание многих исследователей. Метод SUPG хорошо подходит для дискретизации уравнений с конвективными членами методом конечных элементов.

Предположим, что задана триангуляция T_h области. Для каждого элемента триангуляции задан некоторый параметр δ_τ, зависящий от ε и $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \{a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x})\}$. В методе SUPG для уравнения конвекции-диффузии конечно-элементное решение $u_h \in \mathbb{V}_h$ удовлетворяет следующему соотношению для любой функции v_h из $\mathbb{V}_h$

$$\begin{gathered}\varepsilon(\nabla u_h, \nabla v_h) + (\mathbf{a}\cdot\nabla u_h, v_h) \\ + \sum_{\tau \in T_h} \delta_\tau(-\varepsilon \Delta u_h + \mathbf{a}\cdot\nabla u_h - f, \mathbf{a}\cdot\nabla v_h)_\tau = (f, v_h).\end{gathered} \tag{2.9}$$

Сделаем следующие пояснения.

1. Первый и второй член в левой части (2.9), также как и правая часть, возникают из слабой постановки задачи (1.9) и составляют стандартный метод конечных элементов. Дополнительный член, роль которого будет видна позже, можно рассматривать как равенство (1.9) скалярно умноженное на $\mathbf{a}\cdot\nabla v_h$ на каждом элементе τ. Для решения дифференциальной задачи (1.9) этот член обращается в ноль.

2. Третий член в (2.9) вычисляется поэлементно. Напомним обозначение
$$(\phi, \psi)_\tau := \int_\tau \phi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$
Так как на каждом отдельном элементе триангуляции функция u_h является гладкой (полином конечной степени), то третий член в (2.9) определен корректно. Более того, для линейных или билинейных конечных элементов справедливо: $\Delta u_h = 0$.

3. Если $\delta_\tau = 0$ для любого τ, то метод (2.9) превращается в стандартный метод Галеркина конечных элементов для уравнения (1.9). Стабилизирующий эффект дополнительного члена допускает ясную трактовку для линейных или билинейных конечных элементов и однородного параметра $\delta_\tau = \delta$. В случае $\Delta u_h = 0$ единственным "новым" членом, добавляемым в (2.9) и зависящим от u_h, является
$$\delta(\mathbf{a}\cdot\nabla u_h, \mathbf{a}\cdot\nabla v_h) = \delta([\mathbf{a}\oplus\mathbf{a}]\nabla u_h, \nabla v_h).$$
Последнее выражение можно трактовать как дискретизацию методом конечных элементов анизотропной диффузии (для гладкой u):
$$-\delta\, \mathrm{div}\,([\mathbf{a}\oplus\mathbf{a}]\nabla u). \tag{2.10}$$
Главная ось тензора $[\mathbf{a}\oplus\mathbf{a}]$ совпадает с направлением потока $\mathbf{a}$. Поэтому (2.10) добавляет искусственную диффузию только вдоль потока, а не изотропно, как методы искусственной вязкости, что делает метод SUPG более точным. В тоже время, при $\delta > 0$, благодаря дополнительной искусственной диффузии, мы можем ожидать улучшение устойчивости схемы к появлению численных осцилляций.

4. В отличии от разностной схемы против потока 1-ого порядка и методов искусственной вязкости в методе SUPG дополнительный член
$$\sum_{\tau} \delta_\tau (f, \mathbf{a}\cdot\nabla v_h)$$
добавляется также в правую часть уравнения относительно u_h, см. соотношение (2.9). Так обеспечивается совместность конечно-элементной постановки задачи (2.9): для любой $v_h \in \mathbb{V}_h$ непрерывное решение уравнений (1.9) удовлетворяет (2.9), если его подставить вместо u_h. Это позволяет получить результаты о сходимости высокого порядка для решения (2.9).

5. Оптимальный выбор параметра δ_τ является "тонким" вопросом. Говоря схематично, хорошо бы добавлять искусственную диффузию только в тех подобластях Ω, где сеточное число Пеклета Pe_h велико. *Сеточное число Пеклета* Pe_h определяется локально для каждого элемента $\tau \in T_h$, как
$$\mathrm{Pe}_h = \frac{h_\tau \|\mathbf{a}\|_\tau}{2\varepsilon},$$
где $\|\mathbf{a}\|_\tau$ – локальная норма $\mathbf{a}$ на элементе τ (в дальнейшем для $\mathbf{a}$ будем использовать норму из $\mathbb{L}_\infty$), h_τ – диаметр элемента τ.

   Общей рекомендацией является выбор параметра δ_τ так, чтобы выполнялся "закон двойной асимптотики":
$$\delta_\tau \approx \frac{h^2}{\varepsilon} \quad \text{для} \quad \mathrm{Pe}_h \to 0, \tag{2.11}$$
$$\delta_\tau \approx \frac{h_\tau}{\|\mathbf{a}\|_\tau} \quad \text{для} \quad \mathrm{Pe}_h \to \infty. \tag{2.12}$$
   Как альтернативу (2.11), иногда рекомендуют выбирать $\delta_\tau = 0$ для $\mathrm{Pe}_h \le 1$, возвращаясь в этом случае к стандартному методу Галеркина.

   Приведем некоторые конкретные примеры формул для выбора δ_τ из тех, что часто встречаются в литературе:
$$\delta_\tau = \tfrac{1}{2}\left(\coth(\mathrm{Pe}_h) - \tfrac{1}{\mathrm{Pe}_h}\right), \tag{2.13}$$
$$\delta_\tau = \bar{\delta}\tfrac{h_\tau}{\|\mathbf{a}\|_\tau}\tfrac{\mathrm{Pe}_h}{(1+\mathrm{Pe}_h)}, \quad \bar{\delta} \in [0.2, 1], \tag{2.14}$$
$$\delta_\tau = \tfrac{h_\tau}{2\|\mathbf{a}\|_\tau}\left(1 - \tfrac{1}{\mathrm{Pe}_h}\right) \text{ для } \mathrm{Pe}_h \ge 1,\ \delta_\tau = 0 \text{ иначе.} \tag{2.15}$$

Теорема ниже представляет типичный результат (см., например, [112]) о сходимости высокого порядка для SUPG метода.

Естественной нормой для анализа устойчивости и сходимости метода SUPG является следующая норма, зависящая от триангуляции, на $\mathbb{H}^1(\Omega)$:

$$|||u||| := \left(\varepsilon\|\nabla u\|^2 + \sum_{\tau\in T_h}\delta_\tau\|\mathbf{a}\cdot\nabla u\|_\tau^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

где предполагается, что $\mathbf{a}$ имеет конечную $\mathbb{L}_\infty$-норму на каждом τ. Для дальнейшего удобства введем еще обозначение

$$a_\tau := \|\mathbf{a}\|_{\infty,\tau} = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x}\in\tau}(|a_1(\mathbf{x})| + |a_2(\mathbf{x})|).$$

Наконец, нам понадобится константа μ_h из "второго" обратного неравенства (первое было (2.1))

$$\|\Delta v_h\|_\tau \le \mu_h\, h_\tau^{-1}\|\nabla v_h\|_\tau \quad \forall\,\tau\in T_h,\ v_h\in\mathbb{V}_h. \tag{2.16}$$

Заметим, что $\mu_h = 0$ для линейных конечных элементов.

Теорема 2.1. *Предположим, что* $\mathbf{a}\in\mathbf{L}_\infty(\Omega)$ *и* $\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$. *Пусть* $u(x,y)$ *является достаточно гладким решением задачи* (1.9). *Рассмотрим задачу* (2.9) *с параметрами* δ_τ, *удовлетворяющими условию*

$$0 \le \delta_\tau \le \frac{h_\tau^2}{\mu\varepsilon} \quad \forall\,\tau\in T_h, \tag{2.17}$$

где $\mu = \min\{1,\mu_h\}$. *Тогда* (2.9) *имеет единственное решение* u_h *из* $\mathbb{V}_h$ *и*

$$|||u-u_h|||^2 \le c\sum_{\tau\in T_h}\left(\varepsilon + a_\tau^2\delta_\tau + \min\left\{\frac{a_\tau^2}{\varepsilon},\frac{1}{\delta_\tau}\right\}h_\tau^2\right)h_\tau^{2k}\|u\|^2_{\mathbb{H}^{k+1}(\tau)} \tag{2.18}$$

для $k = 1,\dots,r$.

Один из способов вывода формулы для параметра стабилизации δ_τ – оптимизация оценки для ошибки (2.18) путем приравнивания членов, зависящих от δ_τ. Получается

$$\delta_\tau a_\tau^2 h_\tau^2 \approx \min\left\{\frac{a_\tau^2}{\varepsilon},\frac{1}{\delta_\tau}\right\}h_\tau^4,$$

что приводит к закону двойной асимптотики (2.11) - (2.12). Заметим, что δ_τ, задаваемое формулами (2.13) и (2.14), удовлетворяет этому закону и ограничению (2.17).

Следствие 1. Выберем параметр δ_τ по формуле (2.14). Подставляя в (2.18), получаем после элементарных преобразований

$$\begin{aligned}|||u-u_h|||^2 \;&\le\; c\sum_{\tau\in T_h}\Bigg(\varepsilon h_\tau^2 + a_\tau\frac{\mathrm{Pe}_h}{\mathrm{Pe}_h+1}\,h_\tau^3 \\ &\qquad + a_\tau\min\left\{\mathrm{Pe}_h,\frac{\mathrm{Pe}_h+1}{\mathrm{Pe}_h}\right\}h_\tau^3\Bigg)\,h^{2(l-1)}\|u\|^2_{\mathbb{H}^{l+1}(\tau)} \\ &\le\; c\sum_{\tau\in T_h}\left(\varepsilon h_\tau^2 + a_\tau h_\tau^3\right)h^{2(l-1)}\|u\|^2_{\mathbb{H}^{l+1}(\tau)}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

$\square$

Мы можем отмасштабировать, умножая на подходящую константу, уравнения (1.9) так, чтобы выполнялось $a_\tau \le 1$. Тогда из (2.19) следует хорошо известный порядок сходимости $\frac{3}{2}$ для метода SUPG применительно к линейным конечным элементам и для *достаточно малого* ε ($\varepsilon \lesssim h$):

$$|||u-u_h||| \le c\left(\sqrt{\varepsilon}h_\tau + h^{\frac{3}{2}}\right)\|u\|_{\mathbb{H}^2(\Omega)}, \quad h=\max_\tau h_\tau. \tag{2.20}$$

На самом деле, в случае специальных сеток может быть доказан более высокий порядок сходимости, см. [165].

Обратимся к частному случаю задачи конвекции-диффузии, к уравнению, для которого будет проведен анализ многосеточного итерационного метода. Напомним, что слабая постановка задачи имеет вид: найти $u\in\mathbb{V}$ такую, что

$$a(u,v) := \varepsilon(u_x,v_x)+\varepsilon(u_y,v_y)+(u_x,v) = (f,v) \quad \text{для всех} \quad v\in\mathbb{V} \tag{2.21}$$

где (в случае однородных условий Дирихле) $\mathbb{V} := \{\, v\in\mathbb{H}^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ на } \partial\Omega \,\}$ – пространство Соболева. Для получения дискретной задачи используем линейные конечные элементы относительно равномерной триангуляции области с шагом дискретизации $h_k := 2^{-k}$ и узлами сетки $x_{i,j} = (ih_k, jh_k),\ 0\le i,j\le h_k^{-1}$. Триангуляция получается проведением диагоналей с юго-запада на северо-восток. Пусть $\mathbb{V}_k \subset \mathbb{V}$ – пространство непрерывных функций, кусочно-линейных на этой триангуляции и равных нулю на $\partial\Omega$. Для дискретизации (2.21) применяется SUPG метод конечных элементов. Для определенных выше элементов этот метод принимает вид: найти $u_k \in \mathbb{V}_k$

$$(\varepsilon + \delta_k h_k)((u_k)_x, v_x) + \varepsilon((u_k)_y, v_y) + ((u_k)_x, v) = (f, v + \delta_k h_k v_x) \quad \forall\ v \in \mathbb{V}_k. \tag{2.22}$$

Стабилизационный параметр определим равенством

$$\delta_k = \begin{cases} \bar{\delta} & \text{если } \frac{h_k}{2\varepsilon} \geq 1 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \tag{2.23}$$

Параметр $\bar{\delta}$ выбирается равным константе порядка 1.

Далее мы будем предполагать

$$\bar{\delta} \in [\frac{1}{3}, 1]\ . \tag{2.24}$$

Значение $\frac{1}{3}$ в качестве нижней границы важно для дальнейшего анализа. Выбор 1 в качестве верхней границы сделан для удобства и может быть довольно произвольным.

В работе мы ограничимся рассмотрением случая доминирующей конвекции: *Будем предполагать, что*

$$\varepsilon \leq \frac{1}{2}\, h_k.$$

Вместо множителя $\frac{1}{2}$ можно задаться другой произвольной константой C. Однако в доказательствах появится больше технических деталей, – необходимо будет различать случай $\delta_k = \bar{\delta}$ и $\delta_k = 0$, что сделает изложение менее понятным.

Мы считаем случай доминирующей конвекции наиболее интересным для анализа. Многие результаты также имеют место и для произвольно больших положительных ε, но доказательства в случае доминирующей диффузии может сильно отличаться. Поэтому в целях ясности изложения мы ограничились случаем доминирующей конвекции. Заметим выполнение ограничений

$$\delta_k = \bar{\delta} \in [\frac{1}{3}, 1] \ \text{ и } \ \frac{1}{3}h_k \leq \varepsilon_k = \varepsilon + \bar{\delta}h_k \leq \frac{3}{2}h_k. \tag{2.25}$$

Метод конечных элементов (2.22) порождает билинейную форму из (1.13):

$$a_k(u,v) := (\varepsilon + \delta_k h_k)(u_x, v_x) + \varepsilon(u_y, v_y) + (u_x, v), \quad u, v \in \mathbb{V},$$

для которой выполняется соотношение:

$$a_k(v,v) = \varepsilon \|v_y\|^2 + (\varepsilon + \delta_k h_k)\|v_x\|^2 \quad \text{для} \quad v \in \mathbb{V}. \tag{2.26}$$

Наша цель – анализ сходимости многосеточного метода для численного решения системы алгебраических уравнений, соответствующей задаче (2.22). Для анализа сходимости конкретный вид правой части в (2.22) не имеет значения (хотя он важен для высокого порядка точности SUPG метода). Поэтому возможно рассмотрение дискретной задачи, у которой правая часть порождена произвольной $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$: найти $u_k \in \mathbb{V}_k$ такую, что

$$a_k(u_k, v_k) = (f, v_k) \ \text{ для всех } \ v_k \in \mathbb{V}_k. \tag{2.27}$$

Далее понадобится вспомогательная непрерывная задача: найти $u \in \mathbb{V}$ такую, что

$$a_k(u, v) = (f, v) \ \text{ для всех } \ v \in \mathbb{V}. \tag{2.28}$$

Отметим, что u и u_k зависят от стабилизирующей добавки $(\delta_k h_k)$ в билинейной форме, а также, что они отличаются от решений задач (2.21) и (2.22).

Далее в разделе 2.2 мы будем рассматривать детально случай краевых условий Дирихле на границе вытекания Γ_E, как технически более сложный. Для случая условий Неймана на Γ_E ограничимся формулировкой результатов.

Вывод оценок для дискретного решения задачи (2.27) зачастую удобно проводить в алгебраических терминах, поэтому следующий раздел вводит обозначения для матрицы жесткости системы и ее декомпозиций.

2.2.2 Матрица жесткости

Рассмотрим систему алгебраических уравнений для задачи (2.27), если $\mathbb{V}_k$ – пространство кусочно-линейных непрерывных элементов. Рассмотрим ее сеточный шаблон и матрицу жесткости для билинейной форме

$a_k(\cdot,\cdot)$. Матрица жесткости A_k на уровне k будет задаваться соотношением

$$\langle A_k \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = a_k(P_k \mathrm{x}, P_k \mathrm{y}) \quad \text{для всех } \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{X}_k.$$

Во внутренних узлах области шаблон дискретизации имеет вид

$$\frac{1}{h_k^2}\begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon & 0 \\ -\varepsilon_k & 2(\varepsilon_k+\varepsilon) & -\varepsilon_k \\ 0 & -\varepsilon & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{h_k}\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.29}$$

Пусть $n_k := h_k^{-1} - 1$ и

$$\begin{aligned} \hat{A}_x &:= \frac{1}{h_k^2}\mathrm{tridiag}(-1,2,-1) \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}, \\ \hat{A}_y &:= \frac{1}{h_k^2}\mathrm{tridiag}(-1,2,-1) \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}. \end{aligned}$$

Более того, пусть $\hat{I}_k$ – единичная матрица размерности $n_k \times n_k$. Введем матрицы размерности $N_k \times N_k$:

$$A_x := \hat{I}_k \otimes \hat{A}_x, \quad A_y := \hat{A}_y \otimes \hat{I}_k.$$

Мы будем использовать разложения матрицы жёскости A_k вида:

$$A_k = (\varepsilon + (\delta_k - \frac{1}{3})h_k)A_x + \varepsilon A_y + D_k \tag{2.30}$$

с некоторой матрицей D_k. Это разложение соответствует записи шаблона в виде

$$\frac{\bar{\varepsilon}_k}{h_k^2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\varepsilon}{h_k^2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{6h_k}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

где $\bar{\varepsilon}_k = \varepsilon + (\delta_k - \frac{1}{3})h_k > 0$.

Нам также понадобится вспомогательная матрица D_x (дискретная производная назад во внутренних точках):

$$D_x := \hat{I}_k \otimes \hat{D}_x, \quad \text{где} \quad \hat{D}_x := \frac{1}{h_k}\mathrm{tridiag}(-1,1,0) \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}.$$

2.2.3 Априорные оценки для дискретной задачи

Наша первая задача – доказать аналог оценки (1.26) для конечно-элементного решения u_k задачи (2.27). С этой целью рассмотрим вектор $\phi = (\phi_0, \ldots, \phi_{n_k+1})$ такой, что $\phi_i > 0$ для всех $i = 1, \ldots, n_k$, $\phi_{n_k+1} = 0$, и

$$0 \le -\frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{h_k} \le H + c_0 \frac{\phi_i}{\varepsilon_k}, \quad i = 1, \ldots, n_k \tag{2.32}$$

с некоторыми константами $c_0 \in (0, \frac{4}{9})$, $H > 0$. (В случае условий Неймана на Γ_E считаем $H = 0$). Пусть $\Phi = \hat{I}_k \otimes \hat{\Phi}$, где $\hat{\Phi}$ – диагональная матрица размера $n_k \times n_k$, i-ый диагональный элемент которой равен ϕ_i. Введем скалярное произведение в $\mathbb{X}_k$: $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Phi := \langle\Phi\,\cdot,\cdot\rangle$ и норму $\|\cdot\|_\Phi$.

Лемма 2.2. *Пусть $k > 1$. Для решения u_k задачи (2.27) с $f = f_k \in \mathbb{V}_k$ выполняется оценка*

$$\bar{\varepsilon}_k \phi_1 \int_{\Gamma_W} (u_k)_x^2\, dy + \|D_x \mathrm{u}\|_\Phi^2 \le c\,(H\|f_k\|^2 + \|M_k \mathrm{f}\|_\Phi^2) \tag{2.33}$$

с некоторой константой $c > 0$. Здесь $\mathrm{u} = P_k^{-1} u_k \in \mathbb{X}_k$ – вектор значений функции u_k в узлах сетки, $\mathrm{f} = P_k^{-1} f_k \in \mathbb{X}_k$, и M_k – матрица масс.

Доказательство. Прежде всего отметим связь между разностью значений функции $v_k \in \mathbb{V}_k$ в узлах сетки и нормой ее производной по x:

$$\|(v_k)_x\|_\omega^2 = \sum_{(i,j)\in\mathcal{I}} \left(\frac{v_k(x_{i+1,j}) - v_k(x_{i,j})}{h_k}\right)^2 h_k^2, \tag{2.34}$$

где $\omega \subset \Omega$ – подобласть $\{(x,y)|\, x \in (i_0 h_k, i_1 h_k),\ y \in (0,1)\}$, $\mathcal{I}$ – набор индексов (i,j) таких, что $i = i_0, \ldots, i_1 - 1$. Отметим также равенство:

$$\int_{\Gamma_W} (v_k)_x^2\, dy = \sum_{j=1}^{n_k} h_k \left(\frac{v_{1,j} - v_{0,j}}{h_k}\right)^2.$$

По определению A_k вектор u удовлетворяет системе уравнений:

$$A_k \mathrm{u} = M_k \mathrm{f}. \tag{2.35}$$

Умножим (2.35) скалярно на $\Phi\, D_x\, \mathrm{u}$. Рассмотрим разложение (2.30) матрицы A_k и изучим вклад каждого слагаемого. Заметим, что условие

(2.32) влечет $\phi_i \le h_k H + (1+3c_0)\phi_{i+1}$. Используя это неравенство, легко проверить (удобно воспользоваться шаблоном (2.31)):

$$\begin{aligned}\langle D_k \mathrm{u}, D_x\,\mathrm{u}\rangle_\Phi \;&\ge\; \left(\frac{1}{3}-\frac{c_0}{4}\right)\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_k} h_k^2\phi_i\left(\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_k}\right)^2 \\ &\quad -\frac{h_k H}{12}\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_k} h_k^2\left(\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_k}\right)^2 .\end{aligned} \tag{2.36}$$

Здесь и далее $u_{i,j}$ – значение u_k в узле сетки $x_{i,j}$. Произведения с первым и последним членом в (2.30) дают соответственно

$$\begin{aligned}\varepsilon\langle A_y \mathrm{u}, D_x\,\mathrm{u}\rangle_\Phi &= -\varepsilon\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_k} h_k^2\phi_i\left(\frac{u_{i,j-1}-2u_{i,j}+u_{i,j+1}}{h_k^2}\right)\left(\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_k}\right) \\ &= \frac{h_k\,\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=0}^{n_k} h_k^2\phi_i\left(\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}-u_{i-1,j+1}+u_{i-1,j}}{h_k^2}\right)^2 \\ &\quad -\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=0}^{n_k} h_k^2\left(\frac{\phi_{i+1}-\phi_i}{h_k}\right)\left(\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{h_k}\right)^2 \ge 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar\varepsilon_k\langle A_x \mathrm{u}, D_x\,\mathrm{u}\rangle_\Phi &= -\bar\varepsilon_k\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_k} h_k^2\phi_i\left(\frac{u_{i-1,j}-2u_{i,j}+u_{i+1,j}}{h_k^2}\right)\left(\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_k}\right) \\ = \frac{\bar\varepsilon_k\phi_1}{2}\sum_{j=1}^{n_k} h_k\left(\frac{u_{1,j}-u_{0,j}}{h_k}\right)^2 &+ \frac{h_k\,\bar\varepsilon_k}{2}\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_k} h_k^2\phi_i\left(\frac{u_{i-1,j}-2u_{i,j}+u_{i+1,j}}{h_k^2}\right)^2 \\ &+\frac{\bar\varepsilon_k}{2}\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_k} h_k^2\left(\frac{\phi_{i+1}-\phi_i}{h_k}\right)\left(\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_k}\right)^2 \\ \ge \frac{\bar\varepsilon_k\phi_1}{2}\sum_{j=1}^{n_k} h_k\left(\frac{u_{1,j}-u_{0,j}}{h_k}\right)^2 &- \frac{c_0}{2}\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_k} h_k^2\phi_i\left(\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_k}\right)^2 \\ &-\frac{\bar\varepsilon_k H}{2}\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_k} h_k^2\left(\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_k}\right)^2 .\end{aligned}$$

Собираем полученные неравенства вместе, используем, что $\varepsilon_k > \bar\varepsilon_k$ и $c_0 < \frac{4}{9}$, и применяем неравенство Коши для оценки $\langle M_k \mathrm{f}, D_x\,\mathrm{u}\rangle_\Phi$. Следовательно, мы доказываем следующую оценку с константой $c = \left(\frac{1}{3} - \frac{3c_0}{4}\right) > 0$:

$$\frac{\bar{\varepsilon}_k \phi_1}{2} \int_{\Gamma_W} (u_k)_x^2 \, dy + c\,\|D_x \mathrm{u}\|_\Phi^2 \quad \le \quad \langle M_k \mathrm{f}, D_x\, \mathrm{u}\rangle_\Phi$$
$$+(\frac{h_k}{12} + \frac{\varepsilon_k}{2}) H \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} h_k^2 \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_k}\right)^2$$

В силу (2.25), (2.34) выводим

$$\frac{\bar{\varepsilon}_k \phi_1}{2} \int_{\Gamma_W} (u_k)_x^2 \, dy + c\,\|D_x \mathrm{u}\|_\Phi^2 \le c^{-1}\,\|M_k \mathrm{f}\|_\Phi^2 + 2\varepsilon_k\, H \|(u_k)_x\|^2.$$

Теперь для доказательства (2.33) достаточно проверить оценку:

$$\varepsilon_k \|(u_k)_x\|^2 \le C\,\|f_k\|^2. \tag{2.37}$$

Мы докажем (2.37) с константой $C = \sqrt{3e}$. Положим в (2.27) $v_k = u_k$, получим равенство $\varepsilon\|(u_k)_y\|^2 + \varepsilon_k\|(u_k)_x\|^2 = (f_k, u_k)$. Теперь (2.37) будет следовать из оценки для $\mathbb{L}_2$-нормы:

$$\|u_k\| \le C\,\|f_k\|. \tag{2.38}$$

Проведем рассуждения сходные доказательству оценки $\mathbb{L}_2$-нормы для решения непрерывной задачи. А именно, рассмотрим диагональную матрицу $E = \hat{I}_k \otimes \hat{E}$, где $\hat{E}$ – диагональная матрица размера $n_k \times n_k$ с элементами $e_{ii} = \exp(ih_k)$. Найдем матрицу $E^{-1}A_k E$. Непосредственные вычисления приводят к разложению:

$$E^{-1}A_k E = \varepsilon A_y + \bar{\varepsilon}_k A_x + B + \frac{3}{2} e^{-h_k} D_x + M,$$

где B – кососимметричная матрица, а матрица M соответствует шаблону:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{cases} a_{22} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1 - e^{-h_k}}{h_k}\right) & a_{13} = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{e^{h_k} - 1}{h_k}\right) \\ a_{21} = a_{23} = \bar{\varepsilon}_k \left(\dfrac{e^{h_k} + e^{-h_k} - 2}{2h_k^2}\right) & a_{31} = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1 - e^{-h_k}}{h_k}\right) \end{cases}$$

С помощью теоремы Гершгорина и используя, что $\bar{\varepsilon}_k \le \frac{7}{6}h_k$, легко убедиться, что $\lambda_{\min}(M+M^T) > \frac{2}{3}$ при $h_k \le \frac{1}{4}$. Так как для остальных матриц в разложении справедливо $A_x, A_y, D_x > 0$ и $B = -B^T$, то

$$\langle E^{-1}A_k E\mathrm{z}, \mathrm{z}\rangle \ge \langle M\mathrm{z}, \mathrm{z}\rangle \ge \frac{1}{3}\,\|\mathrm{z}\|^2 \quad \forall\ \mathrm{z} \in \mathbb{X}_k.$$

Подставим $\mathrm{z} = E^{-1}\mathrm{u}$ и, применяя неравенство Коши, получим

$$\|E^{-1}M_k\mathrm{f}\| \ge \frac{1}{3}\,\|E^{-1}\mathrm{u}\|. \tag{2.39}$$

Так как для матрицы масс $\lambda_{\max} \le 1$, то справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|E^{-1}M_k\mathrm{f}\| &\le \|M_k\mathrm{f}\| \le \|M_k^{\frac{1}{2}}\mathrm{f}\| = \|f_k\| \\ \|E^{-1}\mathrm{u}\| &\ge e^{-1}\|\mathrm{u}\| \ge e^{-1}\|M_k^{\frac{1}{2}}\mathrm{u}\| = e^{-1}\|u_k\|. \end{aligned}$$

Подставляя эти неравенства в (2.39), мы доказываем (2.38). Лемма доказана. □

Благодаря связи (2.34) между нормой конечно-элементной функцией u_k и вектором её значений в узлах $\mathrm{u} = P_k u_k$ имеем $\langle A_x\mathrm{u}, \mathrm{u}\rangle = \|(u_k)_x\|^2$, и в силу (3.1) $\|\mathrm{u}\| \backsimeq \|u_k\|$. Поэтому оценка (2.37) может быть записана, в виде

$$\varepsilon_k\langle A_x\mathrm{u}, \mathrm{u}\rangle \le C\,\|A_k\mathrm{u}\|^2. \tag{2.40}$$

А оценка (2.38) может быть записана, в виде

$$\|\mathrm{u}\| \le C\,\|A_k\mathrm{u}\|. \tag{2.41}$$

Более того, неравенство (2.37) и оценка (2.37) в матрично-векторной форме влекут

$$\langle A_k\mathrm{u}, D_x\mathrm{u}\rangle_\Phi + H\,\|A_k^{-1}\mathrm{u}\|^2 \ge c\,\|D_x\mathrm{u}\|_\Phi. \tag{2.42}$$

Нам будут полезны еще две леммы. Одна дает оценку снизу на скалярное произведение $\langle A_k\mathrm{u}, \mathrm{u}\rangle_\Phi$, вторая снабдит нас оценкой на разницу решений дискретных задач с условиями Дирихле и Неймана на границе вытекания.

Лемма 2.3. *Рассмотрим $\Phi_x = \hat{I}_k \otimes \hat{\Phi}_x$, где $\hat{\Phi}_x$ – диагональная матрица размера $n_k \times n_k$ с i-м элементом равным $[\phi_x]_i = (\phi_{i+1} - \phi_i)h_k^{-1}$. Дополнительно предположим: для любого $i > 0$ выполняется либо оценка*

$|[\phi_x]_{i-1}/[\phi_x]_i| \le d^2$, *либо* $[\phi_x]_{i-1} = [\phi_x]_i = 0$. *В предположениях леммы 2.2 справедлива оценка*

$$\langle A_k \mathrm{u}, \mathrm{u}\rangle_\Phi \ge \varepsilon \langle A_y \mathrm{u}, \mathrm{u}\rangle_\Phi + (\frac{1}{6}(2-d) - \frac{1}{9})\langle -\Phi_x \mathrm{u}, \mathrm{u}\rangle - \frac{9}{4} H\, \bar{\varepsilon}_k^2 \langle A_x \mathrm{u}, \mathrm{u}\rangle \quad (2.43)$$

для произвольного $\mathrm{u} \in \mathbb{X}_k$

Доказательство. Рассмотрим разложение (2.30) матрицы A_k:

$$A_k = \bar{\varepsilon}_k A_x + \varepsilon A_y + D_k.$$

Сначала докажем оценку

$$\langle D_k \mathrm{u}, \mathrm{u}\rangle_\Phi \ge \frac{1}{6}(2-d)\langle -\Phi_x \mathrm{u}, \mathrm{u}\rangle. \quad (2.44)$$

Заметим, что

$$D_k = \mathrm{blocktridiag}(\hat{D}_x, 4\hat{D}_x, -\hat{D}_x^T).$$

Обозначим $K := \frac{1}{6}\Phi_k D_k = \frac{1}{6}\mathrm{blocktridiag}(\hat{\Phi}_k \hat{D}_x, 4\hat{\Phi}_k \hat{D}_x, -\hat{\Phi}_k \hat{D}_x^T)$. Следовательно,

$$K + K^T = \frac{1}{6}\mathrm{blocktridiag}\big(\hat{\Phi}_k \hat{D}_x - \hat{D}_x \hat{\Phi}_k, 4(\hat{\Phi}_k \hat{D}_x + \hat{D}_x^T \hat{\Phi}_k), -\hat{\Phi}_k \hat{D}_x^T + \hat{D}_x^T \hat{\Phi}_k\big)$$

Простыми вычислениями проверяем

$$\hat{\Phi}_k \hat{D}_x + \hat{D}_x^T \hat{\Phi}_k = -\hat{\Phi}_x + \frac{1}{h_k}\mathrm{tridiag}(-\phi_i, \phi_i + \phi_{i+1}, -\phi_{i+1})_{1\le i\le n_k} =: -\hat{\Phi}_x + R \quad (2.45)$$

и $-\hat{\Phi}_k \hat{D}_x^T + \hat{D}_x^T \hat{\Phi}_k = -\hat{\Phi}_x \hat{T}$, где $n := n_k$, $\hat{T} := \mathrm{tridiag}(0,0,1) \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$. Получаем

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(K + K^T) &= -\frac{1}{12}\mathrm{blocktridiag}\big(\hat{T}^T \hat{\Phi}_x, 4\hat{\Phi}_x, \hat{\Phi}_x \hat{T}\big)\\ &\quad + \frac{1}{12}\mathrm{blocktridiag}\big(\frac{1}{h_k}\phi_n e_n e_n^T, 4R, \frac{1}{h_k}\phi_n e_n e_n^T\big)\\ &\ge -\frac{1}{12}\mathrm{blocktridiag}\big(\hat{T}^T \hat{\Phi}_x, 4\hat{\Phi}_x, \hat{\Phi}_x \hat{T}\big)\end{aligned}$$

Через $\hat{\Phi}_x^{-1}$ (Φ_x^{-1}) обозначим псевдо-обратный оператор к $\hat{\Phi}_x$ (Φ_x). Имеем

$$\frac{1}{2}\Phi_x^{-\frac{1}{2}}(K + K^T)\Phi_x^{-\frac{1}{2}} \ge \frac{1}{12}\mathrm{blocktridiag}\big(\hat{\Phi}_x^{-\frac{1}{2}}\hat{T}^T \hat{\Phi}_x^{\frac{1}{2}}, 4I, \hat{\Phi}_x^{\frac{1}{2}}\hat{T}\hat{\Phi}_x^{-\frac{1}{2}}\big)$$

Заметим, что

$$\|\hat{\Phi}_x^{-\frac{1}{2}}\hat{T}^T\hat{\Phi}_x^{\frac{1}{2}}\|_\infty = \|\hat{\Phi}_x^{\frac{1}{2}}\hat{T}\hat{\Phi}_x^{-\frac{1}{2}}\|_\infty = \max_{i\geq 3k+2}\left(\frac{\phi_{i-1}-\phi_i}{\phi_i-\phi_{i+1}}\right)^{\frac{1}{2}} = d$$

Следовательно, $\frac{1}{2}\Phi_x^{-\frac{1}{2}}(K+K^T)\Phi_x^{-\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{12}(4-2d)I$. Итак, мы доказали оценку

$$\frac{1}{6}\Phi_k D_k = K \geq \frac{1}{6}(2-d)\Phi_x,$$

т.е. (2.44).

Далее вычисляем

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_k\langle A_x\mathrm{u},\mathrm{u}\rangle_\Phi &= \bar{\varepsilon}_k\sum_{i=1}^{n_k+1}\sum_{j=1}^{n_k}h_k^2\phi_i\left(\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_k}\right)^2 \\
&\quad+\bar{\varepsilon}_k\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_k}h_k^2\left(\frac{\phi_{i+1}-\phi_i}{h_k}\right)\left(\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_k}\right)u_{i,j} \\
&\geq \bar{\varepsilon}_k\sum_{i=1}^{n_k+1}\sum_{j=1}^{n_k}h_k^2\phi_i\left(\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_k}\right)^2 \\
&\quad-\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_k}h_k^2u_{i,j}^2\left(\frac{\phi_i-\phi_{i+1}}{h_k}\right) \\
&\quad-\frac{9}{4}\bar{\varepsilon}_k^2\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_k}h_k^2\left(\frac{\phi_i-\phi_{i+1}}{h_k}\right)\left(\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_k}\right)^2 \\
\text{(из (2.32))}\quad &\geq (1-\frac{9c_0}{4})\bar{\varepsilon}_k\sum_{i=1}^{n_k+1}\sum_{j=1}^{n_k}h_k^2\phi_i\left(\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_k}\right)^2 \\
&\quad-\frac{9}{4}H\bar{\varepsilon}_k^2\sum_{i=1}^{n_k+1}\sum_{j=1}^{n_k}h_k^2\left(\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_k}\right)^2 \\
&\quad-\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_k}h_k^2u_{i,j}^2\left(\frac{\phi_i-\phi_{i+1}}{h_k}\right).
\end{aligned}$$

Наконец, заметим, что $\sum_{i=1}^{n_k+1}\sum_{j=1}^{n_k}h_k^2\left(\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_k}\right)^2 = \langle A_x\mathrm{u},\mathrm{u}\rangle$. Следовательно,

$$\bar{\varepsilon}_k\langle A_x\mathrm{u},\mathrm{u}\rangle_\Phi \geq -\frac{1}{9}\langle -\Phi_x\mathrm{u},\mathrm{u}\rangle - \frac{9}{4}H\bar{\varepsilon}_k^2\langle A_x\mathrm{u},\mathrm{u}\rangle.$$

Используя это неравенство и (2.44) получаем (2.43). □

Лемма 2.4. *Пусть* $\hat{u}_k$ *– решение задачи* (1.14) *аппроксимированной по методу конечных элементов. Пусть* u_k *– решение* (2.27)*. Тогда в предположениях леммы 2.2 справедлива оценка*

$$\varepsilon\langle A_y \mathrm{r}, \mathrm{r}\rangle_\Phi \le c\, h_k H \|f_k\|^2, \tag{2.46}$$

где r *– вектор значений в узлах сетки разности* $r_k = \hat{u}_k - u_k$.

Доказательство. Оценка (2.46) следует из (2.43) и оценки (см. (2.37))

$$\varepsilon_k\langle A_x \mathrm{r}, \mathrm{r}\rangle = \varepsilon_k\|(r_k)_x\|^2 \le \varepsilon_k\|(u_k)_x\| + \varepsilon_k\|(\hat{u}_k)_x\| \le c\,\|f_k\|^2.$$

□

Зависимость против потока и оценки вдали от Γ_E.

В этом параграфе изучается зависимость решения дискретной задачи от значений правой части f вверх по течению, а также от граничных значений на границе вытекания Γ_E. Большинство результатов имеет аналоги в случае дифференциальной задачи, которые были доказаны в § 1.2.1.

Рассмотрим вектор

$$\phi_i^\xi = \begin{cases} 1 - H_0, & \text{если } ih_k \in [0,\xi] \\ \exp\left(-\frac{ih_k-\xi}{4h_k}\right) - H_0, & \text{если } ih_k \in (\xi,1] \end{cases} \quad \text{для } i = 0,\dots,n_k+1,$$

где $H_0 = \exp\left(-\frac{1-\xi}{4h_k}\right)$. Из определения следует

$$-(\phi_i^\xi - \phi_{i-1}^\xi) = (\exp(\frac{1}{4}) - 1)\,(\phi_i^\xi + H_0), \quad \text{если } (i-1)h_k \in (\xi,1].$$

Поэтому, используя $\varepsilon_k \le \frac{3}{2}h_k$, получаем

$$0 \le -\frac{\phi_i^\xi - \phi_{i-1}^\xi}{h_k} \le \frac{3}{2}(\exp(\frac{1}{4}) - 1)(\frac{\phi_i^\xi}{\varepsilon_k} + \frac{2H_0}{3h_k}), \quad i = 1,\dots,n_k+1.$$

Для любого ξ вектор ϕ_i^ξ удовлетворяет условию леммы 2.2 с константами $c_0 = \frac{3}{2}(\exp(\frac{1}{4}) - 1) < \frac{4}{9}$ и $H = \frac{2}{3}c_0 H_0\, h_k^{-1}$. Пусть правая граница Ω_ξ совпадает с разбиением, т.е. $\xi = \mathrm{i}h_k$ для некоторого i. Из леммы 2.2 выводим следствие.

Следствие 2.1. Рассмотрим $f_k \in \mathbb{V}_k$ такую, что $\operatorname{supp}(f_k) \in \Omega_\eta$. Пусть u_k – соответствующее решение задачи (2.27). Предположим $\eta - \xi \geq 8\, h_k\, p\, |\ln h_k|$, $p > 0$ и $1 - \eta \geq 4h_k\, |\ln h_k|$. Тогда

$$\begin{aligned} \|(u_k)_x\|_{L_2(\Omega_\xi)} &\leq c\, h_k^p \|f_k\|, && (2.47)\\ \|(u_k)_y\|_{L_2(\Omega_\xi)} &\leq c\,\xi\, h_k^{p-1} \|f_k\|, && (2.48)\\ \sum_{j=1}^{n_k} h_k^2 u_{\mathrm{i},j}^2 &\leq c\, h_k^{2p+2} \|f_k\|^2. && (2.49) \end{aligned}$$

Доказательство. Оценка (2.47) является следствием (2.33). Действительно, рассмотрим неравенства

$$\begin{aligned} \|(u_k)_x\|_{L_2(\Omega_\xi)} &= \sum_{i:\, ih \leq \xi} \sum_{j=1}^{n_k} h_k^2 \left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_k}\right)^2 \\ &= \frac{1}{1 - H_0} \sum_{i:\, ih \leq \xi} \sum_{j=1}^{n_k} h_k^2 \phi_i \left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_k}\right)^2 \\ &\leq c\, \|D_x \mathrm{u}\|_\Phi^2 \leq c\left(\|M_k \mathrm{f}\|_\Phi^2 + H\, \|f_k\|^2\right) \\ &\leq c\, (\max_{ih \geq \eta} \phi_i) \|M_k \mathrm{f}\|^2 + c\, h_k^{2p} \|f_k\|^2 \\ &\leq c\left(\max_{ih \geq \eta}(\phi_i) + h_k^{2p}\right) \|f_k\|^2 \leq c\, h_k^{2p} \|f_k\|^2. \end{aligned}$$

Оценка (2.48) следует из обратного неравенства, неравенства Фридрихса и (2.47):

$$\|(u_k)_y\|_{L_2(\Omega_\xi)} \leq c\, h_k^{-1} \|u_k\|_{L_2(\Omega_\xi)} \leq c\,\xi\, h_k^{-1} \|(u_k)_x\|_{L_2(\Omega_\xi)} \leq c\,\xi h_k^{p-1} \|f_k\|.$$

Перейдем к проверке (2.49). При нашем выборе Φ константа d из условия леммы 2.3 равна $e^{1/8}$. Применим (2.43) , неравенство Коши (аналогично (1.36)) и (2.37), получим

$$\langle -\Phi_x \mathrm{u}, \mathrm{u} \rangle \leq c\, h_k^{2p+1} \|f_k\|^2.$$

С другой стороны

$$\langle -\Phi_x \mathrm{u}, \mathrm{u} \rangle \;=\; \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} h_k^2\, \frac{\phi_i^\xi - \phi_{i+1}^\xi}{h_k}\, u_{i,j}^2 \;\geq\; \sum_{j=1}^{n_k} h_k^2\, \frac{\phi_{\mathrm{i}}^\xi - \phi_{\mathrm{i+1}}^\xi}{h_k}\, u_{\mathrm{i},j}^2$$

Осталось заметить, что для индекса i : $\mathrm{i}h_k = \xi$ имеем $(\phi^\xi_{\mathrm{i}} - \phi^\xi_{\mathrm{i}+1})h_k^{-1} = (1 - e^{h_k})h_k^{-1}$. □

При $p = 0$ доказательство оценок (2.47) – (2.49) не использует предположение $\mathrm{supp}(f_k) \in \Omega_\eta$. Сформулируем этот случай в виде отдельного следствия.

Следствие 2.2. Пусть $f_k \in \mathbb{V}_k$ и u_k – соответствующее решение задачи (2.27). Предположим, что $1 - \xi \geq 4h_k\,|\ln h_k|$. Тогда имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|(u_k)_x\|_{L_2(\Omega_\xi)} &\leq c\,\|f_k\|, && (2.50)\\ \sum_{j=1}^{n_k} h_k^2 u_{\mathrm{i},j}^2 &\leq c\,h_k^2\|f_k\|^2. && (2.51) \end{aligned}$$

Следствие 2.3. Рассмотрим $f_k \in \mathbb{V}_k$ такую, что $\mathrm{supp}(f_k) \in \Omega_\eta$. Пусть u и u_k – решения задач (2.28) и (2.27), соответственно. Предположим $\eta - \xi \geq 8\,h_k\,p\,|\ln h_k|$, $p > 0$ и $\eta \geq 1 - 4h_k\,|\ln h_k|$, тогда

$$\begin{aligned} \|(u - u_k)_x\|_{L_2(\Omega_\xi)} &\leq c\,h_k^p\|f_k\|,\\ \|(u - u_k)_y\|_{L_2(\Omega_\xi)} &\leq c\,\max\{\sqrt{\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon}};\ \frac{\xi}{h_k}\}\,h_k^p\|f_k\|. \end{aligned}$$

Для проверки следствия 2.3 необходимо применить оценки (1.33), (1.35), (2.47), (2.48) и неравенство треугольника.

Результат следствия 2.3 показывает, что $\mathbb{H}^1$-норма ошибки около границы втекания Γ_W может быть сделана мала, если правая часть равна нулю в достаточно большой подобласти $(\Omega \setminus \Omega_\eta)$ около Γ_W. Для доказательства свойства аппроксимации нам понадобится это свойство для случая $\xi = \varepsilon_k\,|\ln\, h_k|$ и $p = \frac{5}{8} > \frac{1}{2}$. Поэтому рассмотрим $\eta = 5h_k|\ln h_k| + \varepsilon_k|\ln\, h_k|$. Выбираем Ω_η такую, что левая её граница совпадает с разбиением. Воспользуемся соотношениями $|\ln h_k| = k\ln 2$ и $\frac{2}{3}\varepsilon_k \leq h_k$, и, следовательно, $(\varepsilon_k + 5h_k)|\ln h_k| \leq 4kh_k$, $k > 1$. Определим на каждом сеточном уровне вспомогательную подобласть

$$\Omega_k^W := \{\,(x, y) \in \Omega \mid x < 4kh_k\,\}. \qquad (2.52)$$

Благодаря неравенствам $\frac{\xi}{h_k}h_k^p \leq ch_k^{\frac{1}{2}} \leq c\frac{h_k}{\sqrt{\varepsilon}}$ следствие 2.3 непосредственно влечет

Следствие 2.4. Рассмотрим $f_k \in \mathbb{V}_k$ такую, что $f_k = 0$ в Ω_k^W. Тогда в $\Omega^w := \{(x,y) \in \Omega | \, x < \varepsilon_k | \ln h_k|\}$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|(u-u_k)_x\|_{L_2(\Omega^w)} &\le c\, h_k^{\frac{1}{2}} \|f_k\|, \\ \|(u-u_k)_y\|_{L_2(\Omega^w)} &\le c\, \frac{h_k}{\sqrt{\varepsilon}} \|f_k\|. \end{aligned}$$

2.2.4 Сходимость.

Продолжим вывод глобальных оценок на норму ошибки $u - u_k$. Как и ранее, u и u_k – решения задач (2.28) и (2.27) с правой частью $f = f_k$ из $\mathbb{V}_k$.

Известно, что регулярность решения непрерывной задачи ухудшается около границы вытекания Γ_E. Это затрудняет получение удовлетворительных оценок на ошибку вблизи Γ_E. Поэтому мы определим подобласть Ω_k^{int}, отделённую от Γ_E, в которой интересующие нас оценки будут выполняться. Итак, определим Ω_k^{int} и норму по подобласти:

$$\begin{aligned} \Omega_k^{int} &:= \{(x,y) \in \Omega | \, x < 1 - 3kh_k\}, \\ \|\cdot\|_{int} &:= \|\cdot\|_{L_2(\Omega_k^{int})}. \end{aligned}$$

Лемма 2.5. *Имеют место оценки*

$$\|(u-u_k)_x\|_{int} \le c\, \|f_k\| \tag{2.53}$$

$$\|(u-u_k)_y\|_{int} \le c\, \frac{h_k}{\varepsilon} \|f_k\|. \tag{2.54}$$

Доказательство. Оценка (2.53) следует из (1.37) и (2.50) в силу неравенства треугольника. Неравенство (2.54) следует из оценки

$$\|(u-u_k)_y\|_{int} \le \|u_y - \hat{u}_y\|_{int} + \|(u_k)_y - (\hat{u}_k)_y\|_{int} + \|(\hat{u}_k)_y - \hat{u}_y\|_{int},$$

где $\hat{u}$ и $\hat{u}_k$ определены в леммах 1.3 и 2.4. Теперь оценка на первый слагаемый в правой части следует из леммы 1.3, применённой в случае $\phi = \phi_\xi, \ \xi = 1 - \varepsilon_k |\ln \varepsilon_k|$. Оценка на второй слагаемый из леммы 2.4, применённой в случае $\phi_i = \phi_i^\xi, \ \xi = 1 - 4h_k |\ln h_k|$. Осталось проверить оценку на третий слагаемый вида

$$\|(\hat{u}_k)_y - \hat{u}_y\| \le c\, \frac{h_k}{\varepsilon} \|f_k\| \tag{2.55}$$

Напомним, что $\hat{u}$ и $\hat{u}_k$ – решения непрерывной и, соответственно, дискретной задач с условиями Неймана на границе вытекания. Оценка (2.55) доказывается с помощью стандартных рассуждений, основанных на использовании ортогональности Галёркина, аппроксимационных свойств пространства $\mathbb{V}_k$ (здесь краевые условия на Γ_E не накладываются) и априорных оценках (1.17). Действительно, обозначая $e_k = (\hat{u}_k)_y - \hat{u}_y$, имеем

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\|(e_k)_y\|^2 + (\varepsilon + \bar{\delta}h_k)\|(e_k)_x\|^2 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_E} e_k^2\,dy = a_k(e_k, e_k)\\
&= \inf_{v_k\in\mathbb{V}_k} a_k(e_k, u - v_k) \le \inf_{v_k\in\mathbb{V}_k} \big(\varepsilon\|(e_k)_y\|\|(u - v_k)_y\|\\
&\qquad + (\varepsilon + \bar{\delta}h_k)\|(e_k)_x\|\|(u - v_k)_x\| + \|(e_k)_x\|\|u - v_k\|\big)\\
&\le c\,\big(\varepsilon\, h_k\|(e_k)_y\|\|u\|_{H^2} + h_k^2\|(e_k)_x\|\|u\|_{H^2}\big)\\
&\le c\,\big(h_k\|(e_k)_y\|\|f_k\| + \frac{h_k^2}{\varepsilon}\|f_k\|^2\big) \le \frac{\varepsilon}{2}\|(e_k)_y\|^2 + c\frac{h_k^2}{\varepsilon}\|f_k\|^2.
\end{aligned}$$

Оценка (2.55) доказана. □

Основным результатом этого раздела является

Лемма 2.6. *Пусть правая часть* (2.28) *и* (2.27) $f_k \in \mathbb{V}_k$ *равна нулю в* Ω_k^W. *Тогда справедлива оценка*

$$\|u - u_k\|_{int} \le c\,\frac{h_k^2}{\varepsilon}\,\|f_k\|. \tag{2.56}$$

Доказательство. Определим $e_k := u - u_k$. Пусть $w \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ является решением задачи

$$-\varepsilon w_{yy} - \varepsilon_k w_{xx} - w_x = \hat{e}_k \ \text{ в } \Omega, \quad w = 0 \text{ на } \partial\Omega. \tag{2.57}$$

Здесь $\hat{e}_k = e_k$ в Ω_k^{int} и $\hat{e}_k = 0$ в $\Omega \setminus \Omega_k^{int}$.

Заметим, что для этой задачи Γ_E – граница "втекания", а Γ_W – граница "вытекания". Умножим (2.57) на e_k, интегрируя по частям, получаем

$$\|e_k\|_{int}^2 = \varepsilon((e_k)_y, w_y) + \varepsilon_k((e_k)_x, w_x) + ((e_k)_x, w) = a_k(e_k, w).$$

Из свойства ортогональности по Галеркину следует, что для любой $v_k \in \mathbb{V}_h$

$$\|e_k\|_{int}^2 = \varepsilon\,((e_k)_y, (w - v_k)_y) + \varepsilon_k\,((e_k)_x, (w - v_k)_x) + ((e_k)_x, w - v_k)\,. \tag{2.58}$$

Пусть Ω^w – подобласть, определенная в следствии 2.4, определим также подобласть около границы вытекания $\Omega^e := \{(x,y) \in \Omega |\, x > 1 - \varepsilon_k |\ln h_k|\}$, а оставшуюся часть области обозначим через $\omega = \Omega \backslash (\Omega^w \cup \Omega^e)$. В качестве v_k возьмем узловой интерполянт к w. Теперь оценим скалярные произведения из (2.58). При этом интегралы по ω, Ω^w и Ω^e рассмотрим раздельно. Мы продолжаем (2.58), как

$$\begin{aligned} \|e_k\|^2_{int} &\leq c\,\varepsilon\, h_k \left\|(e_k)_y\right\|_\omega \|w\|_{H^2(\omega)} + c\,\varepsilon_k\, h_k \left\|(e_k)_x\right\|_\omega \|w\|_{H^2(\omega)} \\ &\quad + c\, h_k^2 \left\|(e_k)_x\right\|_\omega \|w\|_{H^2(\omega)} + \mathrm{I}_W + \mathrm{I}_E \\ &\leq c\, h_k^2 \|f_k\| \frac{1}{\varepsilon} \|\hat{e}_k\| + \mathrm{I}_W + \mathrm{I}_E. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Получая первое неравенство в (2.59), мы воспользовались аппроксимационными свойствами $\mathbb{V}_k$, а получая второе, оценками (2.53), (2.54) и замечанием 1.1 к оценке (1.37) для $\mathbb{H}^2$-нормы с $p = 0$.

Слагаемое I_W включает интегралы по Ω^w:

$$\mathrm{I}_W = \varepsilon\,((e_k)_y, (w - v_k)_y)_{\Omega^w} + \varepsilon_k\,((e_k)_x, (w - v_k)_x)_{\Omega^w} + ((e_k)_x, w - v_k)_{\Omega^w}$$

Для оценки I_W используем следствие 2.4 и априорные оценки для решения непрерывной задачи из (1.25) применительно к решению сопряженной задачи (2.57):

$$\begin{aligned} \varepsilon\,((e_k)_y, (w - v_k)_y)_{\Omega^w} &\leq c\,\varepsilon \left\|(e_k)_y\right\|_{\Omega^w} \|w_y\| \leq c\, h_k \sqrt{\varepsilon}\, \|f_k\|\, \|w_y\| \\ &\leq c\, h_k \|f_k\|\, \|\hat{e}_k\|, \\ \varepsilon_k\,((e_k)_x, (w - v_k)_x)_{\Omega^w} &\leq c\,\varepsilon_k \left\|(e_k)_x\right\|_{\Omega^w} \|w_x\| \leq c\,\varepsilon_k \sqrt{h_k}\, \|f_k\|\, \|w_x\| \\ &\leq c\,\varepsilon_k \|f_k\|\, \|\hat{e}_k\|, \\ ((e_k)_x, w - v_k)_{\Omega^w} &\leq c\, h_k \left\|(e_k)_x\right\|_{\Omega^w} \|w_x\| \leq c\, h_k \|f_k\|\, \|\hat{e}_k\|. \end{aligned}$$

Аналогично оценим интегралы входящие в I_E, но теперь воспользуемся тем, что $\hat{e}_k$ – правая часть уравнения (2.57), равна нулю около границы Γ_E (на расстоянии $3kh_k > \varepsilon_k(|\ln h_k| + |\ln \varepsilon_k|)$. Для сопряженной задачи (2.57) Γ_E является границей втекания, и мы пользуемся оценками (1.33) - (1.35) с $p = \frac{1}{2}$ для решения w и правой части $\hat{e}_k$ (см. замечание 1.1). Таким образом

$$\begin{aligned} \varepsilon\,((e_k)_y, (w - v_k)_y)_{\Omega^e} &\leq c\,\varepsilon \left\|(e_k)_y\right\| \|w_y\|_{\Omega^e} \leq c\,\sqrt{\varepsilon}\, \|f_k\|\, \|w_y\|_{\Omega^e} \\ &\leq c\, h_k \|f_k\|\, \|\hat{e}_k\|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_k \left((e_k)_x, (w-v_k)_x\right)_{\Omega^e} &\le c\,\varepsilon_k \,\|(e_k)_x\|\,\|w_x\|_{\Omega^e} \le c\,\sqrt{\varepsilon_k}\,\|f_k\|\,\|w_x\|_{\Omega^e} \\
&\le c\,h_k\,\|f_k\|\,\|\hat{e}_k\|\,, \\
\left((e_k)_x, w-v_k\right)_{\Omega^{2E}} &\le c\,h_k\,\|(e_k)_x\|\,\|w_x\|_{\Omega^e} \le c\,h_k\,\|f_k\|\,\|\hat{e}_k\|\,.
\end{aligned}$$

Подставляя полученные неравенства в (2.59) и используя $\varepsilon \le \frac{1}{2}h_k$, получаем

$$\|e_k\|_{int}^2 \le c\,\frac{h_k^2}{\varepsilon}\|f_k\|\|\hat{e}_k\| + c\,h_k\|f_k\|\|\hat{e}_k\| \le c\,\frac{h_k^2}{\varepsilon}\|f_k\|\|\hat{e}_k\| = c\,\frac{h_k^2}{\varepsilon}\|f_k\|\|e_k\|_{int}.$$

Лемма доказана. □

Результаты доказанных лемм в следующем смысле являются неулучшаемыми, в лемме 2.5 нельзя заменить норму $\|\cdot\|_{int}$ на глобальную $\mathbb{L}_2$-норму, а в лемме 2.6 нельзя отказаться от условия равенства нулю правой части в части области приграничной к Γ_W. Оба эти эффекта будут иллюстрированы численными экспериментами в разделе 3.3.5.

2.3 Система уравнений с кососимметричной реакцией.

В этом разделе мы будем использовать ортогональную $\mathbb{L}_2$ проекцию P_h : $\mathbf{L}_2(\Omega) \to \mathbb{V}_h$, которая определяется через равенство

$$(\mathrm{P}_h\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) \quad \forall\ \mathbf{v}_h \in \mathbb{V}_h. \tag{2.60}$$

Метод конечных элементов для дискретизации задачи (1.39) состоит в следующем: найти $\mathbf{u}_h \in \mathbb{V}_h$ такую, что

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall\ \mathbf{v}_h \in \mathbb{V}_h. \tag{2.61}$$

Для того чтобы измерять влияние различных членов, входящих в (1.38), мы введём сеточные числа[1]:

$$\mathrm{Ek}_h = \frac{\varepsilon}{\|w\|_\infty h^2}, \qquad \mathrm{D}_h = \frac{\alpha h^2}{\varepsilon}.$$

Вначале мы докажем устойчивость $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ на $\mathbb{V}_h$.

[1]Обозначение и определение Ek выбраны так, чтобы согласовываться с определением числа Экмана в теории вращающихся объемов жидкостей. Однако это лишь частный случай для рассматриваемой системы ($w = const$).

2.3.1 Устойчивость дискретной задачи.

В этом разделе будет доказано inf-sup условие на билинейную форму дискретной задачи гарантирующее устойчивость. Заметим, что данное условие слабее условия эллиптичности.

Лемма 2.7. *Пусть выполнены условия (A1) и (A2) (см. стр. 45). Если* $\mathrm{Ek}_h > 1$ *и* $\mathrm{D}_h < 1$*, также предполагаем выполнение условия (A3). Существует константа* $\tau \in (0,1]$ *такая, что*

$$\inf_{\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)}{|||\mathbf{u}_h|||_\tau \, |||\mathbf{v}_h|||_\tau} \geq C > 0. \tag{2.62}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$. Заметим,

$$\begin{aligned} (w \times \mathbf{u}_h, \mathrm{P}_h(w \times \mathbf{u}_h)) &= (\mathrm{P}_h(w \times \mathbf{u}_h), \mathrm{P}_h(w \times \mathbf{u}_h)), \\ (\mathbf{u}_h, \mathrm{P}_h(w \times \mathbf{u}_h)) &= 0. \end{aligned}$$

В силу (1.43) и условия (A2) справедливо

$$\begin{aligned} c_w \|\mathbf{u}_h\|^2 &\leq (|w| \times \mathbf{u}_h, 1 \times \mathbf{u}_h) = (\mathrm{P}_h(|w| \times \mathbf{u}_h), 1 \times \mathbf{u}_h) \\ &= (|\mathrm{P}_h(w \times \mathbf{u}_h)|, 1 \times \mathbf{u}_h) \leq \|\mathrm{P}_h(w \times \mathbf{u}_h)\| \|\mathbf{u}_h\| \end{aligned}$$

и, таким образом,

$$(\alpha + c_w)\|\mathbf{u}_h\| \leq \alpha \|\mathbf{u}_h\| + \|\mathrm{P}_h(w \times \mathbf{u}_h)\|. \tag{2.63}$$

Возьмём

$$\tau = \min\{1, \mu_u^{-2}, \tilde{c}^{-1}\} \,, \tag{2.64}$$

с некоторой константой $\tilde{c}$, не зависящей от всех параметров, которая будет определена в ходе доказательства. Пусть $\kappa := \tau \|w\|_\infty^{-1}$. Используя (2.63), получаем

$$\begin{aligned} \alpha \|\mathbf{u}_h\|^2 + \kappa \|w \times \mathbf{u}_h\|^2 &\leq (\alpha + \kappa \|w\|_\infty^2) \|\mathbf{u}_h\|^2 \\ &\leq \frac{2(\alpha + \kappa \|w\|_\infty^2)}{(\alpha + c_w)^2} (\alpha^2 \|\mathbf{u}_h\|^2 + \|\mathrm{P}_h(w \times \mathbf{u}_h)\|^2) \\ &\leq \frac{2(\alpha + \kappa \|w\|_\infty^2)(\alpha + \kappa^{-1})}{(\alpha + c_w)^2} (\alpha \|\mathbf{u}_h\|^2 + \kappa \|\mathrm{P}_h(w \times \mathbf{u}_h)\|^2). \end{aligned}$$

Так как, в силу определения (2.64), $\tau^{-1}+\tau \le \max\{1,\mu_u^2,\tilde{c}\}+1 \le C$, то, используя условие (A1), получаем

$$\frac{(\alpha+\kappa\|w\|_\infty^2)(\alpha+\kappa^{-1})}{(\alpha+c_w)^2} = \frac{\alpha^2+(\tau^{-1}+\tau)\alpha\|w\|_\infty+\|w\|_\infty^2}{(\alpha+c_w)^2}$$
$$\le C\frac{\alpha^2+\|w\|_\infty^2}{(\alpha+c_w)^2} \le C(1+\eta^2) \le C\ .$$

Следовательно,

$$\alpha\|\mathbf{u}_h\|^2+\kappa\|w\times\mathbf{u}_h\|^2 \le C(\alpha\|\mathbf{u}_h\|^2+\kappa\|\mathrm{P}_h(w\times\mathbf{u}_h)\|^2)\ . \tag{2.65}$$

Для доказательства (2.62) положим $\mathbf{v}_h=\mathbf{u}_h+\kappa\mathrm{P}_h(w\times\mathbf{u}_h)$. Вычисляем

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h) &= \varepsilon\|\nabla\mathbf{u}_h\|^2+\alpha\|\mathbf{u}_h\|^2+\varepsilon\kappa(\nabla\mathbf{u}_h,\nabla\mathrm{P}_h(w\times\mathbf{u}_h))+\kappa\|\mathrm{P}_h(w\times\mathbf{u}_h)\|^2 \\ &\ge \varepsilon\|\nabla\mathbf{u}_h\|^2+\alpha\|\mathbf{u}_h\|^2-\varepsilon\kappa\|\nabla\mathbf{u}_h\|\,\|\nabla\mathrm{P}_h(w\times\mathbf{u}_h)\|+\kappa\|\mathrm{P}_h(w\times\mathbf{u}_h)\|^2. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Для получения оценки слагаемого $\|\nabla\mathrm{P}_h(w\times\mathbf{u}_h)\|$ рассмотрим раздельно три случая: $\mathrm{Ek}_h\le 1$ (случай 1), $\mathrm{D}_h\ge 1$ (случай 2), $\mathrm{Ek}_h>1$ и $\mathrm{D}_h<1$ (случай 3).
В первом случае имеем:

$$\begin{aligned} (\varepsilon\kappa)^{\frac12}\|\nabla\mathrm{P}_h(w\times\mathbf{u}_h)\| &\le \left(\frac{\varepsilon\tau\mu_u^2}{\|w\|_\infty h^2}\right)^{\frac12}\|\mathrm{P}_h(w\times\mathbf{u}_h)\| \\ &= (\mathrm{Ek}_h\tau\mu_u^2)^{\frac12}\|\mathrm{P}_h(w\times\mathbf{u}_h)\| \le \|\mathrm{P}_h(w\times\mathbf{u}_h)\|\ . \end{aligned} \tag{2.67}$$

Используя это в (2.66) и применяя неравенство Коши-Шварца, получаем

$$a(\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h) \ge \frac12\varepsilon\|\nabla\mathbf{u}_h\|^2+\alpha\|\mathbf{u}_h\|^2+\frac12\kappa\|\mathrm{P}_h(w\times\mathbf{u}_h)\|^2. \tag{2.68}$$

Во втором случае имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\frac12}\kappa\|\nabla\mathrm{P}_h(w\times\mathbf{u}_h)\| &\le \varepsilon^{\frac12}\kappa\mu_u h^{-1}\|w\|_\infty\|\mathbf{u}\| = \tau\mu_u\mathrm{D}_h^{-\frac12}\alpha^{\frac12}\|\mathbf{u}\| \\ &\le \tau^{\frac12}\mu_u\mathrm{D}_h^{-\frac12}\alpha^{\frac12}\|\mathbf{u}\| \le \alpha^{\frac12}\|\mathbf{u}\|\ . \end{aligned} \tag{2.69}$$

Используя это в (2.66) и применяя неравенство Коши-Шварца, получаем

$$a(\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h) \ge \frac12\varepsilon\|\nabla\mathbf{u}_h\|^2+\frac12\alpha\|\mathbf{u}_h\|^2+\kappa\|\mathrm{P}_h(w\times\mathbf{u}_h)\|^2. \tag{2.70}$$

В третьем случае вначале заметим, что условие (A3) и соотношение (1.53) влекут

$$\|\nabla(w \times \mathbf{u}_h)\|^2 = \sum_{i=1}^{2} \|(u_h)_i \nabla w\|^2 + \|w\nabla(u_h)_i\|^2 + 2((u_h)_i \nabla w, w\nabla(u_h)_i)$$
$$\leq 2\sum_{i=1}^{2} \|(u_h)_i \nabla w\|^2 + \|w\nabla(u_h)_i\|^2 \leq c_1 \|w\|_\infty^2 \|\nabla \mathbf{u}_h\|^2 .$$

Нам понадобится тот факт, что $\mathbb{L}_2$-ортогональная проекция ограничена в $\mathbb{H}^1$-норме (см. [49]):

$$\|\mathrm{P}_h \mathbf{u}\|_1 \leq c_2 \|\mathbf{u}\|_1 \qquad \text{для } \mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1 .$$

В качестве константы $\tilde{c}$ в (2.64) мы выберем $\tilde{c} = 2c_2\sqrt{c_1}$, теперь получим

$$\kappa\|\nabla \mathrm{P}_h(w \times \mathbf{u}_h)\| \leq c_2\kappa\|\nabla(w \times \mathbf{u}_h)\| \leq c_2\sqrt{c_1}\kappa\|w\|_\infty\|\nabla \mathbf{u}_h\| \leq \frac{1}{2}\|\nabla \mathbf{u}_h\| . \tag{2.71}$$

Подставляя это в (2.66), выводим

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \geq \frac{1}{2}\varepsilon\|\nabla \mathbf{u}_h\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}_h\|^2 + \kappa\|\mathrm{P}_h(w \times \mathbf{u}_h)\|^2. \tag{2.72}$$

Комбинируя соотношения (2.68), (2.70), (2.72) с (2.65), приходим к оценке

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \geq C|||\mathbf{u}_h|||_\tau^2. \tag{2.73}$$

Результаты в (2.67), (2.69) и (2.71) влекут

$$\varepsilon\kappa^2\|\nabla \mathrm{P}_h(w \times \mathbf{u}_h)\|^2 \leq |||\mathbf{u}_h|||_\tau^2 .$$

Используя последнее неравенство, рассмотрим цепочку оценок

$$\begin{aligned}
|||\mathbf{v}_h|||_\tau^2 &= \varepsilon\|\nabla(\mathbf{u}_h + \kappa\mathrm{P}_h(w \times \mathbf{u}_h))\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}_h + \kappa\mathrm{P}_h(w \times \mathbf{u}_h)\|^2 \\
&\quad + \kappa\|\mathrm{P}_h(w \times \mathbf{u}_h + \kappa w \times \mathrm{P}_h(w \times \mathbf{u}_h))\|^2 \\
&\leq 2(\varepsilon\|\nabla \mathbf{u}_h\|^2 + \varepsilon\kappa^2\|\nabla \mathrm{P}_h(w \times \mathbf{u}_h)\|^2) + \alpha\|\mathbf{u}_h\|^2 + \kappa^2\alpha\|\mathrm{P}_h(w \times \mathbf{u}_h)\|^2 \\
&\quad + 2\kappa(\|\mathrm{P}_h(w \times \mathbf{u}_h)\|^2 + \kappa^2\|\mathrm{P}_h(w \times \mathrm{P}_h(w \times \mathbf{u}_h))\|^2) \\
&\leq 2\varepsilon\|\nabla \mathbf{u}_h\|^2 + 2|||\mathbf{u}_h|||_\tau^2 + \alpha(1+\tau^2)\|\mathbf{u}_h\|^2 + 2\kappa(1+\tau^2)\|\mathrm{P}_h(w \times \mathbf{u}_h)\|^2 \\
&\leq 2\varepsilon\|\nabla \mathbf{u}_h\|^2 + 2\alpha\|\mathbf{u}_h\|^2 + 4\kappa\|\mathrm{P}_h(w \times \mathbf{u}_h)\|^2 + 2|||\mathbf{u}_h|||_\tau^2 \\
&\leq 6|||\mathbf{u}_h|||_\tau^2 .
\end{aligned}$$

Комбинация последней оценки и (2.73) завершает доказательство. □

Замечание 2.1. Заметим, что τ из леммы 2.7 не зависит от ε, α или w.

Замечание 2.2. Используя другую норму (зависящую от сетки)

$$|||\mathbf{u}|||_{\tau,h} = (\varepsilon\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}\|^2 + \frac{\tau}{\|w\|_\infty}\|\mathrm{P}_h(w\times\mathbf{u})\|^2)^{\frac{1}{2}} \tag{2.74}$$

устойчивость $a(\cdot,\cdot)$ на $\mathbf{V}_h$ может быть доказана без привлечения условий (A1) и (A2) на w, так как оценка (2.65) не требуется. Более того, непрерывность $a(\cdot,\cdot)$ на $\mathbf{V}_h\times\mathbf{H}_0^1$ относительно нормы (2.74) также выполняется в отсутствии предположений (A1), (A2). Устойчивость и непрерывность влекут удовлетворительную оценку сходимости метода конечных элементов в норме $|||\cdot|||_{\tau,h}$ (см. материал для задачи Осеена в разделе 2.6). Однако, для некоторых рассуждений, построенных на рассмотрении сопряженной задачи, при доказательстве свойства аппроксимации для многосеточного метода (см. Теорему 2.3 и раздел 3.4) нам требуется непрерывность формы $a(\cdot,\cdot)$ на $\mathbf{H}_0^1\times\mathbf{H}_0^1$, а в этом случае норма (2.74) не подходит.

2.3.2 Сходимость.

Оценка сходимости метода конечных элементов из теоремы ниже доказывается путём стандартных рассуждений, основанных на свойстве ортогональности Галёркина, устойчивости, непрерывности и аппроксимационных свойствах конечных элементов.

Теорема 2.2. *Пусть* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{u}_h$ *являются решениями* (1.39) *и* (2.61)*, соответственно. Пусть выполняются предположения леммы 2.7, возьмём* $\tau\in(0,1]$*, как в лемме 2.7. Выполняются следующие неравенства*

$$|||\mathbf{u}-\mathbf{u}_h|||_\tau \le C_\tau\, h^j(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{u}\|_{j+1} + (\alpha^{\frac{1}{2}} + \|w\|_\infty^{\frac{1}{2}})\|\mathbf{u}\|_j)\ , \quad j=0,1, \tag{2.75}$$

$$|||\mathbf{u}-\mathbf{u}_h|||_\tau \le C_\tau\, h(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + (\alpha^{\frac{1}{2}} + \|w\|_\infty^{\frac{1}{2}})h)\|\mathbf{u}\|_2\ . \tag{2.76}$$

Константы C_τ *не зависят от* ε, α, w, $\mathbf{u}$ *и* h*, но могут зависеть от* τ*.*

Доказательство. Пусть $\hat{\mathbf{u}}_h$ – произвольный элемент из $\mathbf{V}_h$. Возьмём τ такое, как в лемме 2.7, тогда существует $\mathbf{v}_h\in\mathbf{V}_h$ такое, что

$$C|||\mathbf{u}_h-\hat{\mathbf{u}}_h|||_\tau\,|||\mathbf{v}_h|||_\tau \le a(\mathbf{u}_h-\hat{\mathbf{u}}_h,\mathbf{v}_h).$$

Используя ортогональность Галёркина и оценку непрерывности (1.57), получаем

$$a(\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) = a(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) \le C_\tau |||\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}_h|||_\tau |||\mathbf{v}_h|||_\tau.$$

Следовательно, выполнено

$$|||\mathbf{u}_h - \hat{\mathbf{u}}_h|||_\tau \le C_\tau |||\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}_h|||_\tau. \tag{2.77}$$

Из неравенства треугольника и (2.77) следует, что

$$\begin{aligned} |||\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|||_\tau^2 &\le C_\tau |||\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}_h|||_\tau^2 \\ &\le C_\tau \left(\varepsilon \|\nabla(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}_h)\|^2 + \alpha \|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}_h\|^2 + \frac{\tau}{\|w\|_\infty} \|w \times (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}_h)\|^2 \right) \\ &\le C_\tau \left(\varepsilon \|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}_h\|_1^2 + (\alpha + \tau \|w\|_\infty) \|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}_h\|^2 \right) \end{aligned} \tag{2.78}$$

В силу (2.2) и (2.3) можем рассмотреть такой элемент $\hat{\mathbf{u}}_h = I_h \mathbf{u}$, для которого выполнено

$$\|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}_h\|_1^2 \le C h^{2j} \|\mathbf{u}\|_{j+1}^2 \ , \quad \|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}_h\|^2 \le C h^{2j} \|\mathbf{u}\|_j^2 \ , \quad j = 0, 1.$$

Использование данных оценок в (2.78) доказывает (2.75). Если в (2.78) использовать неравенства

$$\|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}_h\|_1^2 \le C h^2 \|\mathbf{u}\|_2^2 \ , \quad \|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}_h\|^2 \le C h^4 \|\mathbf{u}\|_2^2 \ ,$$

получаем результат в (2.76). □

Заметим, что величина $\|w\|_\infty$ входит в оценки (2.75) – (2.76) так же, как значение α, которое измеряет *реакцию.*

Теперь докажем оценку сходимости в $\mathbb{L}_2$-норм. Этот результат крайне важен при анализе сходимости многосеточного метода.

Теорема 2.3. *Предположим выполнение условий (A1), (A2), (A3). Для произвольного* $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$ *пусть* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{u}_h$ *являются решениями* (1.39) *и* (2.61), *соответственно. Тогда*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \le C \min\left\{ \frac{h^2}{\varepsilon}, \frac{1}{\alpha + \|w\|_\infty} \right\} \|\mathbf{f}\| \tag{2.79}$$

справедливо с некоторой константой C, *не зависящей от* $\varepsilon, \alpha, w, h$ *и* $\mathbf{f}$.

Доказательство. Возмём $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$ и пусть $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_h$ будут решениями (1.39) и (2.61), соответственно. Из (2.75) и оценки на $\mathbb{H}^2$-норму (1.47) следуют соотношения

$$
\begin{aligned}
|||\mathbf{u}-\mathbf{u}_h|||_\tau &\le C_\tau h\left(\varepsilon^{\frac12}\|\mathbf{u}\|_2+(\alpha^{\frac12}+\|w\|_\infty^{\frac12})\|\mathbf{u}\|_1\right)\\
&\le C_\tau\frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|_2^2+\varepsilon(\alpha+\|w\|_\infty)\|\nabla\mathbf{u}\|^2\right)^{\frac12}\le C_\tau\frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\|\mathbf{f}\|.
\end{aligned}
\tag{2.80}
$$

Теперь используем аргументы двойственности. Для этого введём в рассмотрение сопряжённую билинейную форму

$$
a^*(\mathbf{u},\mathbf{v})=\varepsilon(\nabla\mathbf{u},\nabla\mathbf{v})+\alpha(\mathbf{u},\mathbf{v})-(w\times\mathbf{u},\mathbf{v})\quad \text{для } \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{H}_0^1\,,
$$

и сопряжённую задачу

$$
\text{найти}\quad \tilde{\mathbf{u}}\in\mathbf{H}_0^1\ \text{ такую, что }\ a^*(\tilde{\mathbf{u}},\mathbf{v})=(\tilde{\mathbf{f}},\mathbf{v})\qquad \text{для всех } \mathbf{v}\in\mathbf{H}_0^1\,,
$$

с $\tilde{\mathbf{f}} := \mathbf{u}-\mathbf{u}_h \in \mathbf{H}_0^1 \subset \mathbf{L}_2(\Omega)$. Пусть $\tilde{\mathbf{u}}_h \in \mathbf{V}_h$ является решением дискретной сопряжённой задачи, т.е., $a^*(\tilde{\mathbf{u}}_h,\mathbf{v}_h)=(\tilde{\mathbf{f}},\mathbf{v}_h)$ для всех $\mathbf{v}_h\in\mathbf{V}_h$. Заметим, что $a^*(\cdot,\cdot)$ совпадает с $a(\cdot,\cdot)$, если в $a(\cdot,\cdot)$ заменить w на $-w$. Утверждения леммы 2.7 и теоремы 2.2 не зависят от $\mathrm{sign}(w)$, а следовательно, справедливы и для сопряженной задачи. Более того, в силу того, что выбор τ в лемме 2.7 не зависит от w (см. замечание 2.1), оценка (2.80) выполняется для исходной и сопряжённой с тем же τ. Используя эти оценки сходимости для исходной и сопряжённой задачи и результат из теоремы 2.2, выводим

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|^2 &= (\tilde{\mathbf{f}},\tilde{\mathbf{f}})=a^*(\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\mathbf{f}})=a(\tilde{\mathbf{f}},\tilde{\mathbf{u}})=a(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h,\tilde{\mathbf{u}})\\
&= a(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h,\tilde{\mathbf{u}}-\tilde{\mathbf{u}}_h)\le C_\tau|||\mathbf{u}-\mathbf{u}_h|||_\tau|||\tilde{\mathbf{u}}-\tilde{\mathbf{u}}_h|||_\tau\\
&\le C_\tau\frac{h^2}{\varepsilon}\|\mathbf{f}\|\,\|\tilde{\mathbf{f}}\|=C_\tau\frac{h^2}{\varepsilon}\|\mathbf{f}\|\,\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|.
\end{aligned}
$$

Таким образом, имеет место $\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|\le C_\tau\frac{h^2}{\varepsilon}\|\mathbf{f}\|$, что доказывает первую оценку в (2.79). Для проверки второй оценки заметим, что благодаря

(1.44) и (A1) выполняется

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\| &\le \frac{1}{\alpha+c_w}(\alpha\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|+\|w\times(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h)\|)\\
&\le \frac{1}{\alpha+\|w\|_\infty}\frac{\alpha+\|w\|_\infty}{\alpha+c_w}\left(\alpha^{\frac12}+\frac{\|w\|_\infty^{\frac12}}{\tau^{\frac12}}\right)\\
&\quad\times\left(\alpha^{\frac12}\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|+\frac{\tau^{\frac12}}{\|w\|_\infty^{\frac12}}\|w\times(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h)\|\right) \qquad (2.81)\\
&\le \frac{2}{\alpha+\|w\|_\infty}(1+\eta)\tau^{-\frac12}(\alpha^{\frac12}\tau^{\frac12}+\|w\|_\infty^{\frac12})|||\mathbf{u}-\mathbf{u}_h|||_\tau\\
&\le C_\tau\frac{1}{\alpha+\|w\|_\infty}(\alpha^{\frac12}+\|w\|_\infty^{\frac12})|||\mathbf{u}-\mathbf{u}_h|||_\tau
\end{aligned}
$$

Наконец, заметим, что с помощью (2.75) при $j=0$ и результатов в (1.44), (1.47) получается

$$
\begin{aligned}
(\alpha^{\frac12}+\|w\|_\infty^{\frac12})|||\mathbf{u}-\mathbf{u}_h|||_\tau &\le (\alpha^{\frac12}+\|w\|_\infty^{\frac12})(\varepsilon^{\frac12}\|\mathbf{u}\|_1+(\alpha^{\frac12}+\|w\|_\infty^{\frac12})\|\mathbf{u}\|)\\
&\le \varepsilon^{\frac12}(\alpha^{\frac12}+\|w\|_\infty^{\frac12})\|\mathbf{u}\|_1+2(\alpha+\|w\|_\infty)\|\mathbf{u}\|\\
&\le \varepsilon^{\frac12}(\alpha^{\frac12}+\|w\|_\infty^{\frac12})\|\mathbf{u}\|_1+2(1+\eta)(\|w\times\mathbf{u}\|+\alpha\|\mathbf{u}\|)\\
&\le C\big(\varepsilon(\alpha+\|w\|_\infty)\|\nabla\mathbf{u}\|^2+\alpha^2\|\mathbf{u}\|^2+\|w\times\mathbf{u}\|^2\big)^{\frac12}\\
&\le C\|\mathbf{f}\|
\end{aligned}
$$

Последнее неравенство в комбинации с (2.81) влечет вторую оценку в (2.79). $\square$

2.3.3 Численная иллюстрация.

В этом разделе приведены результаты нескольких численных экспериментов, изучающих сходимость метода конечных элементов для системы (1.38) и иллюстрирующих теоретический материал параграфа 2.3.2. В качестве $\mathbf{V}_h$ выбираем пространство кусочно-линейных вектор-функций относительно равномерной триангуляции. Параметров разбиения служит $h=h_k=2^{-k},\ k=4,5,\dots,9$.

В приведенных ниже экспериментах мы рассматриваем задачи с известным a priori непрерывным решением $\mathbf{u}\in\mathbf{H}^2(\Omega)\cap\mathbf{H}^1_0$, удовлетворяющим системе (1.39). Ошибка метода конечных элементов измеряется следующим образом. Пусть $\hat{\mathbf{u}}_h \in \mathbf{V}_h$ – узловой интерполянт непрерывного решения $\mathbf{u}$, а $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ – решение дискретной задачи по методу конечных элементов. В качестве индикатора ошибки рассматривается величина

$$err(\mathbf{u}, h, \varepsilon) = \frac{\|\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h\|}{\|\mathbf{f}\|} \tag{2.82}$$

Рассмотрим задачу при различном выборе функции w. Заметим, что в случае (линеаризованных) уравнений Навье-Стокса $w = \operatorname{curl} \mathbf{v} = -\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}$, где $\mathbf{v} = (v_1(x,y), v_2(x,y))$ – приближение к полю скоростей жидкости. В примере I мы рассмотрим задачу, соответствующую потоку с одним и двумя вращающимися вихрями. В примере II возмём поток $\mathbf{v}$, имеющий параболический пограничный слой. В обоих примерах правая часть выбирается таким образом, что непрерывное решение $\mathbf{u}$ совпадает с полем скоростей $\mathbf{v}$. Это является разумным выбором, если задача (1.39) возникает из рассмотрения линеаризованной системы Навье-Стокса.

Результаты расчетов будут приведены для случая $\alpha = 0$. Для $\alpha > 0$ эксперименты показывают только лучшие результаты, чем для $\alpha = 0$.

Пример Ia. Положим $\mathbf{v}_r = (v_1, v_2)$, где

$$\begin{aligned} v_1(x,y) &= \quad 4(2y-1)x(1-x), \\ v_2(x,y) &= -4(2x-1)y(1-y)\ , \end{aligned} \tag{2.83}$$

и $w = \operatorname{curl} \mathbf{v}_r$. Данное поле $\mathbf{v}_r$ описывает вращающийся вихрь. Для w условия (A2) и (A3) выполнены. Относительно условия (A1) заметим, что $\|w\|_\infty = \mathcal{O}(1)$ и $c_w = 0$. Однако, отталкиваясь от того факта, что w обращается в ноль только в угловых точках области, можем сказать, что условие (A1) "почти" выполнено. Для различных значений h и ε величина $err(\mathbf{u}, h, \varepsilon)$ показана в таблице 2.1.

На рисунке 2.1 разности $(u_1 - (u_h)_1)(0.5, y)$ и $(\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial (u_h)_1}{\partial y})(0.5, y)$ между (производными) первых компонент непрерывного решения и решения методом конечных элементов показаны при $\varepsilon = 10^{-6}$. Из-за симметрии график ошибки нарисован только на половине интервала (Рис. 2.1b). График для ошибки в производной нарисован только на отрезке $[0, 0.1]$ около границы (Рис. 2.1a). Хорошо виден численный погранслой, характерный при численном решении уравнений реакции-диффузии.

Таблица 2.1: $err(\mathbf{u}, h, \varepsilon)$ в Примере Ia

	h					
ε	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512
1	4.5e-4	1.1e-4	2.8e-5	7.2e-6	1.8e-6	4.5e-7
1e-2	8.6e-3	2.1e-3	5.2e-4	1.3e-4	3.3e-5	8.2e-6
1e-4	1.0e-2	2.7e-3	7.0e-4	1.7e-4	4.4e-5	1.1e-5
1e-6	1.0e-2	2.7e-3	7.7e-4	2.1e-4	5.4e-5	1.3e-5
1e-8	1.0e-2	2.7e-3	7.7e-4	2.1e-4	5.9e-5	1.6e-5

Пример Ib. Рассматриваем $\mathbf{v}_R = (v_1, v_2)$, где

$$\begin{array}{rcl} v_1(x,y) & = & \frac{1}{\psi}\sin(\psi\pi x)\cos(\pi y), \\ v_2(x,y) & = & -\cos(\psi\pi x)\sin(\pi y). \end{array} \tag{2.84}$$

и $w = \operatorname{curl} \mathbf{v}_R$. В этом примере моделируется ситуация двух вихрей, вращающихся в противоположных направлениях. Заметим, что условия (A1) и (A2) не выполняются. Параметр ψ положим равным 1.6. Один вихрь полностью находится внутри области, в которой ведутся вычисления, второй вихрь лишь частично. Функция w (функция вихря) для данного примера показана на рисунке 2.2a. Обратим внимание на перемену знака функции w при $x = 0.625$. Ошибка метода конечных элементов, приведенная в таблице 2.2, больше, чем в примере Ia (это может быть обусловлено “существенным” нарушением условий (A1) и (A2)).

Таблица 2.2: $err(\mathbf{u}, h, \varepsilon)$ для примера Ib

	h					
ε	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512
1	1.9e-3	4.9e-4	1.2e-4	3.0e-5	7.5e-6	1.9e-6
1e-2	1.5e-2	3.6e-3	9.0e-4	2.3e-4	5.7e-5	1.4e-5
1e-4	4.8e-2	7.1e-3	1.8e-3	4.5e-4	1.1e-4	2.9e-5
1e-6	1.4e-1	7.8e-2	1.0e-2	9.5e-4	2.3e-4	5.7e-5
1e-8	1.4e-1	9.7e-2	6.7e-2	2.9e-2	2.0e-3	1.4e-4

На рисунке 2.3 показан график разности $(u_1 - (u_h)_1)(0.5, y)$ для $\varepsilon = 10^{-6}$. Заметим, что некоторые локальные осцилляции наблюдаются в

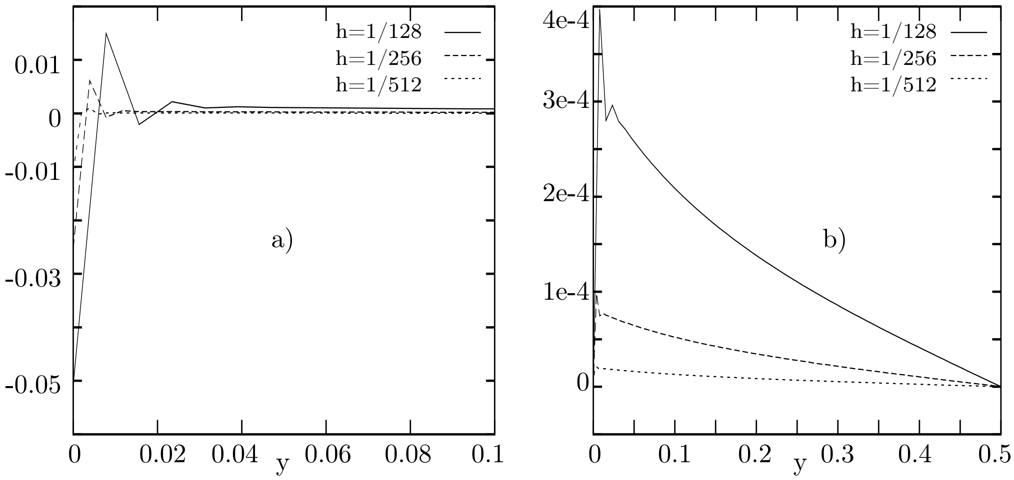

Рис. 2.1: Ошибка метода конечных элементов в Примере Ia, $\varepsilon = 10^{-6}$, $x = 0.5$ a) в производной по y, b) в решении

окрестности $x = 0.625$, т.е. как раз там, где локально нарушается условие (A1).

Пример II. Положим $\mathbf{v}_l = (v_1, v_2)$, где

$$\begin{aligned} v_1(x,y) &= 1 - \exp(-y/\sqrt{\varepsilon}), \\ v_2(x,y) &= 0, \end{aligned} \tag{2.85}$$

и $w = \operatorname{curl} \mathbf{v}_l$. Данный выбор моделирует параболический погранслой в поле скоростей жидкости. Ширина параболического погранслоя пропорциональна $\sqrt{\varepsilon}$. Заметим, что $\|w\|_\infty = O(\varepsilon^{-1/2})$. Величина завихренности равна $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ около границы и экспоненциально убывает вне погранслоя (см. рис. 2.2b). Как и ранее, выбираем $\mathbf{f}$ таким образом, что непрерывное решение совпадает с модельным полем скоростей: $\mathbf{u} = \mathbf{v}_l$. Ошибка метода конечных элементов приведена в таблице 2.3. $\mathbb{L}_2$-норма правой части $\mathbf{f}$ равна $O(\varepsilon^{-\frac{1}{4}})$ при $\varepsilon \to 0$, поэтому для получения абсолютных значений ошибки, $\|\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h\|$, необходимо применить соответствующее масштабирование результатов из таблицы 2.3 (например, умножить на 10 для $\varepsilon = 10^{-4}$), (см. (2.82)).

На рисунке 2.4 приведены $u_1(0.5, y)$ и $(u_h)_1(0.5, y)$ для случая $\varepsilon = 10^{-3}$ и $\varepsilon = 10^{-4}$ и нескольких значений h. Конечно-элементное решение явля-

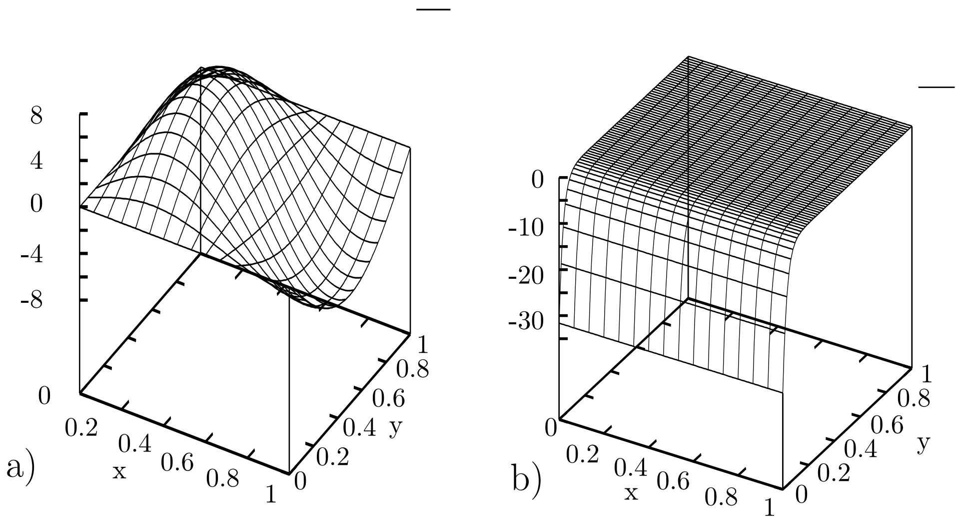

Рис. 2.2: a) Функция w в примере Ib; b) Функция w в примере II, $\varepsilon = 10^{-3}$.

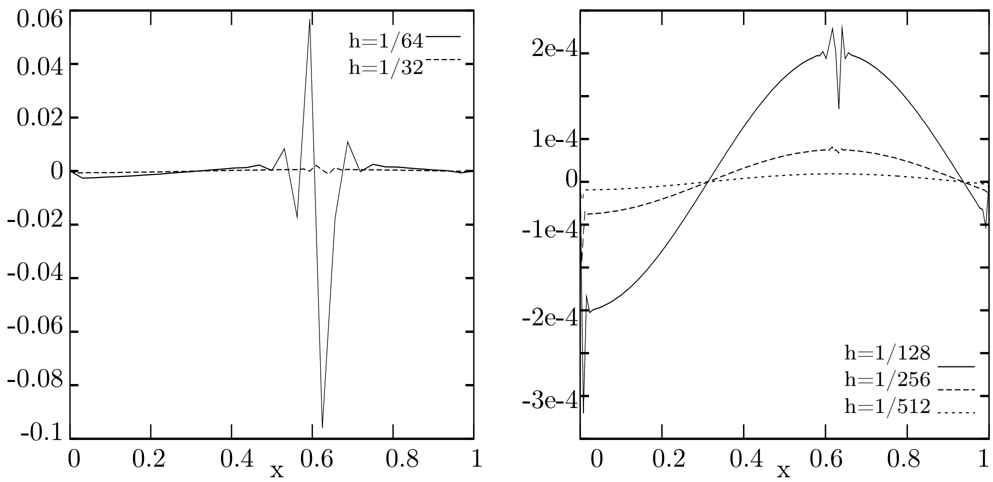

Рис. 2.3: Ошибка метода конечных элементов в примере Ib, $\varepsilon = 10^{-6}$, $y = 0.5$

Таблица 2.3: $err(\mathbf{u}, h, \varepsilon)$ в примере II

	h					
ε	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512
1	7.4e-6	1.8e-6	4.5e-7	1.1e-7	2.8e-8	7.0e-9
1e-2	3.7e-3	8.6e-3	2.1e-4	5.3e-5	1.3e-5	2.2e-6
1e-4	4.2e-2	2.4e-2	3.1e-3	6.8e-4	1.6e-4	4.1e-5
1e-6	1.2e-2	1.2e-2	1.2e-2	1.2e-2	1.0e-2	8.0e-4
1e-8	3.9e-3	3.7e-3	3.7e-3	3.7e-3	3.6e-3	3.6e-3

ется плохим приближением к непрерывному, если пограничный слой в решении не разрешается сеткой, т.е. $h > \varepsilon^{\frac{1}{2}}$. Однако, при $h \sim \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ результаты являются вполне приемлемыми, несмотря на то, что *сеточные* числа Рейнольдса и Ek_h^{-1} остаются очень большими (например, $\approx 10^2$ для $\varepsilon = 10^{-4}$). Более того, даже при очень грубых сетках в дискретном решении не наблюдается глобальных осцилляций. Можно ожидать, что заметное улучшение качества аппроксимации можно получить, если комбинировать стандартный метод Галёркина с локальным измельчением сетки внутри погранслоя.

Напомним, что теоретические результаты из предыдущих разделов доказывают в случае $\alpha = 0$ оценку

$$err(\mathbf{u}, h, \varepsilon) \le c \min\{\varepsilon^{-1} h^2, \|w\|_\infty^{-1}\} \tag{2.86}$$

при некоторых ограничениях на w. Эти ограничения “почти выполняются” для примера Ia и не выполняются для примера Ib и II.

Численные эксперименты, действительно, показывают зависимость вида $O(h^2)$ величины $err(\mathbf{u}, h, \varepsilon)$, пока ε не слишком мало. Однако, в последнем случае мы наблюдаем наличие не зависящей от ε и h оценки сверху для $err(\mathbf{u}, h, \varepsilon)$ из (2.86), а сходимость $O(h^2)$ обнаруживает себя для достаточно малых h. При фиксированном h и $\varepsilon \to 0$ наблюдается рост ошибки (до какого-то предела). В примерах Ia,b этот рост более плавный, чем $O(\varepsilon^{-1})$, что указывает на возможную неоптимальность ε-зависимости в оценке (2.86).

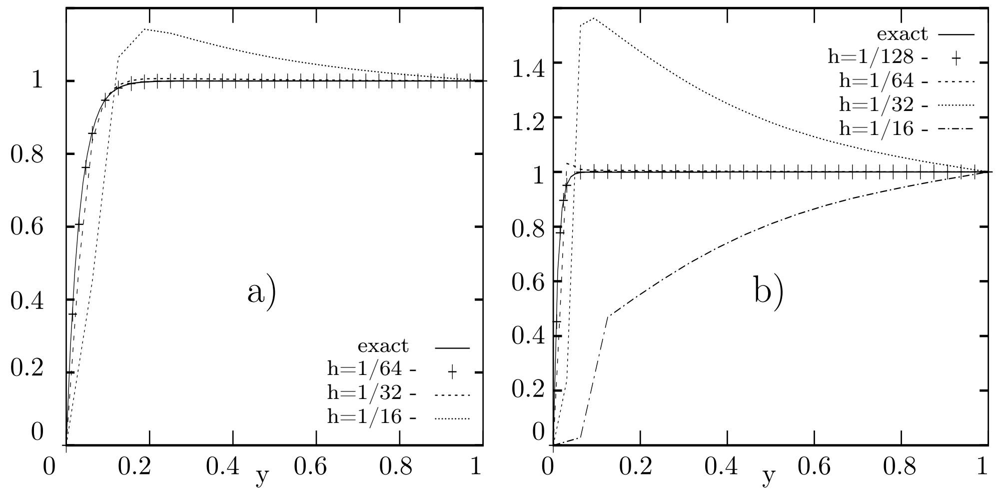

Рис. 2.4: Точное решение и решение методом конечных элементов в примере II, $x = 0.5$: a) $\varepsilon = 10^{-3}$; b) $\varepsilon = 10^{-4}$

2.4 Обобщённая система Стокса.

2.4.1 Устойчивые дискретизации.

Метод конечных элементов для обобщенной задачи Стокса (1.61) состоит в нахождении пары $\{\mathbf{u}_h, p_h\}$ из $\mathbf{V}_h \times \mathbb{Q}_h$ такой, что

$$a(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) = f(\mathbf{v}_h) \quad \forall \ \{\mathbf{v}_h, q_h\} \in \mathbf{V}_h \times \mathbb{Q}_h \ . \tag{2.87}$$

Здесь $\mathbf{V}_h$ и $\mathbb{Q}_h$ – конечно-элементные аппроксимации пространств $\mathbf{H}^1_0(\Omega)$ и $\mathbb{L}^0_2(\Omega)$, и

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_h) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - (g, q) \\ a(\mathbf{u}, p\,;\, \mathbf{v}, q) &= \varepsilon(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \xi(\operatorname{div}\mathbf{u}, \operatorname{div}\mathbf{v}) - (p, \operatorname{div}\mathbf{v}) + (\operatorname{div}\mathbf{u}, q), \end{aligned}$$

$\xi \geq 0$ – дополнительный параметр, в случае $\varepsilon \downarrow 0$ выбор $\xi = \xi_0 > 0$ вместо $\xi = 0$ имеет выраженный стабилизирующий эффект.

В этом разделе мы предполагаем, что пара конечно-элементных пространств $(\mathbf{V}_h, \mathbb{Q}_h)$ является LBB-устойчивой с константой $\hat{\beta}$, не зависящей от h:

$$\inf_{q_h\in\mathbb{Q}_h}\sup_{\mathbf{v}_h\in\mathbf{V}_h}\frac{(\operatorname{div}\mathbf{v}_h,q_h)}{\|\nabla\mathbf{v}_h\|\|q_h\|}\geq\hat{\beta}>0\ . \qquad (2.88)$$

Неравенство (2.88) может рассматриваться, как дискретный аналог неравенства Нечаса (1.68). Считается, что условие (2.88) для метода конечных элементов для задач с седловой точкой впервые появилось в работах [30], [59]. Так при равенстве выражения в правой части (2.88) нулю может не существовать $\mathbf{u}_h$ и p_h, удовлетворяющих (2.87) (см., например, упражнение 4.4 в [168]). Если infsup-выражение из (2.88) положительно, но стремится к 0 при $h\to 0$, то единственное решение (2.87) хотя и существует, но может не сходится к непрерывному решению дифференциальной задачи (1.61).

Важному условию (2.88) *не будет* удовлетворять, например, следующий выбор: в качестве $\mathbf{V}_h$ возьмем кусочно-линейную конформную аппроксимацию $\mathbf{H}^1_0(\Omega)$, а в качестве $\mathbb{Q}_h$ кусочно-линейные (или кусочно-постоянные) функции p_h. Соответствующие пары имеют обозначения P_1-P_1 и P_1-P_0. Выбор, удовлетворяющий LBB условию, будет кусочно-линейное (постоянное) давление p_h относительно некоторой триангуляции и скорость $\mathbf{u}_h$ кусочно-линейная относительно триангуляции вдвое чаще, см. рисунок 2.5. Стандартное обозначение этих пар: $P_1isoP_2-P_1$ и $P_1isoP_2-P_0$. Также (2.88) выполнено для пары P_2-P_1 (кусочно-квадратичная скорость и кусочно-линейное давление). Другой пример пары пространств, удовлетворяющей (2.88) – это неконформные элементы Крузе-Равиа – $\tilde{P}_1-P_0$ (кусочно-постоянное давление p_h и кусочно-линейная скорость $\mathbf{u}_h$ на той же триангуляции, при этом $\mathbf{u}_h$ – непрерывна только в серединах сторон элементов триангуляции). Так как неконформные элементы $\mathbf{u}_h$ могут быть разрывны на ребрах треугольников в триангуляции, то билинейные формы в (2.87) должны быть определены поэлементно. Детальный анализ и другие пары $\mathbf{V}_h,\mathbb{Q}_h$ можно найти в [60].

Чтобы применить абстрактную теорию из § 1.4.5 обозначим:

$$\sqrt{\gamma_h}:=\inf_{q_h\in\mathbb{Q}_h}\sup_{\mathbf{v}_h\in\mathbf{V}_h}\frac{(\operatorname{div}\mathbf{v}_h,q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{V}}\|q_h\|}\ .$$

где $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}}=\left(\varepsilon\|\nabla\mathbf{u}\|^2+\alpha\|\mathbf{u}\|^2+\xi\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Заметим, что в силу (2.88) выполнено $\gamma_h>0$. Для дальнейшего анализа в этом параграфе рассмотрим

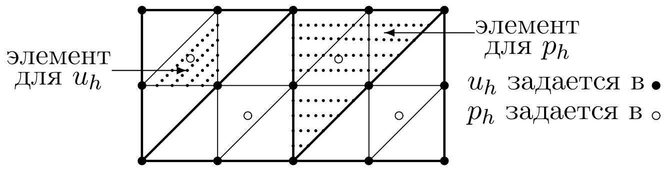

Рис. 2.5: Пример LBB-устойчивой пары ($P_1 isoP_2 - P_0$).

дискретную задачу в виде линейной системы алгебраических уравнений в $\mathbb{R}^{n+m}$. С этой целью рассмотрим стандартные базисы в $\mathbf{V}_h$ и $\mathbb{Q}_h$ и соответствующие изоморфизмы:

$$J_V : \mathbb{R}^n \to \mathbf{V}_h, \quad n := \dim(\mathbf{V}_h), \quad J_Q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{Q}_h, \quad m := \dim(\mathbb{Q}_h) \ .$$

Пусть матрицы жёсткости $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и матрица масс $\hat{M} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ задаются соотношениями

$$\begin{aligned} \langle Ax, y\rangle &= a_1(J_V x, J_V y) \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R}^n \ , \\ \langle Bx, y\rangle &= b(J_V x, J_Q y) \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m \ , \\ \langle Mx, y\rangle &= (J_Q x, J_Q y) \quad \forall\ x, y \in \mathbb{R}^m \ . \end{aligned} \tag{2.89}$$

Билинейные формы a_1 и b для обобщенной задачи Стокса заданы в (1.110). Напомним также обозначение нормы в $\mathbf{H}_0^1 \times \mathbb{L}_0^2$

$$|||\mathbf{u}, p||| = \left(\varepsilon\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}\|^2 + \xi\|\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|^2 + \|p\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \ .$$

Теперь докажем infsup неравенство для a на $\mathbf{V}_h \times \mathbb{Q}_h$:

Лемма 2.8. *Выполняется условие:*

$$\inf_{\{\mathbf{u}_h, p_h\}\in\mathbf{V}_h\times\mathbb{Q}_h} \sup_{\{\mathbf{v}_h, q_h\}\in\mathbf{V}_h\times\mathbb{Q}_h} \frac{a(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h)}{|||\mathbf{u}_h, p_h|||\ |||\mathbf{v}_h, q_h|||} = \frac{1}{2}\min\{\,2, \sqrt{1+4\gamma_h} - 1\,\}$$

Доказательство. Полагая $\tilde{B} := M^{-\frac{1}{2}}B$, получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{\gamma_h} &:= \inf_{y\in\mathbb{R}^m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\langle Bx, y\rangle}{\langle Ax, x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle My, y\rangle^{\frac{1}{2}}} \\ &= \inf_{y\in\mathbb{R}^m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\langle \tilde{B}x, y\rangle}{\|x\|_A\|y\|} \ . \end{aligned} \tag{2.90}$$

Пусть $L := \begin{pmatrix} I & A^{-\frac{1}{2}}\tilde{B}^T \\ \tilde{B}A^{-\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}$. Заметим, что

$$\inf_{\{\mathbf{u}_h,p_h\}\in\mathbf{V}_h\times\mathbb{Q}_h}\ \sup_{\{\mathbf{v}_h,q_h\}\in\mathbf{V}_h\times\mathbb{Q}_h} \frac{a(\mathbf{u}_h,p_h;\mathbf{v}_h,q_h)}{|||\mathbf{u}_h,p_|\|\ |||\mathbf{v}_h,q_h|||}$$
$$= \inf_{z\in\mathbb{R}^{n+m}}\ \sup_{w\in\mathbb{R}^{n+m}} \frac{\left\langle \begin{pmatrix} I & A^{-\frac{1}{2}}B^TM^{-\frac{1}{2}} \\ M^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix} z, w\right\rangle}{\|z\|\|w\|}$$
$$= \inf_{z\in\mathbb{R}^{n+m}}\ \sup_{w\in\mathbb{R}^{n+m}} \frac{\langle Lz,w\rangle}{\|z\|\|w\|} = \inf_{z\in\mathbb{R}^{n+m}} \frac{\|Lz\|}{\|z\|} = \|L^{-1}\|^{-1}\ .$$

Теперь мы применяем лемму 1.14. □

2.4.2 Сходимость.

Благодаря оценке непрерывности (1.106) и infsup неравенству из леммы 2.8 стандартными рассуждениями выводится оценка на норму ошибки в методе конечных элементов.

Теорема 2.4. *Пусть* $\{\mathbf{u},p\}$ *– решение непрерывной задачи (1.104), а* $\{\mathbf{u}_h,p_h\}$ *– конечно-элементное решение (2.87). Имеет место оценка:*

$$\begin{aligned} |||\mathbf{u}-\mathbf{u}_h,p-p_h||| &\le \left(1+\hat{C}(\gamma_h,\Gamma)\right) \min_{\mathbf{v}_h\in\mathbf{V}_h,q_h\in\mathbb{Q}_h} |||\mathbf{u}-\mathbf{v}_h,p-q_h|||\ , \\ \textit{где}\ \ \hat{C}(\gamma_h,\Gamma) &:= \frac{\sqrt{1+4\Gamma}+1}{\min\{\,2,\sqrt{1+4\gamma_h}-1\,\}}\ . \end{aligned} \tag{2.91}$$

константа Γ *– определена в* (1.105).

Доказательство. Для произвольных $\mathbf{v}_h\in\mathbf{V}_h$, $q_h\in\mathbb{Q}_h$ определим $\mathbf{e} := \mathbf{u}-\mathbf{v}_h$, $\mathbf{e}_h = \mathbf{u}_h-\mathbf{v}_h$, $g := p-q_h$, $g_h := p_h-q_h$ Из свойства ортогональности Галёркина следует

$$a(\mathbf{e}_h,g_h;\mathbf{w}_h,r_h) = a(\mathbf{e},g;\mathbf{w}_h,r_h) \quad \forall\ \{\mathbf{w}_h,r_h\}\in\mathbf{V}_h\times\mathbb{Q}_h\ .$$

Используя это вместе с оценкой непрерывности (1.106) и infsup неравенством из леммы 2.8 получаем для некоторых $(\mathbf{w}_h, r_h) \in \mathbf{V}_h \times \mathbb{Q}_h$:

$$
\begin{aligned}
|||\mathbf{e}_h, g_h||| &\le \frac{2}{\min\{\,2, \sqrt{1+4\gamma_h}-1\,\}} \frac{a(\mathbf{e}_h, g_h; \mathbf{w}_h, r_h)}{|||\mathbf{w}_h, r_h|||} \\
&= \frac{2}{\min\{\,2, \sqrt{1+4\gamma_h}-1\,\}} \frac{a(\mathbf{e}, g; \mathbf{w}_h, r_h)}{|||\mathbf{w}_h, r_h|||} \\
&\le \frac{\sqrt{1+4\Gamma}+1}{\min\{\,2, \sqrt{1+4\gamma_h}-1\,\}} |||\mathbf{e}, g||| \ .
\end{aligned}
$$

Осталось воспользоваться неравенством треугольника:

$$
|||\mathbf{u}-\mathbf{u}_h, p-p_h||| \le |||\mathbf{e}_h, g_h||| + |||\mathbf{e}, g|||.
$$

□

Применим доказанную теорему для анализа сходимости метода конечных элементов для обобщенной системы Стокса. Заметим, что билинейная форма $a(\cdot,\cdot)$ зависит от ξ, и в отличии от дифференциального случая *дискретное решение, вообще говоря, зависит от* ξ. Для произвольной пары $\{\mathbf{u}, p\} \in \mathbf{H}_0^1 \times \mathbb{L}_2^0$ выполняется

$$
\begin{gathered}
\tfrac{1}{2}(\varepsilon^{\frac12}\|\nabla \mathbf{u}\| + \xi^{\frac12}\|\mathrm{div}\, \mathbf{u}\| + \alpha^{\frac12}\|\mathbf{u}\| + \|p\|) \\
\le |||u, p||| \le \\
(\varepsilon^{\frac12} + \xi^{\frac12})\|\nabla \mathbf{u}\| + \alpha^{\frac12}\|\mathbf{u}\| + \|p\| \ .
\end{gathered}
$$

Используя это в теореме 2.4, получаем оценку ошибки

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^{\frac12}\|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h)\| + \xi^{\frac12}\|\mathrm{div}\,(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h)\| + \alpha^{\frac12}\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\| + \|p-p_h\| \\
&\le 2(1+\hat{C}(\gamma_h, \Gamma))\Big(\min_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h}\{(\varepsilon^{\frac12}+\xi^{\frac12})\|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v}_h)\| + \alpha^{\frac12}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}_h\|\} \\
&\qquad + \min_{q_h \in \mathbb{Q}_h}\|p-q_h\|\Big) \ . \qquad (2.92)
\end{aligned}
$$

Теперь будем анализировать зависимость множителя $\hat{C}(\gamma_h, \Gamma)$ от параметров ε, α, ξ и шага сетки h.

Теорема 2.5. *Справедливо следующее*

$$\hat{C}(\gamma_h,\Gamma) \le \frac{1}{4\hat{\beta}^2}(\sqrt{5}+1)^2 \frac{\max\{\hat{\beta}^2\,,\,\varepsilon+\xi\}}{\min\{1\,,\,\sqrt{\varepsilon+\xi}\}} =: \hat{C}_0(\varepsilon,\xi), \quad \textit{если} \ \ \alpha=0\ , \tag{2.93}$$

$$\hat{C}(\gamma_h,\Gamma) \le \frac{1}{4\hat{\beta}^2}(\sqrt{5}+1)^2 \frac{\max\{\hat{\beta}^2\,,\,\varepsilon+c_F^2+\xi\}}{\min\{1\,,\,\sqrt{\varepsilon+\xi}\}} =: \hat{C}_1(\varepsilon,\xi), \quad \textit{если} \ \ \alpha=1\ . \tag{2.94}$$

Доказательство. Будем рассматривать $\alpha \in [0,1]$. Для $x \ge 0$ выполняются оценки:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+4x}+1 &\le (\sqrt{5}+1)\max\{\,1,\sqrt{x}\,\} \\ \sqrt{1+4x}-1 &\ge (\sqrt{5}-1)\min\{\,1,x\,\}\ . \end{aligned}$$

Поэтому,

$$\hat{C}(\gamma_h,\Gamma) \le \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)^2\frac{\max\{1\,,\,\sqrt{\Gamma}\}}{\min\{1\,,\,\gamma_h\}}. \tag{2.95}$$

Используя неравенство Фридрихса, получаем

$$\|\mathbf{u}_h\|_V = \varepsilon\|\nabla\mathbf{u}_h\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}_h\|^2 + \xi\|\operatorname{div}\mathbf{u}_h\|^2 \le (\varepsilon+\alpha c_F^2+\xi)\|\nabla\mathbf{u}_h\|^2\ .$$

Из LBB-условия следует

$$\gamma_h \ge \frac{\hat{\beta}^2}{\varepsilon+\alpha c_F^2+\xi}\ . \tag{2.96}$$

Из (1.105) имеем оценку

$$\Gamma \le \frac{1}{\varepsilon+\xi}\ . \tag{2.97}$$

В силу результатов в (2.96) и (2.97) в (2.95) и выбора $\alpha \in \{0,1\}$ получаем оценки (2.93) и(2.94). □

2.4.3 Эффект ∇div стабилизации

Следствие 2.5. Заметим, что оценки для $\hat{C}(\gamma_h,\Gamma)$ в теореме 2.5 такого же вида, как для $C(\gamma,\Gamma)$ в теореме 1.9. Следовательно, следствие 1.3

также применимо: $\hat{C}_0(\varepsilon, 0)$ и $\hat{C}_1(\varepsilon, 0)$ неограниченно растут при $\varepsilon \downarrow 0$, в то время, как для $\xi_0 > 0$ множители $\hat{C}_0(\varepsilon, \xi_0)$ и $\hat{C}_1(\varepsilon, \xi_0)$ равномерно ограничены при $\varepsilon \downarrow 0$. В силу теоремы 2.4 это имеет непосредственное влияние на ошибку метода конечных элементов. В целях большей ясности рассмотрим конкретную конечно-элементную пару. Как пример выберем LBB-устойчивые конформные элементы P1isoP2/P0. Будем использовать стандартные аппроксимационные свойства (2.2), (2.3) и предположим достаточную регулярность решения задачи Стокса $\{\mathbf{u}, p\}$. Утверждение (2.92) и теорема 2.5 влекут следующие оценки для $\varepsilon \in (0, 1]$:

- Для $\alpha = 0$, $\xi = 0$:
$$\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\| + \|p - p_h\| \le C\varepsilon^{-\frac{1}{2}}h(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{u}\|_2 + \|p\|_1)\ . \qquad (2.98)$$
- Для $\alpha = 0$, $\xi = 1$:
$$\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\| + \|\mathrm{div}\,(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\| + \|p - p_h\| \le Ch(\|\mathbf{u}\|_2 + \|p\|_1)\ . \quad (2.99)$$
- Для $\alpha = 1$, $\xi = 0$:
$$\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\| + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| + \|p - p_h\| \le C\varepsilon^{-\frac{1}{2}}h(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{u}\|_2 + \|\mathbf{u}\|_1 + \|p\|_1)\ . \quad (2.100)$$
- Для $\alpha = 1$, $\xi = 1$:
$$\varepsilon^{\frac{1}{2}}\|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\| + \|\mathrm{div}\,(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\| + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| + \|p - p_h\| \le Ch(\|\mathbf{u}\|_2 + \|p\|_1)\ . \quad (2.101)$$

Заметим, что для малых ε оценки при наличии $\nabla\mathrm{div}$ -стабилизации ($\xi = 1$) значительно лучше, чем без неё ($\xi = 0$). Эти оценки указывают, что чем больше $\mathbb{H}^1$-норма давления по сравнению с $\mathbb{H}^2$-нормой скорости, тем более важным является наличие $\nabla\mathrm{div}$ члена. Также заметим, что при наличии $\nabla\mathrm{div}$ -стабилизации член $\|\mathrm{div}\,(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|$ входит в левую часть оценки ошибки, в то время, как при $\xi = 0$ не входит.

Замечание 2.3. Для получения оценки при $\alpha = 0$, $\xi = 0$ можно также использовать замену переменных $\tilde{p} = \varepsilon^{-1}p$ и тогда стандартная оценка для задачи Стокса повлечет (неулучшаемую) оценку для ошибки в методе конечных элементов (например, для P1isoP2/P0):
$$\|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\| + \varepsilon^{-1}\|p - p_h\| \le Ch(\|\mathbf{u}\|_2 + \varepsilon^{-1}\|p\|_1)\ . \qquad (2.102)$$
Для малых ε эта оценка лучше, чем (2.98), но хуже, чем оценка в (2.99) для метода с $\nabla\mathrm{div}$ -стабилизацией.

Замечание 2.4. Благодаря масштабированию $\tilde{\xi} = \frac{\xi}{\Delta t}$, $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\Delta t}$, $\tilde{u} = \Delta t\, u$ результаты при $\alpha = 1$ в (2.100) и (2.101) непосредственно влекут оценки для дискретизации нестационарной задачи Стокса. Пусть $\{\tilde{\mathbf{u}}_h, p_h\}$ – дискретное решение P1isoP2/P0 конечными элементами масштабированного обобщённого уравнения Стокса. Оценки в (2.100), (2.101) могут быть переписаны, как

$$\tilde{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}\|\nabla(\tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}_h)\| + \frac{1}{\sqrt{\Delta t}}\|\tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}_h\| + \sqrt{\Delta t}\|p - p_h\| \leq$$
$$\begin{cases} C\frac{h}{\sqrt{\tilde{\varepsilon}\,\Delta t}}(\tilde{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}\|\tilde{\mathbf{u}}\|_2 + \frac{1}{\sqrt{\Delta t}}\|\tilde{\mathbf{u}}\|_1 + \sqrt{\Delta t}\|p\|_1)\ , & \text{если} \ \ \xi = 0, \\ Ch(\frac{1}{\sqrt{\Delta t}}\|\tilde{\mathbf{u}}\|_2 + \sqrt{\Delta t}\|p\|_1) & \text{если} \ \ \xi = 1\ . \end{cases} \tag{2.103}$$

Численные результаты раздела 2.4.4 показывают, что оценки (2.100) и (2.101) достаточно точны, а следовательно, оценка (2.103) также точна. Эта оценка, однако, не является удовлетворительной для случая $\Delta t \ll 1$ в контексте нестационарных задач. Для получения более адекватных оценок в нестационарном случае должна применяться специальная техника, которая принимает в расчёт эволюционный характер задачи.

Замечание 2.5. Естественно, если мы добавляем член $\nabla\mathrm{div}$, то мы должны задаться конкретным значением параметра ξ. Численные эксперименты показывают, что результат не очень сильно зависит от этого выбора, хотя ξ не должно быть слишком большим. Указание на разумное значение может быть получено из следующих рассуждений. Предположим, что $\min_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h}\|\nabla(u - \mathbf{v}_h)\| \sim \min_{q_h \in \mathbb{Q}_h}\|p - q_h\|$ (в нашем примере пары P1isoP2/P0 это имеет место для $\|u\|_2 \sim \|p\|_1$), и предположим, что $\alpha = 0$, и ε достаточно мало (на самом деле, достаточно $\varepsilon \leq \hat{\beta}^2$). В этом случае баланс между слагаемыми в (2.92) достигается, если $\xi = O(1)$. Константа в $\hat{C}$ (2.92) также зависит от ξ. Выбор $\xi = \hat{\beta}^2$ минимизирует $\hat{C}$. Более того, при некоторых предположениях на область Ω и триангуляцию выполняется $\hat{\beta}^2 = O(1)$ (см. [179]). Поэтому при этих предположениях выбор $\xi \sim \hat{\beta}^2$ представляется разумным. Численные эксперименты со стандартными тестовыми задачами, движущаяся каверна и обращённая назад ступенька, которые можно найти в [175] успешно использовали значение $\xi \in [0.1, 0.2]$, в то время как для единичного квадрата и P1isoP2/P0 элементов выполнено $\hat{\beta} \approx 0.44$.

2.4.4 Численная иллюстрация.

Для численного примера рассмотрим уравнения Стокса (1.61) на $\Omega = (0,1)\times(0,1)$. Правая часть f выбирается так, что непрерывным решением служит

$$\begin{aligned} u_1(x,y) &= 4(2y-1)x(1-x), \\ u_2(x,y) &= -4(2x-1)y(1-y), \\ p(x,y) &= 3(x^3+y^3-0.5). \end{aligned}$$

Заметим, что непрерывное решение *не зависит* от параметров ε, α. Для построения дискретизации зададим равномерную триангуляцию с шагом h. Выберем $P_1 iso P_2 - P_0$ конечные элементы (см. § 2.4.1). Как уже отмечалось эта пара является LBB устойчивой, т.е. условие (2.88) выполнено.

Таблица 2.4: Зависимость от ε: $h = 1/32$, $\alpha = 0$

Параметр	Величина	Вязкость 1	Вязкость 10^{-2}	Вязкость 10^{-4}
ξ=0	$\\|\nabla(u-u_h)\\|$	5.0e-2	4.4e-0	4.0e+2
	$\\|u-u_h\\|$	4.1e-4	3.7e-2	3.7e-0
	$\\|p-p_h\\|$	3.5e-2	3.5e-3	3.5e-3
ξ=0.1	$\\|\nabla(u-u_h)\\|$	4.7e-2	3.8e-1	5.5e-1
	$\\|u-u_h\\|$	3.8e-4	3.4e-3	5.0e-3
	$\\|p-p_h\\|$	3.8e-2	3.8e-3	3.4e-3

В таблицах 2.4 и 2.5 показана ошибка для задачи с $\alpha = 0$ на сетках $h = \frac{1}{32}$ и $h = \frac{1}{64}$, соответственно. Для задачи без ∇div-стабилизации ($\xi = 0$) рост ошибки в скорости порядка $O(\varepsilon^{-1})$, как и следовало из теории, хорошо виден. Для задачи со стабилизацией ($\xi = 0.1$) зависимость существенно слабее (доказанной оценкой является $O(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$). Заметим, что ошибка в давлении не чувствительна к изменению коэффициента вязкости и стабилизации, что согласуется с (2.102) (для $\xi = 0$) и (2.99) (для $\xi > 0$). Сравнивая результаты в таблицах 2.4 и 2.5, отметим сходимость порядка $O(h)$ в градиенте скорости и в давлении и порядка $O(h^2)$ в скорости, как и предсказывалось теорией.

Таблица 2.5: Зависимость от ε: $h = 1/64$, $\alpha = 0$

Параметр	Величина	Вязкость 1	10^{-2}	10^{-4}
ξ=0	$\|\nabla(u-u_h)\|$	2.5e-2	2.0e-0	2.0e+2
	$\|u-u_h\|$	1.0e-4	9.5e-3	9.5e-1
	$\|p-p_h\|$	1.7e-2	1.2e-3	1.2e-3
ξ=0.1	$\|\nabla(u-u_h)\|$	2.4e-2	1.8e-1	2.5e-1
	$\|u-u_h\|$	9.8e-5	8.5e-4	5.0e-3
	$\|p-p_h\|$	1.9e-2	1.9e-3	1.7e-3

В таблице 2.6 показаны результаты для $\alpha = 1$. В этом случае, как и следовало из результатов в (2.100), (2.101), для малых значений ε включение члена ∇div позволяет существенно уменьшить ошибку *как в давлении, так и в скорости*.

Таблица 2.6: Зависимость от ε: $h = 1/64$, $\alpha = 1$

Параметр	Величина	Вязкость 1	10^{-2}	10^{-4}
ξ=0	$\|\nabla(u-u_h)\|$	2.5e-2	2.0e-0	1.7e+2
	$\|u-u_h\|$	1.0e-4	9.3e-3	7.6e-1
	$\|p-p_h\|$	1.7e-2	2.8e-3	1.6e-1
ξ=0.1	$\|\nabla(u-u_h)\|$	2.4e-2	1.9e-1	3.6e-1
	$\|u-u_h\|$	9.8e-5	8.4e-4	1.6e-3
	$\|p-p_h\|$	1.9e-2	1.9e-3	1.7e-3

2.5 Задача Стокса с интерфейсом.

В этом разделе рассматривается дискретизация вариационной задачи Стокса с интерфейсом, с помощью семейства конформных конечных элементов для скоростей и давления. Предположения на триангуляцию довольно общие.

Рассмотрим семейство триангуляций $\{\mathcal{T}_h\}$ в смысле [66, 67]. Важным предположением для нашего анализа является предположение о согласованности $\mathcal{T}_h$ с разбиением области на подобласти Ω_1, Ω_2, а именно предположим

$$\exists\ \mathcal{T}_h^{(i)} \subset \mathcal{T}_h \ :\quad \cup\{\, T \mid T \in \mathcal{T}_h^{(i)}\,\} = \overline{\Omega}_i, \quad i = 1, 2 \tag{2.104}$$

Это предположение выполнено, если Ω_1 и Ω_2 являются многоугольниками (многогранниками).

Замечание 2.6. В задачах вычислительной гидродинамики для двухфазных течений более реалистичным является предположение, что $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ гладкая . В этом случае предположение (2.104), вообще говоря, не выполнено. Однако в данных приложениях обычной практикой является приближение Γ дискретным интерфейсом Γ_h, который в свою очередь есть поверхность многогранника. При таком подходе предположение (2.104) всё ещё имеет смысл. На сколько известно автору пока не существует строго анализа погрешностей для уравнений (Навье)-Стокса возникающих при приближении гладкого Γ кусочно-гладким Γ_h. Теоретический анализ подобных погрешностей для уравнения Пуассона с интерфейсом можно найти в [65]. Оценки в [65], однако, не являются универсальными относительно скачка в коэффициенте диффузии.

Рассмотрим пару конечно-элементных пространств $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$ и $\mathbb{Q}_h \subset \mathbb{L}_0^2(\Omega) = \{\, p \in \mathbb{L}^2(\Omega) \mid (p,1) = 0\,\}$, являющуюся LBB-устойчивой с константой $\hat{\beta}$, т.е. выполняется условие (2.88)

Заметим, что в силу отличной факторизации в пространстве $\mathbb{M}$, а именно $(p,1)_M = 0$, вообще говоря, $\mathbb{Q}_h \not\subseteq \mathbb{M}$. Для сохранения согласованности конечно-элементной задачи и непрерывной определим

$$\mathbb{M}_h = \{\, p_h = \tilde{p}_h + \alpha 1 \mid\ \tilde{p}_h \in \mathbb{Q}_h, \quad \alpha \in \mathbb{R} \ \text{ т.ч. } \ (p_h, 1)_M = 0 \,\}.$$

Теперь $\mathbb{M}_h \subset \mathbb{M}$, а функции из $\mathbb{M}_h$ и $\mathbb{Q}_h$ отличаются на константу.

Для рассуждений в этом разделе удобно (хотя и не обязательно) определить билинейную форму $a :\ (\mathbf{H}_0^1 \times \mathbb{M}) \times (\mathbf{H}_0^1 \times \mathbb{M}) \to \mathbb{R}$

$$a(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) := (\nu\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) - (\operatorname{div}\mathbf{v}, p) + (\operatorname{div}\mathbf{u}, q). \tag{2.105}$$

Конечно-элементная задача состоит в нахождении $\{\mathbf{u}_h, p_h\} \in \mathbf{V}_h \times \mathbb{M}_h$ таких, что

$$a(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall\ \{\mathbf{v}_h, q_h\} \in \mathbf{V}_h \times \mathbb{M}_h\ . \tag{2.106}$$

Далее мы докажем непрерывность (теорема 2.7) и устойчивость в конечно-элементных пространствах (теорема 2.8) билинейной формы $a(\cdot,\cdot)$. Данные оценки будут универсальными относительно h и коэффициента вязкости ν. Как следствие мы получим универсальную и оптимальную оценку сходимости метода конечных элементов в "естественной" норме.

При доказательстве infsup-условия ниже мы будем использовать разложение похожее, но не совпадающее с разложением из раздела 1.5. Пусть $\bar{p}_h \in \mathbb{M}_h$ будет $\mathbb{M}$-ортогональной проекцией $\bar{p}$ на $\mathbb{M}_h$,

$$(\bar{p} - \bar{p}_h, q_h)_M = 0 \quad \forall\ q_h \in \mathbb{M}_h$$

и определим одномерное подпространство $\mathbb{M}_{0,h} := \mathrm{span}(\bar{p}_h)$ пространства $\mathbb{M}_h$. Рассмотрим $(\cdot,\cdot)_M$-ортогональное разложение $\mathbb{M}$ (а, следовательно, и $\mathbb{M}_h$): $\mathbb{M} = \mathbb{M}_{0,h} \oplus \mathbb{M}_{0,h}^{\perp}$,. Для функции $p \in \mathbb{M}$ будем использовать обозначения

$$p = p_{0,h} + p_{0,h}^{\perp}, \qquad p_{0,h} \in \mathbb{M}_{0,h},\ p_{0,h}^{\perp} \in \mathbb{M}_{0,h}^{\perp}. \tag{2.107}$$

Далее понадобится следующий простой результат.

Лемма 2.9. *Для любой $p_h = p_{0,h} + p_{0,h}^{\perp} \in \mathbb{M}_h$ справедливо*

$$(p_{0,h}^{\perp}, 1)_{\Omega_k} = 0 \quad \text{для} \ \ k = 1, 2$$

Доказательство. Заметим, что по определению $(p_{0,h}^{\perp}, \bar{p}_h)_M = 0$. Используя $(p_{0,h}^{\perp}, \bar{p}_h)_M = p_{0,h}^{\perp}, \bar{p})_M$, мы получаем

$$0 = \frac{1}{|\Omega_1|}(p_{0,h}^{\perp}, 1)_{\Omega_1} - \frac{1}{|\Omega_2|}(p_{0,h}^{\perp}, 1)_{\Omega_2} \tag{2.108}$$

Так как $p_{0,h}^{\perp} \in \mathbb{M}$, имеем $(p_{0,h}^{\perp}, 1)_M = 0$ и, следовательно,

$$(p_{0,h}^{\perp}, 1)_{\Omega_1} + \varepsilon^{-1}(p_{0,h}^{\perp}, 1)_{\Omega_2} = 0 \tag{2.109}$$

Соотношение (2.108) вместе с (2.109) доказывает лемму.
□

Далее нам понадобится константа

$$\mu_h := \frac{\|\bar{p} - \bar{p}_h\|_M}{\|\bar{p}\|_M}, \tag{2.110}$$

которая характеризует "качество", с которым можно приблизить $\bar{p}$ в пространстве конечно-элементных функций. Заметим, что $\mu_h = 0$, если $\mathbb{M}_h$

содержит кусочно-постоянные функции. В общем случае справедливо $\mu_h = \mathcal{O}(\tilde{h}^{\frac{1}{2}})$, где $\tilde{h}$ максимальный диаметр элементов триангуляции $\mathcal{T}_h$, имеющих непустое пересечение с интерфейсом Γ. Заметим, что $\mu_h \leq 1$ и $\mu_h \leq c\,\tilde{h}^{\frac{1}{2}}$ с некоторой константой c, не зависящей от ν.

2.5.1 Infsup-условие устойчивости

Infsup-условие устойчивости, соответствующее конечно-элементной задаче, будет доказано в теореме 2.6.

Для доказательства infsup-условия нам необходима следующая простая лемма.

Лемма 2.10. *Для любой* $p_{0,h} \in \mathbb{M}_{0,h}$ *существует* $p_0 \in \mathbb{M}_0$ *такая, что*

$$\|p_{0,h} - p_0\|_M = \mu_h \|p_0\|_M \tag{2.111}$$

$$\|p_{0,h}\|_M = \sqrt{1-\mu_h^2}\,\|p_0\|_M \tag{2.112}$$

Доказательство. По определению пространства $\mathbb{M}_{0,h}$ справедливо $p_{0,h} = \alpha\bar{p}_h$ с некоторой константой $\alpha \in \mathbb{R}$. Положим $p_0 = \alpha\bar{p}$. Так как $\bar{p}_h$ является $\mathbb{M}$-ортогональной проекцией $\bar{p}$ на $\mathbb{M}_{0,h}$, $p_{0,h}$ – $\mathbb{M}$-ортогональная проекция p_0 на $\mathbb{M}_{0,h}$. Такой выбор p_0 влечет (2.111) в силу определения μ_h. Соотношение в (2.112) следует из

$$\|p_0\|_M^2 = \|p_{0,h} - p_0\|_M^2 + \|p_{0,h}\|_M^2 = \mu_h^2\|p_0\|_M^2 + \|p_{0,h}\|_M^2$$

$\square$

Далее нам понадобятся дополнительные предположения на $\mathbf{V}_h$. Рассмотрим $\tilde{p} = \nu^{-1}\bar{p}$, где $\bar{p}$ была определена в (1.128). $\tilde{p}$ имеет нулевое среднее, т.е. $(\tilde{p}, 1) = 0$. Предположим, что пространство $\mathbf{V}_h$ такого, что существует константа $\hat{\beta}_c > 0$, не зависящая от h такая, что

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{(\operatorname{div} \mathbf{v}_h, \tilde{p})}{\|\nabla \mathbf{v}_h\|} \geq \hat{\beta}_c \|\tilde{p}\| \ . \tag{2.113}$$

Замечание 2.7. Предположение (2.113) является довольно слабым. Отметим два случая, когда оно заведомо выполнено. Так, пусть h_0 – параметр сетки, соответствующий самому грубому разбиению. Тогда (2.113) очевидно выполнено для $\mathbf{V}_{h_0}$ с некоторой константой $\hat{\beta}_c = \hat{\beta}_c(h_0)$. Если семейство конечно-элементных пространств $\{\mathbf{V}_h\}_{h \leq h_0}$ является *вложенным*, тогда (2.113) выполнено с константой $\hat{\beta}_c = \hat{\beta}_c(h_0)$ для всех

$\mathbf{V}_h$. Другой случай тривиального выполнения (2.113), если $\mathbb{M}_h$ содержит кусочно-постоянные функции. Тогда (2.113) сразу вытекает из (2.88).

Следующая теорема является основным результатом раздела.

Теорема 2.6. *Существуют положительные константы C_1 и C_2, не зависящие от ε и h такие, что для произвольной $p_h \in \mathbb{M}_h$ выполняются оценки*

$$\textit{если} \quad \mu_h \le C_1 \quad \textit{тогда} \tag{2.114}$$

$$\sup_{\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{(\operatorname{div} \mathbf{u}_h, p_h)}{\|\mathbf{u}_h\|_\nu} \ge C_2 \|p_h\|_M \quad \forall \;\; p_h \in \mathbb{M}_h \tag{2.115}$$

Доказательство. Доказательство теоремы 2.6 похоже на доказательство теоремы 1.10. Зафиксируем произвольную $p_h \in \mathbb{M}_h$ и разложим её, как в (2.107). Сначала рассмотрим компоненту $p_{0,h}^\perp$. Из леммы 2.9 следует, что $(p_{0,h}^\perp, 1)_{\Omega_k} = 0$ для $k = 1, 2$ мы можем использовать LBB условие (2.88) в каждой подобласти. Это снабдит нас некоторыми функциями $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{V}_h$: $\mathbf{u}_1 = 0$ в Ω_2 и $\mathbf{u}_2 \in \mathbf{V}_h$: $\mathbf{u}_2 = 0$ в Ω_1 такими, что выполнены следующие соотношения с положительными константами c_1, c_1, не зависящими от h, ε и p_h, :

$$\|p_{0,h}^\perp\|_{\Omega_1}^2 = (\operatorname{div} \mathbf{u}_1, p_{0,h}^\perp)_{\Omega_1} \quad \text{и} \quad c_1 \|\nabla \mathbf{u}_1\|_{\Omega_1} \le \|p_0^\perp\|_{\Omega_1}. \tag{2.116}$$

Аналогично, используя масштабирование, получаем

$$\|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} p_{0,h}^\perp\|_{\Omega_2}^2 = (\operatorname{div} \mathbf{u}_2, p_{0,h}^\perp)_{\Omega_2} \;\; \text{и} \;\; c_2 \|\varepsilon^{\frac{1}{2}} \nabla \mathbf{u}_2\|_{\Omega_2} \le \|\varepsilon^{-\frac{1}{2}} p_{0,h}^\perp\|_{\Omega_2} \tag{2.117}$$

с константой $c_2 > 0$. Суммируем (2.116) и (2.117). Имеем для $\tilde{\mathbf{u}}_h := \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$:

$$\|p_{0,h}^\perp\|_M^2 = (\operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}_h, p_{0,h}^\perp) \quad \text{и} \quad \hat{c}\, \|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_\nu \le \|p_{0,h}^\perp\|_M, \tag{2.118}$$

с $\hat{c} := \min\{ c_1, c_2 \}$. Теперь рассмотрим вторую компоненту $p_{0,h}$. Возьмём $p_0 \in \mathbb{M}_0$ такую же, как в лемме 2.10. Справедливо

$$\|p_{0,h} - p_0\|_M = \mu_h \|p_0\|_M, \quad \|p_{0,h}\|_M = \sqrt{1 - \mu_h^2}\, \|p_0\|_M \tag{2.119}$$

Для $\tilde{p}_0 := \nu^{-1} p_0$ выполнено $(\tilde{p}_0, 1) = (p_0, 1)_M = 0$. Из предположения (2.113) следует, что существует вектор-функция $\bar{\mathbf{u}}_h \in \mathbf{V}_h$ такая, что

$$\|\tilde{p}_0\|^2 = (\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h, \tilde{p}_0) \quad \text{и} \quad \hat{\beta}_c\, \|\nabla \bar{\mathbf{u}}_h\| \le \|\tilde{p}_0\|$$

С помощью тех же рассуждений, что были использованы при доказательстве теоремы 1.10, легко показать

$$\|p_0\|_M^2 = (\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h, p_0) \quad \text{и} \quad \|\bar{\mathbf{u}}_h\|_\nu \le c_3^{-1} \|p_0\|_M \tag{2.120}$$

с $c_3 = \hat{\beta}_c\, \tilde{c}(\Omega)^{\frac{1}{2}}$ и константой $\tilde{c}(\Omega)$ из (1.135). Заметим, что $(\operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}_h, p_0) = 0$. Используя это вместе с (2.118), (2.120), получаем для произвольной $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}(\alpha\tilde{\mathbf{u}}_h + \bar{\mathbf{u}}_h), p_h) &= \alpha\big(\operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}_h, p_0 + (p_{0,h} - p_0) + p_{0,h}^{\perp}\big) \\
&\quad + \big(\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h, p_0 + (p_{0,h} - p_0) + p_{0,h}^{\perp}\big) \\
&= \alpha\, \|p_{0,h}^{\perp}\|_M^2 + \alpha\, (\operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}_h, p_{0,h} - p_0) \\
&\quad + \|p_0\|_M^2 + \big(\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}}_h, (p_{0,h} - p_0) + p_{0,h}^{\perp}\big).
\end{aligned}$$

Мы предполагаем, что $\mu_h^2 \le \frac{1}{2}$. Из (2.119) следует

$$\|p_{0,h}\|_M^2 \le \|p_0\|_M^2 \le 2\, \|p_{0,h}\|_M^2$$

и замечая оценку $\|\nu^{\frac{1}{2}} \operatorname{div} \mathbf{v}_h\| \le \sqrt{d}\, \|\mathbf{v}_h\|_\nu$ для $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$, выводим

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}(\alpha\tilde{\mathbf{u}}_h + \bar{\mathbf{u}}_h), p_h) &\ge \alpha\, \|p_{0,h}^{\perp}\|_M^2 + \|p_{0,h}\|_M^2 - \alpha\sqrt{d} \|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_\nu \|p_{0,h} - p_0\|_M \\
&\quad - \sqrt{d} \|\bar{\mathbf{u}}_h\|_\nu \big(\|p_{0,h} - p_0\|_M + \|p_{0,h}^{\perp}\|_M\big) \\
&\ge \alpha\, \|p_{0,h}^{\perp}\|_M^2 + \|p_{0,h}\|_M^2 - \alpha\sqrt{2d}\, \hat{c}^{-1} \mu_h \|p_{0,h}^{\perp}\|_M \|p_{0,h}\|_M \\
&\quad - c_3^{-1}\sqrt{2d} \|p_{0,h}\|_M \big(\sqrt{2}\mu_h \|p_{0,h}\|_M + \|p_{0,h}^{\perp}\|_M\big) \\
&= \alpha\, \|p_{0,h}^{\perp}\|_M^2 + (1 - 2c_3^{-1}\sqrt{d}\, \mu_h) \|p_{0,h}\|_M^2 \\
&\quad - \sqrt{2d}\big(\alpha\hat{c}^{-1}\mu_h + c_3^{-1}\big) \|p_{0,h}\|_M \|p_{0,h}^{\perp}\|_M
\end{aligned}$$

Положим $\mu_h \le \frac{c_3}{4\sqrt{d}}$, тогда $1 - 2c_3^{-1}\sqrt{d}\mu_h \ge \frac{1}{2}$, и с помощью неравенства Коши получаем

$$(\operatorname{div}(\alpha\tilde{\mathbf{u}}_h + \bar{\mathbf{u}}_h), p_h) \ge \big(\alpha - 2d(\alpha\hat{c}^{-1}\mu_h + c_3^{-1})^2\big) \|p_{0,h}^{\perp}\|_M^2 + \frac{1}{4} \|p_{0,h}\|_M^2$$

Теперь рассмотрим соотношения

$$\mu_h \le \frac{1}{\alpha_0}, \quad \alpha_0 := \frac{1}{4} + 2d(\hat{c}^{-1} + c_3^{-1})^2$$

и вектор-функцию $\mathbf{u}_h := \alpha_0\tilde{\mathbf{u}}_h + \bar{\mathbf{u}}_h$. Имеем

$$(\operatorname{div}\mathbf{u}_h, p_h) \geq \frac{1}{4}\,\|p_h\|_M^2$$
$$\|\mathbf{u}_h\|_\nu^2 \leq 2(\alpha_0^2\|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_\nu^2 + \|\bar{\mathbf{u}}_h\|_\nu^2) \leq C\,\|p_h\|_M^2$$

с константой C, не зависящей от h и ν. Следовательно, полагая $C_1 = \min\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{c_3}{4\sqrt{d}}, \frac{1}{\alpha_0}\right\}$ доказываем утверждение теоремы. □

Заметим, что если h достаточно мало, но не зависит от ν, то условие $\mu_h \leq C_1$ в (2.114) выполнено.

2.5.2 Оценки для решения

С помощью стандартных рассуждений докажем непрерывность и infsup-устойчивость для билинейной формы $a(\cdot,\cdot)$ из (2.106). На произведении пространств рассмотрим норму

$$|||\mathbf{u}, p||| = \left(\|\mathbf{u}\|_\nu^2 + \|p\|_M^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \{\mathbf{u}, p\} \in \mathbf{H}_0^1 \times \mathbb{M}$$

Так как $(\nu\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|_\nu^2$ и используя лемму 1.15, мы непосредственно получаем следующее утверждение о непрерывности формы.

Теорема 2.7. *Существует константа C, не зависящая от ν такая, что*

$$a(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) \leq C|||\mathbf{u}, p|||\;|||\mathbf{v}, q|||$$

для произвольных $\{\mathbf{u}, p\}$, $\{\mathbf{v}, q\} \in \mathbf{H}_0^1 \times \mathbb{M}$.

Infsup-устойчивость для билинейной формы $a(\cdot,\cdot)$ и метода конечных элементов доказана в следующей теореме.

Теорема 2.8. *Предположим выполнение условия* (2.114). *Существует константа $c > 0$, не зависящая от ν и h такая, что*

$$\sup_{\{\mathbf{v}_h, q_h\}\in\mathbf{V}_h\times\mathbb{M}_h} \frac{a(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h)}{|||\mathbf{v}_h, q_h|||} \geq c\,|||\mathbf{u}_h, p_h||| \quad \forall\ \{\mathbf{u}_h, p_h\} \in \mathbf{V}_h \times \mathbb{M}_h$$

Доказательство. Возьмём произвольную пару $\{\mathbf{u}_h, p_h\} \in \mathbf{V}_h \times \mathbb{M}_h$. Теорема 2.6 влечёт существование некоторой $\mathbf{z}_h \in \mathbf{V}_h$ такой, что $\|\mathbf{z}_h\|_\nu =$

$\|p_h\|_M$ и $-(\operatorname{div}\mathbf{z}_h, p_h) \ge c\|p_h\|_M^2$ с $c > 0$. Положим $\mathbf{v}_h := \mathbf{u}_h + c\mathbf{z}_h, q_h := p_h$. Имеем

$$\begin{array}{rcl} a(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{u}_h, p_h) & = & \|\mathbf{u}_h\|_\nu^2, \\ a(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{z}_h, 0) & \ge & \dfrac{c}{2}\|p_h\|_M^2 - \dfrac{1}{2c}\|\mathbf{u}_h\|_{\mathbb{V}}^2. \end{array}$$

Умножаем второе неравенство на c и прибавляем его к первому. Это даёт нам

$$a(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{u}_h + c\mathbf{z}_h, p_h) \ge \frac{1}{2}\|\mathbf{u}_h\|_{\mathbb{V}}^2 + \frac{c^2}{2}\|p_h\|_M^2 \ge c_1\,|||\mathbf{u}_h, p_h|||^2\,, \tag{2.121}$$

где $c_1 = \frac{1}{2}\min\{\,1, c^2\,\}$. Легко получается оценка:

$$\begin{aligned} |||\mathbf{v}_h, p_h|||^2 &\le 2(\|\mathbf{u}_h\|_\nu^2 + c^2\|\mathbf{z}_h\|_\nu^2) + \|p_h\|_M^2 \\ &= 2\|\mathbf{u}_h\|_\nu^2 + (2c^2+1)\|p_h\|_M^2 \le 2(c^2+1)|||\mathbf{u}_h, p_h|||^2 \end{aligned} \tag{2.122}$$

Комбинирование оценок (2.121) и (2.122) завершает доказательство. □

В силу доказанных теорем для конечно-элементной задачи (2.106) получаем немедленное следствие о существовании единственного решения $\{\mathbf{u}_h, p_h\}$ и оценку

$$|||\mathbf{u}_h, p_h||| \le c^{-1}\|\mathbf{f}\|_{\mathbb{V}_h'}$$

с константой c из теоремы 2.8. Более того, если $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$, то неравенство Коши и неравенство типа Пуанкаре (1.138) влекут априорную оценку

$$|||\mathbf{u}_h, p_h||| \le c^{-1}\,C_P\|\nu^{-\frac{1}{2}}\mathbf{f}\|. \tag{2.123}$$

Напомним, что в замечании 1.12 обсуждалась зависимость оптимальной константы Пуанкаре от ν.

2.5.3 Сходимость

В этом параграфе доказывается оценка на разность решения методом конечных элементов и решения дифференциальной задачи Стокса с интерфейсом.

Теорема 2.9. *Пусть* $\{\mathbf{u}, p\}$ *– решение дифференциальной задачи* (1.125), *а* $\{\mathbf{u}_h, p_h\}$ *– решение методом конечных элементов* (2.106). *Предположим, что условие* (2.114) *выполнено. Тогда существует константа* C, *не зависящая от* h *и* ν *такая, что выполняется оценка*

$$|||\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h||| \le C \min_{\mathbf{v}_h \in \mathbb{V}_h} \min_{q_h \in \mathbb{M}_h} |||\mathbf{u} - \mathbf{v}_h, p - q_h|||.$$

Доказательство. Для произвольной $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$, $q_h \in \mathbb{M}_h$ определим $\mathbf{e} := \mathbf{u}-\mathbf{v}_h$, $\mathbf{e}_h = \mathbf{u}_h-\mathbf{v}_h$, $g := p-q_h$, $g_h := p_h-q_h$. Из свойства ортогональности Галёркина следует

$$a(\mathbf{e}_h, g_h; \mathbf{z}_h, r_h) = a(\mathbf{e}, g; \mathbf{z}_h, r_h) \quad \forall \ \{\mathbf{z}_h, r_h\} \in \mathbf{V}_h \times \mathbb{M}_h \ .$$

Используя это вместе с оценкой непрерывности и infsup-устойчивостью, получаем с некоторой $\{\mathbf{z}_h, r_h\} \in \mathbf{V}_h \times \mathbb{M}_h$:

$$\begin{aligned} |||\mathbf{e}_h, g_h||| &\le c^{-1}\frac{a(\mathbf{e}_h, g_h; \mathbf{z}_h, r_h)}{|||\mathbf{z}_h, r_h|||} = c^{-1}\frac{a(\mathbf{e}, g; \mathbf{z}_h, r_h)}{|||\mathbf{z}_h, r_h|||} \\ &\le c^{-1}C|||\mathbf{e}, g|||. \end{aligned}$$

Используем эту оценку в неравенстве треугольника $|||\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h||| \le |||\mathbf{e}_h, g_h||| + |||\mathbf{e}, g|||$. $\square$

С помощью теоремы 2.9 и аппроксимационных свойств конечных элементов можно получить оценки норм ошибки через нормы старших производных решения и далее через норму правой части. Однако для подобных рассуждений необходима информация о гладкости решений задачи Стокса с интерфейсом. На сколько на известно этот вопрос пока открыт.

2.6 Система Осеена.

Метод конечных элементов будем изучать для следующей *обобщенной задачи типа Осеена.* Как и ранее, предполагаем $0 < \nu \le 1$, $\alpha \ge 0$ и однородные краевые условия Дирихле

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(U) := -\nu\Delta\mathbf{u} + \alpha\mathbf{u} + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \mathbf{w}\times\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{в } \Omega, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= g \quad \text{в } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{на } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.124}$$

Случай $\mathbf{a} \equiv \mathbf{0}$ соответствует вихревой форме задачи Осеена, в то время как случай $\mathbf{w} \equiv \mathbf{0}$ – конвективной форме. Случай, когда оба члена с $\mathbf{a}$ и $\mathbf{w}$ ненулевые также имеет смысл. Так, например, может случится, если в уравнении Навье-Стокса играют роль силы Кориолиса.

Вариационная формулировка (2.124) имеет вид: для заданных $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$, $g \in \mathbb{L}_2^0$ найти $U := \{\mathbf{u}, p\} \in \mathbf{W} := \mathbf{V} \times \mathbb{L}_2^0$ такую, что

$$a(U, V) = f(V) \qquad \forall \ V := \{\mathbf{v}, q\} \in \mathbf{W}, \tag{2.125}$$

$$\begin{aligned} a(U,V) &:= \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + (\alpha \mathbf{u} + \mathbf{w} \times \mathbf{u} + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ &\quad -(p, \operatorname{div} \mathbf{v}) + (q, \operatorname{div} \mathbf{u}) \\ f(V) &:= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) + (g, q). \end{aligned}$$

Относительно триангуляции $\mathcal{T}_h := \{\tau\}$ области $\overline{\Omega}$ будем предполагать регулярность формы, т.е. выполнение $h_\tau/\rho_\tau \le c$ для всех элементов τ с константой $c \ne c(h)$. Здесь h_τ и ρ_τ – диаметры минимального шара описанного вокруг τ и, соответственно, максимального шара вписанного в τ. Предположим (для простоты), что триангуляция точна, т.е. $\overline{\Omega} = \cup_{\tau \in \mathcal{T}_h} \tau$.

Пространства $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$ и $\mathbb{Q}_h \subset \mathbb{L}_2^0$ предположим состоящими из кусочно-полиномиальных функций степеней $l \in \mathbf{N}$ и $k \in \mathbf{N}_0$. По-мимо обратного неравенства (2.1) нам понадобятся обратные неравенства

$$\|\Delta \mathbf{v}_h\|_\tau \le \mu_u h_\tau^{-1} \|\nabla \mathbf{v}_h\|_\tau, \qquad \|\nabla q_h\|_\tau \le \mu_p h_\tau^{-1} \|q_h\|_\tau. \tag{2.126}$$

Метод конечных элементов Галёркина для (2.125) имеет вид: найти $U_h = \{\mathbf{u}_h, p_h\} \in \mathbf{W}_h = \mathbf{V}_h \times \mathbb{Q}_h$ такую, что

$$a(U_h, V_h) = f(V_h) \qquad \forall\ V_h = \{\mathbf{v}_h, q_h\} \in \mathbf{W}_h \tag{2.127}$$

В данном разделе будем предполагать

$$\mathbf{a} \in \mathbf{L}_\infty(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad \operatorname{div} \mathbf{a} = 0; \qquad \mathbf{w} \in \mathbb{L}^\infty(\Omega)^{2d-3}.$$

Для линеаризации уравнений Навье-Стокса предположение на гладкость вектор-функцию $\mathbf{a}$ являются разумными, если она является *конечно-элементной* скоростью. Условие $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ необходимо только для обеспечения кососимметричности билинейной формы $(\mathbf{a}\cdot\nabla \mathbf{u}, \mathbf{v})$. Хотя это условие на $\mathbf{a}$ выполняется обычно в некотором слабом смысле и кососимметричность билинейной формы может быть потеряна, существует несколько стандартных способов восстановить кососимметричность на практике. Один из них – включить в слабую формулировку форму $\frac{1}{2}((\mathbf{a}\cdot\nabla \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathbf{a}\cdot\nabla \mathbf{v}, \mathbf{u}))$ вместо $(\mathbf{a}\cdot\nabla \mathbf{u}, \mathbf{v})$ (см, например, [146]). Мы будем иметь в виду эту возможность, которая не меняет дальнейшего анализа.

Для вихревых членов кососимметричность билинейной формы $(\mathbf{w} \times \mathbf{u}, \mathbf{v})$, а следовательно, и закон сохранения энергии для конечно-элементного решения, выполнен для любых $\mathbf{w}$ благодаря свойствам векторного произведения. Заметим, что если $\mathbf{w} = \operatorname{curl} \mathbf{u}_h$, где $\mathbf{u}_h$ – конечно-элементное поле скоростей, то $\mathbf{w}$ является ограниченной функцией и $\|\mathbf{w}\|_\infty \le c\, h^{-1} \|\mathbf{u}_h\|_\infty$ для фиксированного h.

В общем случае метод конечных элементов в форме (2.127) может терять устойчивость по двум причинам:

(i) Пара конечно-элементных пространств $\mathbf{V}_h \times \mathbb{Q}_h$ не является LBB-устойчивой. Для исправления может быть рассмотрена специальная стабилизация давления, см. § 2.6.3.

(ii) Сетка слишком груба, чтобы разрешать локальные особенности решения при доминирующих конвективных или вихревых членах, т.е. когда

$$\mathrm{Re}_\tau = \nu^{-1}\|\mathbf{a}\|_{\infty,\tau} h_\tau \gg 1 \quad \text{и/или} \quad \mathrm{Ek}_\tau^{-1} = \nu^{-1}\|\mathbf{w}\|_{\infty,\tau} h_\tau^2 \gg 1. \tag{2.128}$$

В этом случае необходимо добавление какой-то искусственной вязкости, см. следующий параграф. Для 3-х мерного случая определим $\|\mathbf{w}\|_{\infty,G} = \operatorname{ess\,sup}_G \sum_{i=1}^3 |w_i|$ так, что $\|\mathbf{w} \times \mathbf{u}\|_G \le \|\mathbf{w}\|_{\infty,G}\|\mathbf{u}\|_G$. Мы также введем безразмерную величину $\mathrm{D}_\tau = \nu^{-1}\alpha\, h_\tau^2$, измеряющую вклад реакции.

2.6.1 SUPG метод конечных элементов.

Далее мы рассмотрим следующую стабилизированную форму метода Галёркина (2.127): найти $U_h = \{\mathbf{u}_h, p_h\} \in \mathbf{W}_h$ такую, что

$$a_h(U_h, V_h) = f_h(V_h) \qquad \forall\, V_h = \{\mathbf{v}_h, q_h\} \in \mathbf{W}_h, \tag{2.129}$$

где

$$\begin{aligned} a_h(U,V) \;&:=\; a(U,V) + \sum_\tau (\xi_\tau \operatorname{div}\mathbf{u}, \operatorname{div}\mathbf{v})_\tau \\ &\quad + \sum_\tau (\mathcal{L}(U), \delta_\tau^{\mathbf{a}}(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \delta_\tau^{\mathbf{w}}\mathbf{w}\times\mathbf{v} + \delta_\tau^{p}\nabla q)_\tau, \end{aligned} \tag{2.130}$$

$$f_h(V) := f(V) + \sum_\tau \big((\xi_\tau g, \operatorname{div}\mathbf{v})_\tau + (\mathbf{f}, \delta_\tau^{\mathbf{a}}(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \delta_\tau^{\mathbf{w}}\mathbf{w}\times\mathbf{v} + \delta_\tau^{p}\nabla q)_\tau\big).$$

Метод Галёркина (2.127) является частным случаем (2.129), если положить $\xi_\tau = \delta_\tau^{\mathbf{a}} = \delta_\tau^{\mathbf{w}} = \delta_\tau^{p} = 0$.

Схема (2.129) построена (из соображений точности) согласованного типа, т.е. сумма стабилизирующих членов обращается в ноль для гладкого решения системы (2.124). Это влечет свойство обобщенной ортогональности Галёркина:

$$a_h(U - U_h, V_h) = 0 \qquad \forall\; V_h \in \mathbf{W}_h. \tag{2.131}$$

Далее мы анализируем сходимость этой схемы.

Замечание 2.8. Другим методом стабилизации похожим на (2.129) - (2.130) является, так называемый, метод подсеточного моделирования или GLS метод [70]. В этом методе берутся другие тестовые функции во втором стабилизационном члене в (2.130) и в $f_h(V)$, так последний член в (2.130) принимает вид $-\sum_\tau \delta_\tau(\mathcal{L}(U), \mathcal{L}^*(V))_\tau$, где $\mathcal{L}^*$ -сопряженный оператор. Этот метод был изучен для задачи Осеена с дополнительными силами Кориолиса. Более важное отличие настоящей работы в том, что мы рассматриваем линейные проблемы в контексте уравнений Навье-Стокса, при этом оба кососимметричных члена в (2.124) появляются в результате линеаризации нелинейности. Результаты для уравнений Осеена с дополнительными силами Кориолиса получаются как частный случай нашего анализа.

Замечание 2.9. К недостаткам метода (2.129), особенно в трехмерном случае, можно отнести большое процессорное время, необходимое для генерирования всех стабилизационных членов [150]. Более того, алгебраическая структура, возникающей системы алгебраических уравнений, может сильно усложняться, приводя к нехватке эффективных итерационных методов. В этом аспекте ситуация отличается, если вместо (2.129) используются менее точные аппроксимации разностями против потока, которые приводят к возникновению в алгебраической системе M-матриц и сохраняют структуру метода Галёркина. В связи с выше сказанным мы заинтересованы во включении в схемы как можно меньшего числа необходимых стабилизирующих членов. Поэтому введены различные параметры δ_τ^x, $x \in \{\mathbf{a}, \mathbf{w}, p\}$. Однако, в наших выкладках мы всегда будем считать $\delta_\tau^{\mathbf{a}}$ и $\delta_\tau^{\mathbf{w}}$ равными. Это предположение облегчит и без того весьма громоздкий анализ и не является серьезным ограничением, так как в интересующих нас системах типа Осеена, как правило, либо $\mathbf{a} = 0$, либо $\mathbf{w} = 0$.

2.6.2 Метод без стабилизации давления.

В данном разделе изучается схема (2.129) в случае LBB устойчивой пары скорость-давление. Эту схему, мы обозначим, как "Схема A", а предположения на параметры следующие.

Схема A: $\delta_\tau^p \equiv 0, \quad \delta_\tau := \delta_\tau^{\mathbf{a}} = \delta_\tau^{\mathbf{w}} \geq 0, \quad \xi_\tau \geq 0.$
Так как $\delta_\tau^p = 0$, то этот случай мы будем ещё называть "частичной стабилизацией".

Оценка устойчивости схемы

Начнем с получения inf-sup условия устойчивости для билинейной формы $a_h(\cdot,\cdot)$ на пространстве $\mathbf{W}_h = \mathbf{V}_h \times \mathbb{Q}_h$ относительно нормы $\|\cdot\|_a$:

$$\begin{aligned}
&\|V\|_a^2 = |[V]|_a^2 \quad + \quad \sigma_a \|q\|^2, \\
&|[V]|_a^2 = \nu\|\nabla \mathbf{v}\|^2 + \alpha\|\mathbf{v}\|^2 + \sum_\tau \left(\xi_\tau \|\operatorname{div}\mathbf{v}\|_\tau^2 + \delta_\tau \, \|(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \mathbf{w}\times\mathbf{v}\|_\tau^2\right)
\end{aligned} \tag{2.132}$$

параметр $\sigma_a > 0$ определен далее.

Лемма 2.11. *Предположим выполнение следующих условий для параметров стабилизации:*

$$0 \le \delta_\tau \;\le\; \frac{1}{3}\min\left\{\frac{\lambda_0\beta_0^2 h_\tau^2}{\mu_p^2 N_a^2}; \frac{h_\tau^2}{\mu_u^2\nu}; \frac{1}{\alpha}\right\}, \qquad 0 \le \xi_\tau \le \xi \le N_a^2 \tag{2.133}$$

с подходящим λ_0. Определим величины

$$\begin{aligned}
N_a &= \sqrt{\nu} + \sqrt{\alpha}C_F + (\|\mathbf{a}\|_\infty + C_F\|\mathbf{w}\|_\infty)\frac{C_F}{\sqrt{\nu + C_F^2\alpha}}, \\
M_a &= \sqrt{\delta_a}(\|\mathbf{a}\|_\infty + C_F\|\mathbf{w}\|_\infty), \quad \delta_a = \sup_\tau \delta_\tau.
\end{aligned} \tag{2.134}$$

Тогда существует положительные константы $\beta_a \ne \beta_a(h,\nu)$ и $\sigma_a = \frac{1}{27}\beta_0^2 N_a^{-2}$ такие, что

$$\inf_{U_h\in\mathbf{W}_h}\sup_{V_h\in\mathbf{W}_h}\frac{a_h(U_h,V_h)}{\|U_h\|_a\,\|V_h\|_a} \ge \beta_a \tag{2.135}$$

для достаточно малого $h = \sup_\tau h_\tau$: $h \le C_F\mu_u$.

Прежде, чем приступить к доказательству заметим, что первое условие на δ_τ в (2.133) является довольно обременительным, если $\alpha = 0$ и $\nu \ll 1$. Однако оно исчезает в случае, если давление приближается кусочно-постоянными элементами, так как тогда $\mu_p = 0$. Более того, для любых конечных элементов для давления, если $\alpha > 0$, то N_a остается ограниченным, и условие на δ_τ более не обременительно.

Доказательство. Возьмём произвольную $U_h \in \mathbf{W}_h$. Ниже построим $V_h \in \mathbf{W}_h$, удовлетворяющую (2.135).

(i) Будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A^2 &:= \nu\|\nabla \mathbf{u}_h\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}_h\|^2, \qquad\qquad B^2 := \|p_h\|^2, \\ Y^2 &:= \sum_\tau \delta_\tau \| -\nu\Delta \mathbf{u}_h + \alpha \mathbf{u}_h + \nabla p_h\|_\tau^2, \\ X^2 &:= \sum_\tau \delta_\tau \|(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{u}_h + \mathbf{w}\times\mathbf{u}_h\|_\tau^2, \qquad Z^2 := \sum_\tau \xi_\tau \|\operatorname{div}\mathbf{u}_h\|_\tau^2, \end{aligned}$$

поэтому $|[U_h]|_a^2 = A^2 + X^2 + Z^2$. На первом шаге положим $V_h = U_h$ в (2.130), тогда

$$a_h(U_h, U_h) \geq A^2 + X^2 + Z^2 - Y\ X.$$

Наибольшее беспокойство доставляет член YX. С помощью неравенства треугольника и обратного неравенства (2.126), используя (2.133), получаем

$$Y^2 \ \leq\ \nu\|\nabla \mathbf{u}_h\|^2 + \alpha\|\mathbf{u}_h\|^2 + \lambda\|p_h\|^2 \ =\ A^2 + \lambda B^2$$

где $\lambda := \lambda_0 \beta_0^2 N_a^{-2}$. Далее из неравенства Юнга

$$a_h(U_h, U_h) \geq \frac{1}{2}(A^2 + X^2 + Z^2) - \frac{\lambda}{2} B^2. \tag{2.136}$$

(ii) Воспользуемся следующей формой условия (2.88):

$$\exists\, \mathbf{z}_h \in \mathbf{V}_h : \ (\operatorname{div}\mathbf{z}_h, p_h) \geq \beta_0 \|p_h\| \|\nabla \mathbf{z}_h\| \tag{2.137}$$

с константой $\beta_0 \neq \beta_0(h)$. Мы всегда можем предположить $\|\nabla \mathbf{z}_h\| = \|p_h\|$. Рассмотри теперь выражение

$$a_h(U_h, (-\mathbf{z}_h, 0)) \ = \ (p_h, \operatorname{div}\mathbf{z}_h) - \sum_{i=1}^4 T_i \ \geq\ \beta_0 B^2 - \sum_{i=1}^4 T_i.$$

Стандартные оценки и интегрирование по частям конвективного слагаемого влекут

$$\begin{aligned} T_1 &:= \nu(\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{z}_h) + (\alpha \mathbf{u}_h + \mathbf{w}\times\mathbf{u}_h, \mathbf{z}_h) - (\mathbf{u}_h, (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{z}_h) \\ &\leq \Big(\sqrt{\nu} + \sqrt{\alpha} C_F + (\|\mathbf{a}\|_\infty + C_F\|\mathbf{w}\|_\infty)\frac{C_F}{\sqrt{\nu + C_F^2\alpha}}\Big) A\, \|\nabla \mathbf{z}_h\| \\ &= N_a A\, B. \end{aligned}$$

Аналогично, используя ξ, δ_a и M_a, задаваемые в (2.133) и (2.134), получаем

$$\begin{aligned}
T_2 &:= \sum_\tau \xi_\tau(\operatorname{div}\mathbf{u}_h, \operatorname{div}\mathbf{z}_h)_\tau \ \leq \sqrt{\xi}\ ZB \ \leq N_a\ ZB,\\
T_3 &:= \sum_\tau \delta_\tau(-\nu\Delta\mathbf{u}_h + \alpha\mathbf{u}_h + \nabla p_h, \mathbf{w}\times\mathbf{z}_h + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{z}_h)_\tau\\
&\leq\ Y\sqrt{\delta_a}(\|\mathbf{a}\|_\infty + \|\mathbf{w}\|_\infty C_F)B \ \leq\ \big(A+\sqrt{\lambda}B\big)M_aB,\\
T_4 &:= \sum_\tau \delta_\tau(\mathbf{w}\times\mathbf{u}_h + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{u}_h, \mathbf{w}\times\mathbf{z}_h + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{z}_h)_\tau\\
&\leq\ X\sqrt{\delta_a}(\|\mathbf{a}\|_\infty + \|\mathbf{w}\|_\infty C_F)B \ \leq\ M_a\ XB.
\end{aligned}$$

Из этих оценок и неравенства Юнга с $\kappa > 0$ выводим

$$\begin{aligned}
a_h(U_h, (-\mathbf{z}_h, 0)) \ &\geq\ \beta_0 B^2 - \Big(N_a(A+Z) + M_a(A+\sqrt{\lambda}B + X)\Big)\,B\\
\geq\ &\left(\beta_0 - M_a\sqrt{\lambda} - \frac{3\kappa}{2}\right)B^2 - \frac{1}{2\kappa}(N_a+M_a)^2\left(A^2+X^2+Z^2\right).
\end{aligned}$$

Используем условие (2.133) и получаем для $h \leq C_F\mu_u$ неравенство $2M_a \leq N_a$. Теперь из определения λ (с $\lambda_0 \leq \frac{1}{2}$) имеем $M_a\sqrt{\lambda} \leq \frac{1}{4}\beta_0$. Можем продолжить выкладки, как

$$a_h(U_h, (-\mathbf{z}_h, 0)) \ \geq\ \frac{\beta_0}{2}B^2 - \frac{27}{4\beta_0}N_a^2\left(A^2+X^2+Z^2\right). \tag{2.138}$$

(iii) Положим $V_h := U_h + \rho_a(-\mathbf{z}_h, 0)$ с некоторой $\rho_a > 0$, тогда из (2.136), (2.138) получаем

$$\begin{aligned}
a_h(U_h, V_h) \ &=\ a_h(U_h, U_h) + \rho_a a_h(U_h, (-\mathbf{z}_h, 0))\\
&\geq\ \left(\frac{1}{2} - \frac{27\rho_a N_a^2}{4\beta_0}\right)\left(A^2+X^2+Z^2\right) + \left(\frac{\beta_0\rho_a}{2} - \frac{\lambda}{2}\right)B^2.
\end{aligned}$$

Положим константы равными

$$\rho_a \ =\ \frac{1}{27}\beta_0 N_a^{-2}, \qquad \sigma_a = \beta_0\rho_a \ =\ \frac{1}{27}\beta_0^2 N_a^{-2}.$$

Теперь выбирая $\lambda_0 = \frac{1}{54}$, имеем $\lambda = \frac{1}{2}\beta_0\rho_a$. Поэтому

$$a_h(U_h, V_h) \ \geq\ \frac{1}{4}\left(A^2+X^2+Z^2+\sigma_a B^2\right) \ \equiv\ \frac{1}{4}\|U_h\|_a^2. \tag{2.139}$$

(iv) Для таких h, что $2M_a \le N_a$, выполняется оценка

$$
\begin{aligned}
\|(-\mathbf{z}_h,0)\|_a^2 &= \nu\|\nabla\mathbf{z}_h\|^2+\alpha\|\mathbf{z}_h\|^2 \\
&\quad +\sum_\tau\left[\delta_\tau\|(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{z}_h+\mathbf{w}\times\mathbf{z}_h\|_\tau^2+\xi_\tau\|\operatorname{div}\mathbf{z}_h\|_\tau^2\right] \\
&\le \left(\nu+\alpha C_F^2+2\delta_a(\|\mathbf{a}\|_\infty^2+C_F^2\|\mathbf{w}\|_\infty^2)+\xi_\tau\right)\|\nabla\mathbf{z}_h\|^2 \\
&\le 3N_a^2B^2.
\end{aligned}
$$

По определению ρ_a и σ_a имеем $\rho_a^2N_a^2 \le \frac{1}{27}\sigma_a$, следовательно,

$$
\begin{aligned}
\|V_h\|_a^2 &\le 2\|U_h\|_a^2+2\rho_a^2\|(-\mathbf{z}_h,0)\|_a^2 \\
&\le 2\left(|[U_h]|_a^2+(\sigma_a+\rho_a^2N^2)\|p_h\|^2\right)\le\frac{20}{9}\|U_h\|_a^2.
\end{aligned}
$$

Последняя оценка вместе с (2.139) влечет (2.135) с $\beta_a=\frac{3}{8\sqrt{5}}$. □

Сходимость и выбор параметров

Пусть $U=\{\mathbf{u},p\}\in\mathbf{W}$ и $U_h=\{\mathbf{u}_h,p_h\}\in\mathbf{W}_h$ – решения непрерывной и дискретной задач, соответственно. Далее через $\hat U=\{\hat{\mathbf{u}}_h,\hat p_h\}\in\mathbf{W}_h$ будем обозначать подходящий для U. Рассмотрим ошибку $E_h=\{\mathbf{e}_\mathbf{u},e_p\}=\{\mathbf{u}-\mathbf{u}_h,p-p_h\}$ и положим

$$
\{\eta_\mathbf{u},\eta_p\}:=\{\mathbf{u}-\hat{\mathbf{u}}_h,p-\hat p_h\},\qquad \{\chi_\mathbf{u},\chi_p\}:=\{\hat{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h,\hat p_h-p_h\}.
$$

Свойство ортогональности Галеркина (2.131) и Лемма 2.11 влекут существование некоторой $V_h=\{\mathbf{v}_h,q_h\}\in\mathbf{W}_h$ такой, что

$$
\beta_a\|\chi_\mathbf{u},\chi_p\|_a\|V_h\|_a\le a_h(\{\chi_\mathbf{u},\chi_p\},V_h)=-a_h(\{\eta_\mathbf{u},\eta_p\},V_h). \tag{2.140}
$$

Лемма 2.12. *Для произвольной $U=\{\mathbf{u},p\}\in\mathbf{W}$ такой, что $\mathcal{L}U|_\tau\in\mathbb{L}_2(\tau)$ $\forall\tau\in\mathcal{T}_h$ и произвольной $V_h\in\mathbf{W}_h$ справедливо*

$$
\begin{aligned}
&a_h(U,V_h)\\
&\le C\,\|V_h\|_a\Bigg\{|[U]|_a+\Big(\textstyle\sum_\tau(\sigma_a^{-1}\|\nabla\mathbf{u}\|_\tau^2+(\|\mathbf{a}\|_\infty^2+C_F^2\|\mathbf{w}\|_\infty^2)\nu^{-1}\|\mathbf{u}\|_\tau^2)\Big)^{\frac12}\\
&+\Big(\textstyle\sum_\tau 2(\nu+\xi_\tau)^{-1}\|p\|_\tau^2\Big)^{\frac12}+\Big(\textstyle\sum_\tau\delta_\tau\|-\nu\Delta\mathbf{u}+\alpha\mathbf{u}+\nabla p\|_\tau^2\Big)^{\frac12}\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{2.141}
$$

Доказательство. Симметричные слагаемые в билинейной форме a_h ограничены сверху произведением $|[U]|_a|[V_h]|_a$. Интегрирование по частям кососимметричных дает

$$
\begin{aligned}
|(\mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{u}+\mathbf{w}\times\mathbf{u},\mathbf{v}_h)| &\le \frac{\|\mathbf{a}\|_\infty + C_F\|\mathbf{w}\|_\infty}{\sqrt{\nu}}\|\mathbf{u}\|\sqrt{\nu}\|\nabla\mathbf{v}_h\|, \quad (2.142)\\
(\operatorname{div}\mathbf{u},q_h) &\le \frac{1}{\sqrt{\sigma_a}}\|\nabla\mathbf{u}\|\sqrt{\sigma_a}\|q_h\|. \quad (2.143)
\end{aligned}
$$

Далее, получаем

$$
-(p,\operatorname{div}\mathbf{v}_h) \le \Big(\sum_\tau 2(\nu+\xi_\tau)^{-1}\|p\|_\tau^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\nu\|\nabla\mathbf{v}_h\|^2+\sum_\tau\xi_\tau\|\operatorname{div}\mathbf{v}_h\|_\tau^2\Big)^{\frac{1}{2}}.
$$

Наконец, рассмотрим оставшиеся стабилизационные члены.

$$
\begin{aligned}
&\sum_\tau \delta_\tau(-\nu\Delta\mathbf{u}+\alpha\mathbf{u}+\nabla p,(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{v}_h+\mathbf{w}\times\mathbf{v}_h)_\tau\\
\le\ &\Big(\sum_\tau\delta_\tau\|-\nu\Delta\mathbf{u}+\alpha\mathbf{u}+\nabla p\|_\tau^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_\tau\delta_\tau\|(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{v}_h+\mathbf{w}\times\mathbf{v}_h)\|_\tau^2\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Мы получаем утверждение (2.141) вспоминая определение норм $\|\cdot\|_a$ и $|[\cdot]|_a$.
□

Теперь берем (2.140) вместе с (2.141) и $U=\{\eta_\mathbf{u},\eta_p\}$. После сокращения на $\|V_h\|_a$ имеем оценку

$$
\|\chi_\mathbf{u},\chi_p\|_a \le C\beta_a^{-1}\|\eta_\mathbf{u},\eta_p\|_a
$$

Используем неравенство треугольника:

$$
\|E_h\|_a \le \|\chi_\mathbf{u},\chi_p\|_a + \|\eta_\mathbf{u},\eta_p\|_a
$$

и локальные интерполяционные свойства и, обозначая $\mathbf{a}_\tau = \|\mathbf{a}\|_{\infty,\tau}$, $\mathbf{w}_\tau =$

$\|\mathbf{w}\|_{\infty,\tau}$, получаем

$$\begin{aligned}
\|E_h\|_a^2 \ \leq\ & C\sum_\tau \Big\{\big(\delta_\tau + \sigma_a h_\tau^2 + h_\tau^2(\nu+\xi_\tau)^{-1}\big)\, h_\tau^{2k}|p|^2_{H^{k+1}(\tau)} \\
& + \big(\nu + \sigma_a^{-1} + \big(\alpha C_F^2 + (\|\mathbf{a}\|^2_\infty + C_F^2\|\mathbf{w}\|^2_\infty)\nu^{-1}\big)\, h_\tau^2 \\
& \quad + \xi_\tau + \delta_\tau(\mathbf{a}_\tau^2 + \mathbf{w}_\tau^2 h_\tau^2)\big)\, h_\tau^{2l}|\mathbf{u}|^2_{H^{l+1}(\tau)}\Big\} \\
\leq\ & C\sum_\tau \big(\delta_\tau + h_\tau^2 N_a^{-2} + h_\tau^2(\nu+\xi_\tau)^{-1}\big)\, h_\tau^{2k}|p|^2_{H^{k+1}(\tau)} \\
& + C\sum_\tau \big(\nu + N_a^2 + \xi_\tau + \delta_\tau(\mathbf{a}_\tau^2 + \mathbf{w}_\tau^2)\big)\, h_\tau^{2l}|\mathbf{u}|^2_{H^{l+1}(\tau)}.
\end{aligned}$$

Вторая оценка справедлива в силу ограничений (2.133) и $\sigma_a \sim N_a^{-2}$.

Заметим, что для LBB-устойчивых конечных элементов скорость-давление обычно справедливо $k \leq l-1$. Разумный выбор параметров стабилизации, тогда

$$0 \ \leq\ \delta_\tau \leq \frac{\beta_0^2 h_\tau^2}{54\mu_p^2 N_a^2}; \qquad \xi_\tau \sim N_a^2 \ (\ \geq\ \nu), \tag{2.144}$$

где N_a задано в (2.134). Таким образом доказываем теорему 2.10.

Теорема 2.10. *Предположим выполнение условия LBB-устойчивости (2.88). Для метода конечных элементов (2.129) и следующего выбора параметров:* $\delta_\tau^p \equiv 0$ *and* $\delta_\tau = \delta_\tau^{\mathbf{a}} = \delta_\tau^{\mathbf{w}}$, *удовлетворяющего условиям (2.144), имеет место оценка сходимости*

$$\|E_h\|_a^2 \leq C\sum_\tau \left(h_\tau^{2(k+1)} N_a^{-2}\|p\|^2_{H^{k+1}(\tau)} + N_a^2 h_\tau^{2l}|\mathbf{u}|^2_{H^{l+1}(\tau)}\right). \tag{2.145}$$

Замечание 2.10. Параметры δ_τ входят в определение нормы в левой части (2.145) и, будучи положительными, позволяют получить дополнительный контроль над ошибкой

Замечание 2.11. Предположим, что $l = k+1 \geq 1$. Тогда оценка (2.145) полезна, если $N_a^2 = \mathcal{O}(1)$. Это выполняется, при масштабирование $\|\mathbf{a}\|_\infty + C_F\|\mathbf{w}\|_\infty \leq 1$, если $\alpha = \mathcal{O}(1)$. Это условие не обременительно, если рассматривается нестационарная задача, и производятся шаги по времени $\delta t = \alpha^{-1} > 0$. Ограничение становится обременительным, если $\alpha = 0$.

При $\alpha \gg 1$ второе слагаемое в правой части оценки (2.145) может быть большим, но ошибка в скорости по-прежнему контролируется, так как в норму $\|\cdot\|_a$ входит член, зависящий от α (см. (2.132)). В тоже время, (2.145) не дает удовлетворительной оценки для ошибки в давлении, если $\alpha \gg 1$.

Замечание 2.12. Как и в случае задачи Стокса, стабилизирующий член $\xi_\tau(\operatorname{div}\cdot,\operatorname{div}\cdot)_\tau$ с достаточно большим ξ_τ остается необходим.

Замечание 2.13. Константа в оценке (2.145) не зависит от δ_τ при выполнении условий (2.144). Численные эксперименты из [70] показывают, что стабилизация может быть необходима даже при $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, если сеточное число Ek_τ велико.

Оценка (2.145) может быть улучшена при $\nu \ll 1$, если $\mathbb{Q}_h$ состоит из кусочно-постоянных функций ($k = 0$). Это популярный выбор для LBB-устойчивых аппроксимаций. Как уже отмечалось на странице 147, условие (2.133) существенно менее обременительно теперь. Поэтому заменяем (2.142) на

$$|(\mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{u} + \mathbf{w}\times\mathbf{u}, \mathbf{v}_h)| \le \Big(\sum_\tau \delta_\tau \|\mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{v}_h + \mathbf{w}\times\mathbf{v}_h\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_\tau \delta_\tau^{-1}\|\mathbf{u}\|_\tau^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Уравнивая слагаемые в правой части оценки для ошибки, придем к “стандартному” выбору $\delta_\tau \sim h_\tau^2[\nu(1 + \mathrm{Re}_\tau + \mathrm{Ek}_\tau^{-1} + \mathrm{D}_\tau)]^{-1}$. Хотя зависимость правой части от N_a остается такая же (в силу множителя σ_a^{-1} в (2.141)), мы получаем лучший контроль над конвективным членом в норме $\|E_h\|_a$.

Возможно улучшить оценку так, что множитель σ_a^{-1} исчезнет из правой части (2.141). Однако, придется пожертвовать локальным характером анализа. Это можно сделать следующим образом: в доказательстве леммы 2.12 не используем оценку (2.143), а переносим $|(\operatorname{div}\mathbf{u}, q_h)|$ в правую часть (2.141), при этом слагаемое $\sigma_a^{-1}\|\nabla\mathbf{u}\|_\tau^2$ в (2.141) не появляется. Более того, в качестве интерполянта $\{\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{p}_h\}$ рассмотрим решение следующей дискретной задачи Стокса:

$$(\nabla(\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}), \nabla\mathbf{v}_h) - (\hat{p}_h - p, \operatorname{div}\mathbf{v}_h) + (\operatorname{div}(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}), q_h) = 0, \quad \forall\, \{\mathbf{v}_h, q_h\} \in \mathbf{W}_h.$$

Для областей с достаточно регулярной границей (см. [84], [73]) имеем оценку с $h = \sup_\tau h_\tau$:

$$h^{-1}\|\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}\| + \|\nabla(\hat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u})\| + \|\hat{p}_h - p\| \le c\,h\,(\|\mathbf{u}\|_{H^2} + \|p\|_{H^1}). \quad (2.146)$$

Это свойство интерполяции и равенство $(\operatorname{div}\eta_{\mathbf{u}},\chi_p)=0$ приводит к следующему результату.

Теорема 2.11. *Предположим, что* $\mathbb{Q}_h$ *состоит из кусочно-постоянных функций и* $\delta_\tau\sim\delta_a=h^2[\nu(1+\mathrm{Re}_h+\mathrm{Ek}_h^{-1}+\mathrm{D}_h)]^{-1}$, *где* $\mathrm{Re}_h=\frac{\|\mathbf{a}\|_\infty h}{\nu}$, $\mathrm{Ek}_h^{-1}=\frac{\|\mathbf{w}\|_\infty h^2}{\nu}$, $\mathrm{D}_h=\frac{\alpha h^2}{\nu}$ *и* $\xi_\tau\sim\xi=\mathcal{O}(1),\sigma_\tau\sim\sigma\le\beta_0N_a^{-2}$. *Предположим, что выполняется* (2.146) *и выполняется LBB-условие. Тогда для ошибки метода* (2.129) *справедлива оценка:*

$$\|E_h\|_a^2\le C\{1+\nu(1+\mathrm{Re}_h+\mathrm{Ek}_h^{-1}+\mathrm{D}_h)+\sigma\}h^2(\|\mathbf{u}\|_2^2+|p|_1^2).$$

Замечание 2.14. В [108] можно найти результат сходимости для *неконформных* конечных элементов аналогичный теореме 2.11 для случая $\mathbf{w}=\mathbf{0},\ \alpha=0$.

Анализ с модифицированным LBB условием

Оценки для частично стабилизированной схемы, доказанные в предыдущем параграфе являются удовлетворительными, если параметр α принимает умеренные положительные значения, либо давление аппроксимируется кусочно-постоянными элементами. В противном случае константы в оценке для ошибки растут с увеличением сеточных чисел Re_h и Ek_h^{-1}. Эти результаты можно улучшить и перенести на случай более общих аппроксимаций давления, модифицируя технику анализа. Однако, это приведет к выбору отличных параметров стабилизации и довольно жестким ограничениям на сетку. В этом параграфе мы будем рассматривать только случай $\mathbf{w}=0$. Оценки будут получены в норме $|||\cdot|||_a$, задаваемой соотношением

$$\begin{aligned}|||V|||_a^2 &= |[V]|_a^2 + \sigma_a\sum_\tau\|\nabla q\|_\tau^2,\\ |[V]|_a^2 &= \nu\|\nabla\mathbf{v}\|^2+\alpha\|\mathbf{v}\|^2+\sum_\tau\left(\xi_\tau\|\operatorname{div}\mathbf{v}\|_\tau^2+\delta_\tau\,\|(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{v}\|_\tau^2\right).\end{aligned}$$

Как уже отмечалось в предыдущем параграфе, если аппроксимация давления не кусочно-постоянная, то трудности доставляет следующее слагаемое из (2.129): $\sum_\tau\delta_\tau(\nabla p_h,(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{v}_h)_\tau$. Чтобы побороть эту трудность для аппроксимаций давления более высоких порядков, мы обнаружили весьма полезным некоторое модифицированное LBB условий. К сожалению, нам удалось доказать его только при следующим условии на триангуляцию:

$$(\sup_\tau h_\tau)\,(\inf_\tau h_\tau)^{-1} \le c. \tag{2.147}$$

Это условие не допускает локального сгущения сеток.

Лемма 2.13. *Предположим, что в области Ω справедлива $\mathbb{H}^2$-оценка для решения задачи Стокса (см. [73]). Рассмотрим LBB-устойчивую конечно-элементную аппроксимацию, причем $\mathbb{Q}_h \subset \mathbb{H}^1(\Omega)$. Тогда выполняется следующее inf-sup условие:*

$$\inf_{p_h\in\mathbb{Q}_h}\sup_{\mathbf{u}_h\in\mathbf{V}_h}\frac{(\operatorname{div}\mathbf{u}_h, p_h)}{\|\nabla p_h\|\|\mathbf{u}_h\|} \ge \beta_1 > 0, \tag{2.148}$$

где β_1 не зависит от h.

Доказательство. Обозначим через $S_h(\varepsilon) : \mathbb{Q}_h \to \mathbb{Q}_h$ оператор, задаваемый соотношением $S_h(\varepsilon) = B\,A(\varepsilon)^{-1}B^*$, где операторы $A(\varepsilon) : \mathbf{V}_h \to \mathbf{V}_h$ и $B : \mathbf{V}_h \to \mathbb{Q}_h$ определяются из равенств:

$$\begin{aligned}(A(\varepsilon)\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \varepsilon(\nabla\mathbf{u}_h, \nabla\mathbf{v}_h) + (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \quad \forall\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h,\\ (B\mathbf{u}_h, q_h) &= (\operatorname{div}\mathbf{u}_h, q_h) \qquad\qquad\qquad \forall\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h,\ q_h \in \mathbb{Q}_h.\end{aligned}$$

Пусть Δ_h^{-1} – оператор, разрешающий конечно-элементную задачу Пуассона с краевыми условиями Неймана: для произвольной $q_h \in \mathbb{Q}_h$

$$r_h = \Delta_h^{-1} q_h \quad \Longleftrightarrow \quad -(\nabla r_h, \nabla\xi) = (q_h, \xi) \quad \forall\xi \in \mathbb{Q}_h. \tag{2.149}$$

Следствие 4.1 из [50] дает оценку

$$c_0((h^2 I - \Delta_h^{-1})^{-1} p_h, p_h) \le (S_h(h^2) p_h, p_h) \quad \forall p_h \in \mathbb{Q}_h. \tag{2.150}$$

где c_0 – положительная константа, не зависящая от h, I – единичный оператор. Непосредственно проверяем для произвольной $p_h \in \mathbb{Q}_h$

$$\begin{aligned}(S_h(h^2)p_h, p_h) &= \sup_{\mathbf{u}_h\in\mathbf{V}_h}\frac{(p_h, B\mathbf{u}_h)^2}{(A(h^2)\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h)} = \sup_{\mathbf{u}_h\in\mathbf{V}_h}\frac{(\operatorname{div}\mathbf{u}_h, p_h)^2}{h^2\|\nabla\mathbf{u}_h\|^2 + \|\mathbf{u}_h\|^2}\\ &\le \sup_{\mathbf{u}_h\in\mathbf{V}_h}\frac{(\operatorname{div}\mathbf{u}_h, p_h)^2}{\|\mathbf{u}_h\|^2}.\end{aligned} \tag{2.151}$$

С другой стороны (2.148) эквивалентно неравенству

$$\beta_1\|\nabla p_h\| \le \sup_{\mathbf{u}_h\in\mathbf{V}_h} \frac{(\operatorname{div}\mathbf{u}_h, p_h)}{\|\mathbf{u}_h\|} \quad \forall p_h \in \mathbb{Q}_h.$$

Поэтому, благодаря (2.150) и (2.151) достаточно доказать, что

$$c_1\|\nabla p_h\|^2 \le ((h^2 I - \Delta_h^{-1})^{-1} p_h, p_h) \quad \forall p_h \in \mathbb{Q}_h \tag{2.152}$$

с некоторой $c_1 > 0$, не зависящей от h. Для доказательства (2.152) зафиксируем произвольную $p_h \in \mathbb{Q}_h$ и рассмотрим $q_h = (h^2 I - \Delta_h^{-1})^{-1} p_h$. Тогда по определению имеем

$$h^2 q_h - \Delta_h^{-1} q_h = p_h. \tag{2.153}$$

Положим $r_h = \Delta_h^{-1} q_h$,что влечет $r_h = h^2 q_h - p_h$. Подставляя это выражение в (2.149) и выбирая $\xi = p_h$, получаем

$$-h^2(\nabla q_h, \nabla p_h) + \|\nabla p_h\|^2 = (q_h, p_h).$$

Это дает нам

$$(q_h, p_h) \ge \frac{1}{2}\|\nabla p_h\|^2 - \frac{1}{2}h^4\|\nabla q_h\|^2. \tag{2.154}$$

Теперь умножим скалярно (2.153) на q_h и получим

$$(p_h, q_h) = h^2\|q_h\|^2 + \|q_h\|_{-1}^2 \ge h^2\|q_h\|^2.$$

В силу обратного неравенства (3.100) имеем

$$(p_h, q_h) \ge \mu_p^{-1} h^4 \|\nabla q_h\|^2. \tag{2.155}$$

Комбинируем (2.154) с (2.155) и выводим

$$(p_h, q_h) \ge (2 + \mu_p)^{-1}\|\nabla p_h\|^2.$$

Последняя оценка влечет (2.152) с $c_1 = (2 + \mu_p)^{-1}$.
□

Замечание 2.15. Лемма 2.13 может быть применена, к примеру, для семейства пар "скорость-давления"Тейлора-Худа P_{k+1}/P_k, $k \ge 1$. Для частного случая $k = 1$ условие (2.148) находим в [40].

Оценка устойчивости доказана в следующей лемме. Положим $\sigma_a = \sigma_0 h^2$.

Лемма 2.14. *Предположим, что уравнения* (2.124) *масштабированы так, что* $\|\mathbf{a}\|_\infty \sim 1$. *Пусть выполняются следующие условия на параметры стабилизации*

$$\delta_\tau \mathbf{a}_\tau^2 \le \xi_\tau \le \xi; \qquad 0 \le \delta_\tau = \delta_0 h_\tau^2 \le \min\left\{\frac{\nu + \alpha h_\tau^2 \mu_u^{-2}}{8\mathbf{a}_\tau^2}; \frac{h_\tau^2}{3\mu_u^2 \nu}; \frac{1}{3\alpha}\right\} \quad (2.156)$$

с $\xi = O(1)$, $\mathbf{a}_\tau := \|\mathbf{a}\|_{\infty,\tau}$. *Тогда существуют положительные константы* $\beta_a \ne \beta_a(h,\nu)$ *и* σ_0, *с которыми выполняется оценка*

$$\inf_{U_h \in \mathbf{W}_h} \sup_{V_h \in \mathbf{W}_h} \frac{a_h(U_h, V_h)}{|||U_h|||_a \; |||V_h|||_a} \ge \beta_a. \quad (2.157)$$

Доказательство. Доказательство похоже на доказательство леммы 2.11. Остановимся на различиях. Используем следующие изменённые обозначения:

$$\tilde{X}^2 \;:=\; \sum_\tau \delta_\tau \|(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{u}_h\|_\tau^2, \qquad \tilde{Y}^2 \;:=\; \sum_\tau \delta_\tau \|-\nu\Delta\mathbf{u}_h + \alpha\mathbf{u}_h + \nabla p_h\|_\tau^2,$$

и $\tilde{B}^2 \;:=\; \|\nabla p_h\|^2$. Следовательно, $|[U_h]|_a^2 = A^2 + \tilde{X}^2 + Z^2$. Обозначим $\delta = \max_\tau \delta_\tau$.

Сначала положим $V_h = U_h$ в (2.129), что влечет $a_h(U_h, U_h) \ge |[U_h]|_a^2 - \tilde{X}\tilde{Y}$. Используя неравенство треугольника, обратные неравенства (2.126) и (2.156), выводим

$$\tilde{Y}^2 \;\le\; 3\sum_\tau \delta_\tau \left(\|\nu\Delta\mathbf{u}_h\|_\tau^2 + \|\alpha\mathbf{u}_h\|_\tau^2 + \|\nabla p_h\|_\tau^2\right) \;\le\; A^2 + 3\delta\tilde{B}^2. \quad (2.158)$$

Следовательно,

$$a_h(U_h, U_h) \ge \frac{1}{2}|[U_h]|_a^2 - \frac{3\delta}{2}\tilde{B}^2. \quad (2.159)$$

Лемма 2.13 гарантирует существование $\mathbf{z}_h \in \mathbf{V}_h$ такого, что $(\operatorname{div}\mathbf{z}_h, p_h) \ge \beta_1\|\nabla p_h\|\|\mathbf{z}_h\|$ и $\beta_1 \ne \beta_1(h)$. Более того, можем считать $\|\mathbf{z}_h\| = \|\nabla p_h\| = \tilde{B}$. Рассмотрим теперь

$$a_h(U_h, \{\mathbf{z}_h, 0\}) = (p_h, \operatorname{div}\mathbf{z}_h) - \sum_{i=1}^4 \tilde{T}_i \ge \beta_1\tilde{B}^2 - \sum_{i=1}^4 \tilde{T}_i.$$

Стандартные оценки и неравенство (2.156) влекут

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_1 &:= T_1 \le \max_\tau \Big(\frac{\sqrt{\nu + \alpha h_\tau^2 \mu_u^{-2}}\mu_u \sqrt{2}}{h_\tau} + \frac{\mathbf{a}_\tau \sqrt{2}}{\sqrt{\nu + \alpha h_\tau^2 \mu_u^{-2}}} \Big) A \tilde{B} \\
\tilde{T}_2 &:= T_2 \le \max_\tau \frac{\sqrt{\xi_\tau}\mu_u}{h_\tau} Z\tilde{B} \\
\tilde{T}_3 &:= \sum_\tau \delta_\tau(-\nu\Delta\mathbf{u}_h + \alpha\mathbf{u}_h + \nabla p_h, (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{z}_h)_\tau \le \max_\tau \frac{\sqrt{\delta_\tau}\ \mathbf{a}_\tau\mu_u}{h_\tau}\ \tilde{Y}\tilde{B} \\
&\le \max_\tau \frac{\sqrt{\xi_\tau}\mu_u}{h_\tau} A\tilde{B} + \max_\tau \frac{\sqrt{3}\delta_\tau \mathbf{a}_\tau \mu_u}{h_\tau} \tilde{B}^2 \le \max_\tau \frac{\sqrt{\xi_\tau}\mu_u}{h_\tau} A\ \tilde{B} + \frac{1}{4}\beta_1 \tilde{B}^2, \\
\tilde{T}_4 &:= \sum_\tau \delta_\tau((\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{u}_h, (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{z}_h)_\tau \le \tilde{X} \max_\tau \frac{\sqrt{\delta_\tau}\ \mathbf{a}_\tau\mu_u}{h_\tau}\tilde{B} \\
&\le \max_\tau \frac{\sqrt{\xi_\tau}\mu_u}{h_\tau}\tilde{X}\tilde{B}.
\end{aligned}$$

В последней оценке для $\tilde{T}_3$ использовалось неравенство (2.158) для достаточно малого h_τ. Положим

$$\zeta_a := \max_\tau \Big(\frac{\sqrt{\nu + \alpha h_\tau^2 \mu_u^{-2}}\mu_u \sqrt{2}}{h_\tau} + \frac{\mathbf{a}_\tau \sqrt{2}}{\sqrt{\nu + \alpha h_\tau^2 \mu_u^{-2}}} + \sqrt{\xi_\tau} h_\tau^{-1}\mu_u \Big).$$

Используя неравенство Юнга и оценки для T_i, получим

$$\begin{aligned}
a_h(U_h, (-\mathbf{z}_h, 0)) &\ge \beta_1\tilde{B}^2 - \zeta_a(A + \tilde{X} + Z)\tilde{B} - \frac{1}{4}\beta_1\tilde{B}^2 \\
&\ge \frac{1}{2}\beta_1\tilde{B}^2 - \frac{3}{\beta_1}\zeta_a^2 |[U_h]|_a^2. \qquad (2.160)
\end{aligned}$$

Выберем $V_h := U_h + \rho_a\{-\mathbf{z}_h, 0\}$ с некоторым $\rho_a > 0$. Теперь (2.159), (2.160) дают

$$\begin{aligned}
a_h(U_h, V_h) &\ge \left(\frac{1}{2} - \frac{3\rho_a\zeta_a^2}{\beta_1}\right)|[U_h]|_a^2 + \frac{\beta_1\rho_a - 3\delta}{2}\tilde{B}^2 \\
&\ge \min\left\{\frac{1}{2} - \frac{3\rho_a\zeta_a^2}{\beta_1}; \frac{\beta_1\rho_a - 3\delta}{2\sigma_a}\right\}\left(|[U_h]|_a^2 + \sigma_a B^2\right). \qquad (2.161)
\end{aligned}$$

Выберем теперь подходящим образом ρ_a и σ_a. Условия (2.156) влекут

$$\zeta_a \le \max_\tau \left(\frac{\sqrt{\nu + \alpha h_\tau^2 \mu_u^{-2}}\mu_u \sqrt{2}}{h_\tau} + \frac{1}{2\sqrt{\delta_\tau}} + \frac{\sqrt{\xi_\tau}\mu_u}{h_\tau} \right) \le \max_\tau \frac{c}{h_\tau}$$

Здесь мы использовали выбор $\delta = \delta_0 h_\tau^2$. Фиксируя $\rho_a \zeta_a^2 = \frac{\beta_1}{12}$, получаем для квазиравномерной сетки

$$\beta_1 \rho_a - 3\delta = \frac{\beta_1^2}{12\zeta_a^2} - 3\delta \geq \frac{\beta_1^2 h_{\min}^2}{12c^2} - 3\delta_0 h_{\max}^2 \geq \left(\frac{\beta_1 c_1}{12c^2} - 3\delta_0\right) h^2 =: \tilde{\beta}_1 h^2.$$

Подходящий выбор δ_0 обеспечивает нас положительной константой $\tilde{\beta}_1$. Полагаем $\sigma_a = 2\tilde{\beta}_1 h^2$, теперь оценка (2.161) приводит к

$$a_h(U_h, V_h) \;\geq\; \frac{1}{4} |||U_h|||_a^2. \tag{2.162}$$

Более того, выполнены оценки

$$\begin{aligned} |||-\mathbf{z}_h, 0|||_a^2 &= \nu\|\nabla \mathbf{z}_h\|^2 + \alpha\|\mathbf{z}_h\|^2 + \sum_\tau \left[\delta_\tau \|(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{z}_h\|_\tau^2 + \xi_\tau \|\operatorname{div}\mathbf{z}_h\|_\tau^2\right] \\ &\leq \max_\tau \left(\frac{\nu\mu_u^2}{h_\tau^2} + \alpha + \max_\tau\left(\frac{\delta_\tau\ \mathbf{a}_\tau^2 \mu_u^2}{h_\tau^2} + \frac{\xi_\tau \mu_u^2}{h_\tau^2}\right)\right)\tilde{B}^2 \;\leq\; \zeta_a^2 \tilde{B}^2. \end{aligned}$$

По определению ρ_a имеем $\rho_a^2 \zeta_a^2 = \frac{\beta_1}{12}\rho_a$, поэтому

$$|||V_h|||_a^2 \leq 2|||U_h|||_a^2 + 2\rho_a^2 |||-\mathbf{z}_h, 0|||_a^2 \;\leq\; 2\left(1 + \frac{\beta_1 \rho_a}{12\sigma_a}\right)|||U_h|||_a^2.$$

Далее, получаем $\beta_1\rho_a = \frac{\beta_1^2}{12\zeta_a^2} \leq \frac{\beta_1^2 h^2}{12c^2}$ и

$$1 + \frac{\beta_1\rho_a}{12\sigma_a} \leq 1 + \frac{\beta_1^2 h^2}{12c^2 \cdot 2\tilde{\beta}_1 h^2} = 1 + \frac{\beta_1^2}{24c^2\tilde{\beta}_1} =: Q^2.$$

Последнее неравенство, вместе (2.162), обеспечивает желаемую оценку (2.157) с $\beta = \frac{1}{4\sqrt{2}Q}$.
□

Существенное ограничение на параметр стабилизации δ_τ происходит из (2.156):

$$\delta_\tau = \delta_0 h_\tau^2 \leq \frac{\nu + \alpha h_\tau^2 \mu_u^{-2}}{8\mathbf{a}_\tau^2}. \tag{2.163}$$

Условие (2.163) выполнено для умеренных и больших значений α.Если рассмотреть наихудшую ситуацию для (2.163), когда $\alpha = 0$, то получается ограничение

$$\mathrm{Re}_\tau := \frac{h_\tau \mathbf{a}_\tau}{\nu} \leq \frac{1}{2\sqrt{2\delta_0\nu}}.$$

Заметим, что граница “разрешенных” значений Re_τ здесь отодвинута существенно дальше, чем в случае (нестабилизированного) метода Галёркина, в котором удовлетворительная оценка устойчивости возможна лишь при $\mathrm{Re}_\tau = O(1)$. Более того, в проведенных нами численных экспериментах ограничение (2.163) не наблюдается. Эксперименты показывают равномерную оценку при $\alpha = 0$ и $\nu \to 0$. Следовательно, результаты леммы 2.14 могут быть неоптимальными при $\alpha \to 0$. С другой стороны случай $\alpha = 0$ и $\nu \to 0$ может являться не самым актуальным с точки зрения приложений, так как при больших числах Рейнольдса течения, как правило, нестационарные.

В качестве следующего шага мы получаем оценку непрерывности для a_h.

Лемма 2.15. *Для произвольной* $U = \{\mathbf{u}, p\} \in \mathbf{W}$ *такой, что* $-\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p \in \mathbb{L}_2(\tau)\ \forall\, \tau \in \mathcal{T}_h$, *и произвольной* $V_h \in \mathbf{W}_h \setminus \{0\}$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned}\frac{a_h(U,V_h)}{|||V_h|||_a} \ \le\ & |[U]|_a + \frac{1}{\sqrt{\sigma_a}}\|\mathbf{u}\| + \Big(\sum_\tau \frac{3\mathbf{a}_\tau^2}{\nu + \alpha h_\tau^2 + \mathbf{a}_\tau^2\delta_\tau}\|\mathbf{u}\|_\tau^2\Big)^{\frac12} \\ & + \Big(\sum_\tau \frac{3}{\nu + \alpha h_\tau^2 + \xi_\tau}\|p\|_\tau^2\Big)^{\frac12} + \Big(\sum_\tau \delta_\tau\| - \nu\Delta\mathbf{u} + \alpha\mathbf{u} + \nabla p\|_\tau^2\Big)^{\frac12}.\end{aligned} \tag{2.164}$$

Доказательство. Доказательство производится аналогично доказательству леммы 2.12. □

Наша дальнейшая цель – получить оценку сходимости и найти оптимальный набор параметров стабилизации $\{\delta_\tau\}$ и $\{\xi_\tau\}$. Пусть $\{\mathbf{u}, p\} \in \mathbf{W}$ и $\{\mathbf{u}_h, p_h\} \in \mathbf{W}_h$ – решения непрерывной и дискретной задачи, соответственно.

Теорема 2.12. *Предположим, что в области* Ω *справедлива* $\mathbb{H}^2$*-оценка для решения задачи Стокса. Рассмотрим LBB-устойчивую конечно-элементную аппроксимацию, причем* $\mathbb{Q}_h \subset \mathbb{H}^1(\Omega)$. *Предположим выполнение условия* (2.147) *и масштабирования уравнений такого, что* $\|\mathbf{a}\|_\infty \sim 1$. *Пусть параметры*

$$\xi_\tau = \xi \sim 1, \qquad \delta_\tau \sim h_\tau^2/\xi, \qquad \sigma_a \sim h^2 \tag{2.165}$$

удовлетворяют условию (2.156). Тогда для ошибки $E_h = \{\mathbf{u}-\mathbf{u}_h, p-p_h\}$

справедлива равномерная оценка

$$|||E_h|||_a^2 \le C\sum_\tau \Big(h_\tau^{2(k+1)}|p|^2_{H^{k+1}(\tau)} + h_\tau^{2l}|\mathbf{u}|^2_{H^{l+1}(\tau)}\Big), \quad C \ne C(h,\nu,\alpha). \tag{2.166}$$

Доказательство. Используем леммы 2.14 и 2.15 с $U = \{\eta_{\mathbf{u}}, \eta_p\}$. Получаем

$$\beta_a|||\chi_{\mathbf{u}},\chi_p|||_a \le |[\{\eta_{\mathbf{u}},\eta_p\}]|_a + \frac{1}{\sqrt{\sigma_a}}\|\eta_{\mathbf{u}}\|$$
$$+\Big(\sum_\tau \delta_\tau\|-\nu\Delta\eta_{\mathbf{u}} + \alpha\eta_{\mathbf{u}} + \nabla\eta_p\|_\tau^2\Big)^{\frac12} + \Big(\sum_\tau \frac{3}{\nu+\alpha h_\tau^2+\xi_\tau}\|\eta_p\|_\tau^2\Big)^{\frac12}$$
$$+\Big(\sum_\tau \frac{3\mathbf{a}_\tau^2}{\nu+\alpha h_\tau^2+\mathbf{a}_\tau^2\delta_\tau}\|\eta_{\mathbf{u}}\|_\tau^2\Big)^{\frac12}.$$

Неравенство треугольника $|||E_h|||_a \le |||\chi_{\mathbf{u}},\chi_p|||_a + |||\eta_{\mathbf{u}},\eta_p|||_a$, стандартные свойства интерполяции и предположения $\nu\delta_\tau \le Ch_\tau^2$ и $\alpha\delta_\tau \le C$ из (2.156) дают оценки

$$\begin{aligned} |||E_h|||_a^2 \ \le\ & C\sum_\tau \Big\{\Big(\delta_\tau + \sigma_a + \frac{h_\tau^2}{\nu+\alpha h_\tau^2+\xi_\tau}\Big)h_\tau^{2k}|p|^2_{H^{k+1}(\tau)} \\ & + \Big(\nu+\alpha h_\tau^2+\xi_\tau + \frac{h_\tau^2}{\sigma_a} + \delta_\tau\mathbf{a}_\tau^2 + \frac{\mathbf{a}_\tau^2}{\nu+\alpha h_\tau^2+\mathbf{a}_\tau^2\delta_\tau}h_\tau^2\Big)h_\tau^{2l}|\mathbf{u}|^2_{H^{l+1}(\tau)}\Big\}. \end{aligned} \tag{2.167}$$

Оценка (2.167) вместе с условиями на параметры (2.165) приводят к желаемому результату. □

2.6.3 Метод со стабилизацией давления

В данном разделе изучается схема (2.129) в случае, когда условие LBB устойчивости для пары скорость-давление не обязательно выполнено. В этом общем случае при построении $\mathbf{V}_h$ и $\mathbb{Q}_h$ можно рассматривать многочлены одинаковых степеней, т.е. $l = k > 0$. Схему с полной стабилизацией, мы обозначим, как "Схема B", а предположения на параметры следующие.

Схема B: $\delta_\tau := \delta_\tau^p = \delta_\tau^{\mathbf{a}} = \delta_\tau^{\mathbf{w}} \ge 0, \quad \xi_\tau \ge 0.$
Этот случай мы будем ещё называть "полной стабилизацией".

В случае конечно-элементного давления для упрощения рассуждений предположим $\mathbb{Q}_h \subset \mathbb{L}_0^2 \cap \mathbb{H}^1(\Omega)$. Тем не менее, анализ без труда обобщается на случай разрывных аппроксимаций давления, если дополнительный стабилизационные члены, учитывающие скачки давления вдоль сторон элементов, добавляются в вариационную формулировку, см., например, [135], Гл. IV.3.1.

Оценка устойчивости схемы

Начнем с проверки inf-sup условия устойчивости для метода в пространстве $\mathbf{W}_h = \mathbf{V}_h \times \mathbb{Q}_h$ относительно нормы $\|\cdot\|_b$ определенной, как

$$\begin{aligned} \|V\|_b^2 &= |[V]|_b^2 + \sigma_b \|q\|^2, && (2.168)\\ |[V]|_b^2 &= \nu\|\nabla \mathbf{v}\|^2 + \alpha\|\mathbf{v}\|^2 + \sum_\tau \big(\xi_\tau \|\operatorname{div} \mathbf{v}\|_\tau^2 \\ &\qquad + \delta_\tau \|(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \mathbf{w}\times\mathbf{v} + \nabla q\|_\tau^2\big). && (2.169)\end{aligned}$$

значение параметра $\sigma_b > 0$ будет выбрано далее. Используя обозначения $\mathbf{a}_\tau = \|\mathbf{a}\|_{\infty,\tau}$, $\mathbf{w}_\tau = \|\mathbf{w}\|_{\infty,\tau}$, определим величины

$$\begin{aligned} M_b^2 &= 2\max_\tau\{\delta_\tau\left(\mathbf{a}_\tau^2 + C_F^2\mathbf{w}_\tau^2\right)\}, && (2.170)\\ N_b &= \sqrt{\nu} + \sqrt{\alpha}C_F + (\|\mathbf{a}\|_\infty + C_F\|\mathbf{w}\|_\infty)C_F\nu^{-\frac12}. && (2.171)\end{aligned}$$

Лемма 2.16. *В рассматриваемом нами случае B предположим выполнение следующих условий для параметров стабилизации:*

$$\mu_0 h_\tau^2 \le \delta_\tau \le \frac12 \min\left\{\frac{h_\tau^2}{\mu_u^2\nu}, \frac1\alpha\right\}, \quad 0 \le \xi_\tau \le \xi \le N_b^2 \qquad (2.172)$$

с подходящей константой $\mu_0 > 0$, определенной ниже. Тогда существуют положительные константы $\beta_b \ne \beta_b(h,\nu)$ и $\sigma_b = cN_b^{-2}$ такие, что

$$\inf_{U_h\in\mathbf{W}_h}\sup_{V_h\in\mathbf{W}_h}\frac{a_h(U_h,V_h)}{\|U_h\|_b\,\|V_h\|_b} \ge \beta_b \qquad (2.173)$$

при достаточно малом $h = \sup_\tau h_\tau$: $h \le C_F \min\{\mu_u, 1\}$.

Доказательство. Доказательства далее проводятся также, как в случае A, но с некоторыми изменениями. Зафиксируем произвольную $U_h = \{\mathbf{u}_h, p_h\} \in \mathbf{W}_h$ и введём дополнительные обозначения:

$$\tilde X^2 = \sum_\tau \delta_\tau \|(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{u}_h + \mathbf{w}\times\mathbf{u}_h + \nabla p_h\|_\tau^2.$$

Чтобы восполнить недостающее LBB условие устойчивости на $\mathbf{W}_h$, рассматривается некоторая стабилизация давления. Начнем со следующего вспомогательного результата.

Лемма 2.17. *Предположим, что константы* $\mu_0 > 0$ *из условия* (2.172) *и* N_b *из* (2.171), *удовлетворяют соотношению*

$$C_I \mu_0^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} C_S N_b, \tag{2.174}$$

где C_I *и* C_S *– некоторые константы из интерполяционных оценок, определены далее в доказательстве. Тогда для произвольной* $p_h \in \mathbb{Q}_h$, *найдется* $\mathbf{z}_h \in \mathbf{V}_h$ *такая, что*

$$(p_h, \operatorname{div} \mathbf{z}_h) \geq \|p_h\|^2 - \frac{1}{2} C_\Omega N_b (A + \tilde{X}) \|p_h\| \tag{2.175}$$

с некоторой константой $C_\Omega > 0$.

Доказательство. Неравенство Нечаса обеспечивает существование $\mathbf{z} \in \mathbf{V}$ (см. Следствие 2.4 в [84]) такой, что $\operatorname{div} \mathbf{z} = p_h$, с $\|\nabla \mathbf{z}\| \leq \bar{\beta}_0 \|p_h\|$. Более того, ранее мы предполагали существование оператора интерполяции $I_h : \mathbf{V} \to \mathbf{V}_h$ такого, что

$$\mathbf{z}_h = I_h \mathbf{z}, \quad \|\nabla \mathbf{z}_h\| \leq C_S \|\nabla \mathbf{z}\| \leq C_S \bar{\beta}_0 \|p_h\|, \quad \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_h\|_\tau \leq C_I h_\tau |\mathbf{z}|_{H^1(\tau)}$$

для всех элементов разбиения $\tau \in \Omega$. Интегрирование по частям, неравенство треугольника и (2.172) влекут

$$\begin{aligned}
(p_h, \operatorname{div} \mathbf{z}_h) &= (p_h, \operatorname{div} \mathbf{z}) - (p_h, \operatorname{div}(\mathbf{z} - \mathbf{z}_h)) \\
&\geq \|p_h\|^2 - \left| \sum_\tau (\nabla p_h, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h)_\tau \right| \\
&\geq \|p_h\|^2 - \left| \sum_\tau ((\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{u}_h + \mathbf{w} \times \mathbf{u}_h + \nabla p_h, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h)_\tau \right| \\
&\quad - \left| \sum_\tau ((\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{u}_h + \mathbf{w} \times \mathbf{u}_h, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h)_\tau \right| \;=\; \|p_h\|^2 - S_1 - S_2, \\
S_1 &\leq \tilde{X} \Big(\sum_\tau (\delta_\tau)^{-1} C_I^2 h_\tau^2 |\mathbf{z}|^2_{H^1(\tau)} \Big)^{\frac{1}{2}} \;\leq\; \mu_0^{-1/2} C_I \bar{\beta}_0 \tilde{X} \|p_h\|, \\
S_2 &\leq \sum_\tau C_I h_\tau |\mathbf{z}|_{H^1(\tau)} \max_\tau \nu^{-1/2} (\mathbf{a}_\tau + C_F \mathbf{w}_\tau) \sqrt{\nu} |\mathbf{u}_h|_{H^1(\tau)} \\
&\leq C_I \bar{\beta}_0 \max_\tau \nu^{-1/2} h_\tau (\mathbf{a}_\tau + C_F \mathbf{w}_\tau) A \;\|p_h\| \leq C_I \bar{\beta}_0 N_b A \;\|p_h\|.
\end{aligned}$$

Последняя оценка справедлива при $h \le C_F$. Теперь утверждение (2.175) следует с $C_\Omega = C_I \bar{\beta}_0$ и благодаря (2.174).
□

Лемма 2.17, накладывая ограничение на μ_0, приводит к оценки снизу для δ_τ:

$$\frac{C_0 h_k^2}{\nu + C_F\left(\alpha + \nu^{-1}(\|\mathbf{a}\|_\infty + C_S\|\mathbf{w}\|_\infty)^2\right)} \le \delta_\tau. \tag{2.176}$$

Константа C_0 в (2.176) может быть взята достаточно малой, так как мы можем выбрать константу C_S в (2.174) сколь угодно большой, но не зависящей от параметров задачи. Таким образом, оценка снизу (2.176) не противоречит оценке сверху в (2.172).

Продолжим доказательство леммы 2.16:
(i) Также как в разделе 2.6.2 получаем с использованием обратного неравенства и условия (2.172)

$$a_h(U_h, U_h) \ge \frac{1}{2}(A^2 + \tilde{X}^2 + Z^2). \tag{2.177}$$

(ii) Следующий шаг может быть сделан с помощью леммы 2.12 и неравенства $\|\nabla \mathbf{z}_h\| \le C_\Omega \|p_h\|$.

$$a_h(U_h, \{-\mathbf{z}_h, 0\}) = (p_h, \operatorname{div}\mathbf{z}_h) - \sum_{i=1}^{4} T_i \ge B^2 - \frac{C_\Omega}{2} N_b (A + \tilde{X})B - \sum_{i=1}^{4} T_i,$$

$$\begin{aligned}
T_1 &= \nu(\nabla\mathbf{u}_h, \nabla\mathbf{z}_h) + (\alpha\mathbf{u}_h + \mathbf{w}\times\mathbf{u}_h, \mathbf{z}_h) - (\mathbf{u}_h, (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{z}_h) \ \le\ C_\Omega N_b AB,\\
T_2 &= \sum_\tau \xi_\tau(\operatorname{div}\mathbf{u}_h, \operatorname{div}\mathbf{z}_h)_\tau \ \le \sqrt{\xi}\ ZB \ \le C_\Omega N_b ZB,\\
T_3 &= \sum_\tau \delta_\tau(-\nu\Delta\mathbf{u}_h + \alpha\mathbf{u}_h, \mathbf{w}\times\mathbf{z}_h + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{z}_h)_\tau \ \le\ C_\Omega M_b AB,\\
T_4 &= \sum_\tau \delta_\tau(\mathbf{w}\times\mathbf{u}_h + \mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{u}_h + \nabla p_h, \mathbf{w}\times\mathbf{z}_h + \mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{z}_h)_\tau \le C_\Omega M_b \tilde{X} B.
\end{aligned}$$

Предполагая $h_\tau \le C_F \mu_u$, чтобы обеспечить $M_b \le N_b$, используем неравенство Юнга с $\kappa = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}
a_h(U_h, \{-\mathbf{z}_h, 0\}) &\ \ge\ B^2 - 2C_\Omega N_b\left(A + Z + \tilde{X}\right)B \qquad (2.178)\\
&\ \ge\ \left(1 - \frac{3\kappa}{2}\right)B^2 - \frac{2C_\Omega^2 N_b^2}{\kappa}\left(A^2 + \tilde{X}^2 + Z^2\right) \ =\ \frac{1}{2}B^2 - 6C_\Omega^2 N_b^2 |[U]|_b^2.
\end{aligned}$$

(iii) Положим $V_h := U_h + \rho_b\{-\mathbf{z}_h, 0\}$ с некоторой константой $\rho_b > 0$ и получим благодаря (2.177), (2.178):

$$a_h(U_h, V_h) \geq \left(\frac{1}{2} - 6\rho_b C_\Omega^2 N^2\right) |[U]|_b^2 + \frac{\rho_b}{2} B^2.$$

Пусть $\rho_b := \frac{1}{24C_\Omega^2 N_b^2}$ и $\sigma_b := 2\rho_b = \frac{1}{12C_\Omega^2 N_b^2}$, тогда

$$a_h(U_h, V_h) \geq \frac{1}{4}\left(A^2 + \tilde{X}^2 + Z^2 + \sigma_b B^2\right) \equiv \frac{1}{4}\|U_h\|_b^2. \tag{2.179}$$

(iv) С достаточно малым h таким, что $M_b \leq N_b$, имеем

$$\begin{aligned} \|-\mathbf{z}_h, 0\|_b^2 &= \nu\|\nabla\mathbf{z}_h\|^2 + \alpha\|\mathbf{z}_h\|^2 + \sum_\tau \big(\delta_\tau\|\mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{z}_h + \mathbf{w}\times\mathbf{z}_h\|_\tau^2 \\ &\qquad + \xi_\tau\|\operatorname{div}\mathbf{z}_h\|_\tau^2\big) \\ &\leq \left(\nu + \alpha C_F^2 + M_b^2 + \xi\right)\|\nabla\mathbf{z}_h\|^2 \leq 3C_\Omega^2 N_b^2 B^2. \end{aligned}$$

По определению ρ_b и σ_b получаем $\rho_b^2 C_\Omega^2 N_b^2 \leq \frac{1}{48}\sigma_b$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|V_h\|_b^2 &\leq 2\|U_h\|_b^2 + 2\rho_b^2\|-\mathbf{z}_h, 0\|_b^2 \\ &\leq 2\left(|[U_h]|_b^2 + (\sigma_b + 3C_\Omega^2\rho_b^2 N_b^2)\|p_h\|^2\right) \leq \frac{13}{6}\|U_h\|_b^2, \end{aligned}$$

что вместе с (2.179) влечет (2.173) с константой $\beta_b = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{6}{13}}$. Лемма 2.16 доказана. □

Сходимость и выбор параметров

Свойство ортогональности Галёркина (2.131) и лемма 2.16 обеспечивают существование $V_h \in \mathbf{W}_h$ такой, что

$$\beta_b\|\chi_\mathbf{u}, \chi_p\|_b\ \|V_h\|_b \leq a_h(\{\chi_\mathbf{u}, \chi_p\}, V_h) = -a_h(\{\eta_\mathbf{u}, \eta_p\}, V_h). \tag{2.180}$$

Лемма 2.18. *Для произвольной $U = \{\mathbf{u}, p\} \in \mathbf{W}$ такой, что $\mathcal{L}U|_\tau \in \mathbb{L}_2(\tau)$ $\forall\tau \in \mathcal{T}_h$, и произвольной $V_h = \{\mathbf{v}_h, q_h\} \in \mathbf{W}_h$ имеет место оценка*

$$\begin{aligned} a_h(U, V_h) &\leq C\ \|V_h\|_b\Bigg(|[U]|_b + \Big(\sum_\tau(\delta_\tau)^{-1}\|\mathbf{u}\|_\tau^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \Big(\sum_\tau 2(\nu+\xi_\tau)^{-1}\|p\|_\tau^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_\tau \delta_\tau\|-\nu\Delta\mathbf{u} + \alpha\mathbf{u}\|_\tau^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Bigg). \end{aligned} \tag{2.181}$$

Доказательство. Симметричная часть формы a_h ограничена произведением норм $|[U]|_b\ |[V]|_b$. Аналогично доказательству леммы 2.11 имеем

$$\begin{aligned}((\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\mathbf{w}\times\mathbf{u},\mathbf{v}_h)+(\operatorname{div}\mathbf{u},q_h) \ &\le\ \Big(\sum_\tau(\delta_\tau)^{-1}\|\mathbf{u}\|_\tau^2\Big)^{\frac12}\\ &\times\sum_\tau\delta_\tau\|(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{v}_h+\mathbf{w}\times\mathbf{v}_h+\nabla q_h\|_\tau^2,\end{aligned}$$

$$-(p,\operatorname{div}\mathbf{v}_h)\le\Big(\sum_\tau 2(\nu+\xi_\tau)^{-1}\|p\|_\tau^2\Big)^{\frac12}\Big(\nu\|\nabla\mathbf{v}_h\|^2+\sum_\tau\xi_\tau\|\operatorname{div}\mathbf{v}_h\|_\tau^2\Big)^{\frac12}.$$

Наконец, оценим оставшиеся стабилизационные члены

$$\begin{aligned}&\sum_\tau\delta_\tau(-\nu\Delta\mathbf{u}+\alpha\mathbf{u},(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{v}_h+\mathbf{w}\times\mathbf{v}_h+\nabla q_h)_\tau\\ \le\ \ &A\ \Big(\sum_\tau\delta_\tau\|(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{v}_h+\mathbf{w}\times\mathbf{v}_h+\nabla q_h\|_\tau^2\Big)^{\frac12}.\end{aligned}$$

Благодаря определению норм $\|\cdot\|_b$ и $|[\cdot]|_b$ получаем оценку (2.181). □

Аналогично доказательству теоремы 2.10 положим $U=\{\eta_{\mathbf{u}},\eta_p\}$. Теперь (2.180), неравенство треугольника и локальные свойства интерполяции дают

$$\begin{aligned}\|E_h\|_b^2\ \le\ C\Big\{\sum_\tau\big(\delta_\tau+h_\tau^2(\nu+\xi_\tau)^{-1}+\sigma_b h_\tau^2\big)\,h_\tau^{2k}|p|^2_{H^{k+1}(\tau)}+\\ \big(\nu+\alpha C_F^2h_\tau^2+\xi_\tau+\delta_\tau(\mathbf{a}_\tau^2+\mathbf{w}_\tau^2h_\tau^2+\frac{\nu^2}{h_\tau^2}+\alpha^2h_\tau^2)+\frac{h_\tau^2}{\delta_\tau}\big)h_\tau^{2l}|\mathbf{u}|^2_{H^{l+1}(\tau)}\Big\}.\end{aligned}$$

Выбираем параметр δ_τ приравнивая коэффициенты при слагаемых, зависящих от $\mathbf{u}$. Это приводит к соотношению:

$$\delta_\tau\sim h_\tau^2\,[\nu(1+\mathrm{Re}_\tau+\mathrm{Ek}_\tau^{-1}+\mathrm{D}_\tau)]^{-1}. \qquad (2.182)$$

Чтобы с одной стороны удовлетворить ограничениям (2.172), а с другой стороны уравнять коэффициенты при при слагаемых, зависящих от p, положим $h_\tau^2/\xi_\tau\sim\delta_\tau$. Итак

$$\xi_\tau\sim\nu(1+\mathrm{Re}_\tau+\mathrm{Ek}_\tau^{-1}+\mathrm{D}_\tau)\ \ (\ge\ \nu)\,. \qquad (2.183)$$

Используя (2.182)-(2.183), подытожим результаты в виде теоремы.

Теорема 2.13. *Для метода конечных элементов (2.129) и следующего выбора параметров:* $\delta_\tau = \delta_\tau^{\mathbf{a}} = \delta_\tau^{\mathbf{w}} = \delta_\tau^{p}$, *удовлетворяющего условиям* (2.182)-(2.183), *справедлива оценка сходимости*

$$\|E_h\|_b^2 \leq C\Big\{\sum_\tau \big(\nu^{-1}(1+\mathrm{Re}_\tau+\mathrm{Ek}_\tau^{-1}+\mathrm{D}_\tau)^{-1}+\sigma_b\big)\, h_\tau^{2(k+1)}|p|^2_{H^{k+1}(\tau)} + \big(\nu(1+\mathrm{Re}_\tau+\mathrm{Ek}_\tau^{-1}+\mathrm{D}_\tau)\big)\, h_\tau^{2l}|\mathbf{u}|^2_{H^{l+1}(\tau)}\Big\}. \qquad (2.184)$$

Анализ для случая LBB устойчивых аппроксимаций

Мы уже отмечали, что полностью стабилизированная схема позволяет использовать конечно-элементные аппроксимации, не удовлетворяющие LBB условию. Оказывается, если априори известно, что LBB условие всё-таки выполнено, то немного модифицированный анализ приводит к другому выбору параметров стабилизации Формулы для оптимальных параметров становятся такими же, как в параграфе 2.6.2 в теореме 2.12. В этом параграфе считаем $\mathbf{w}=0$. Напомним, что в случае LBB устойчивых элементов типичным соотношением между степенями многочленов при построении $\mathbf{V}_h$ и $\mathbb{Q}_h$ является $l \geq k+1$.

Начнем с оценки устойчивости.

Лемма 2.19. *Предположим выполнение следующих условий на параметры стабилизации*

$$0 \leq \delta_\tau \leq \frac{1}{2}\min\left\{\frac{h_\tau^2}{\mu_u^2\nu}, \frac{1}{\alpha}\right\}, \qquad 0 \leq \delta_\tau \mathbf{a}_\tau^2 \leq \xi_\tau. \qquad (2.185)$$

где $\mathbf{a}_\tau := \|\mathbf{a}\|_{L_\infty(\tau)}$. *Тогда существует положительная константа* $\beta_b \neq \beta_b(h,\nu)$ *такая, выполнено inf-sup условие*

$$\inf_{U_h\in\mathbf{W}_h}\sup_{V_h\in\mathbf{W}_h}\frac{a_h(U_h,V_h)}{|||U_h|||_b |||V_h|||_b} \geq \beta_b \qquad (2.186)$$

с

$$\sqrt{\sigma_b} = c\Big(\sqrt{\xi}+\sqrt{\nu}+\sqrt{\alpha}C_F+\frac{C_F\|\mathbf{a}\|_\infty}{\sqrt{\nu+\alpha C_F^2}}\Big)^{-1}. \qquad (2.187)$$

Доказательство. Возьмём произвольную $U_h \in \mathbf{W}_h$. Найдем далее $V_h \in \mathbf{W}_h$, удовлетворяющую (2.186). Используем обозначения, введенные при доказательстве лемм 2.19 и 2.13. Имеем $|[U_h]|_b^2 = A^2 + \tilde{X}^2 + Z^2$. Сначала положим $V_h = U_h$ в (2.129), получим

$$a_h(U_h, U_h) \geq A^2 + \tilde{X}^2 + Z^2 - \tilde{X}Y.$$

Обратные неравенства и условия (2.185) обеспечивают оценку $Y \leq A$. Теперь неравенство Юнга влечёт

$$a_h(U_h, U_h) \geq \frac{1}{2}(A^2 + \tilde{X}^2 + Z^2). \tag{2.188}$$

В силу LBB условия (2.88) существует некоторое $\mathbf{z}_h \in \mathbf{V}_h$ такое, что $(\operatorname{div} \mathbf{z}_h, p_h) \geq \beta_0 \|p_h\| \|\mathbf{z}_h\|_{\mathbf{V}}$. Можем предположить $\|\mathbf{z}_h\|_{\mathbf{V}} = \|p_h\|$. Рассмотрим теперь соотношения

$$a_h(U_h, (\mathbf{z}_h, 0)) = (p_h, \operatorname{div} \mathbf{z}_h) - \sum_{i=1}^{4} T_i \geq \beta_1 B^2 - \sum_{i=1}^{4} T_i.$$

Обозначим $\xi = max_\tau \xi_\tau$. Стандартные неравенства, интегрирование по частям и условия (2.185) дают

$$\begin{aligned}
T_1 &= \nu(\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{z}_h) + (\alpha \mathbf{u}_h, \mathbf{z}_h) - (\mathbf{u}_h, (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{z}_h) \\
&\leq \Big(\sqrt{\nu} + \sqrt{\alpha} C_F^2 + \frac{C_F \|\mathbf{a}\|_\infty}{\sqrt{\nu + \alpha C_F^2}}\Big) AB, \\
T_2 &= \sum_\tau \xi_\tau (\operatorname{div} \mathbf{u}_h, \operatorname{div} \mathbf{z}_h)_\tau \ \leq \sqrt{\xi}\ ZB, \\
T_3 &= \sum_\tau \delta_\tau (-\nu \Delta \mathbf{u}_h + \alpha \mathbf{u}_h, (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{z}_h)_\tau \ \leq \ \max_\tau (\sqrt{\delta_\tau} \mathbf{a}_\tau) AB \ \leq \sqrt{\xi}\ AB, \\
T_4 &= \sum_\tau \delta_\tau ((\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{u}_h + \nabla p_h, \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{z}_h)_\tau \leq \max_\tau (\sqrt{\delta_\tau} \mathbf{a}_\tau) \tilde{X} B \ \leq \sqrt{\xi}\ \tilde{X} B.
\end{aligned}$$

Обозначим $\zeta_b := \sqrt{\nu} + \sqrt{\alpha} C_F^2 + \frac{C_F \|\mathbf{a}\|_\infty}{\sqrt{\nu + \alpha C_F^2}} + \sqrt{\xi}$ и, используя неравенство Юнга, получим

$$a_h(U_h, (-\mathbf{z}_h, 0)) \geq \beta_0^2 - \zeta_b (A + \tilde{X} + Z) B \geq \frac{1}{2} \beta_0 B^2 - \frac{3\zeta_b^2}{\beta_0} \Big(A^2 + \tilde{X}^2 + Z^2\Big) \tag{2.189}$$

Положим $V_h := U_h + \rho_b \{-\mathbf{z}_h, 0\}$ с $\rho_b = \frac{\beta_0}{12\zeta_b^2}$, $\sigma_b := 2\beta_0 \rho_b$. С помощью оценок (2.188), (2.189) выводим

$$a_h(U_h, V_h) \geq \min\Big(\frac{1}{2} - \frac{3\rho_b \zeta_b^2}{\beta_0}; \frac{\beta_0 \rho_b}{2\sigma_b}\Big) \Big(|[U]|_b^2 + \sigma_b B^2\Big) \ \geq \ \frac{1}{4} |||U_h|||_b^2. \tag{2.190}$$

Боле того, используя (2.185), получаем

$$\begin{aligned}|||(-\mathbf{z}_h,0)|||_b^2 &= \nu\|\nabla\mathbf{z}_h\|^2+\alpha\|\mathbf{z}_h\|^2+\sum_\tau\left(\delta_\tau\|\mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{z}_h\|_\tau^2+\xi_\tau\|\mathrm{div}\,\mathbf{z}_h\|_\tau^2\right)\\ &\le \Big(\nu+\alpha C_F^2+2\xi\Big)\|\nabla\mathbf{z}_h\|^2 \;\le\; 2\zeta_b^2B^2.\end{aligned}$$

По определению ρ_b и σ_b имеем $6\rho_b^2\zeta_b^2\le\frac{1}{12}\sigma_b$. Следовательно,

$$|||V_h|||_b^2 \;\le\; 2\Big(|||U_h|||_b^2+\rho_b^2|||(-\mathbf{z}_h,0)|||_b^2\Big) \;\le\; \frac{13}{6}|||U_h|||_b^2,$$

что вместе с (2.190) дает (2.186) с $\beta_b=\frac14\sqrt{\frac{6}{13}}$. Наконец, заметим, что параметр σ_b может быть выбран в соответствии с (2.187). □

Оценка непрерывности для билинейной формы задается леммой 2.18.

Ниже оценка для ошибки стабилизированного метода конечных элементов $E_h=\{\mathbf{u}-\mathbf{u}_h,p-p_h\}$ отличается от оценки из теоремы 2.13.

Теорема 2.14. *Предположим масштабирование уравнений* (2.124) *такое, что* $\|\mathbf{a}\|_\infty=O(1)$. *Предположим выполнение условие LBB устойчивости. Для метода конечных элементов* (2.129) *с параметрами*

$$\xi_\tau=\xi\sim1,\qquad \delta_\tau\sim h_\tau^2/\xi, \tag{2.191}$$

имеет место оценка для ошибки

$$|||E_h|||_b^2\le C\sum_\tau\Big\{h_\tau^{2(k+1)}|p|_{H^{k+1}(\tau)}^2+h_\tau^{2l}|\mathbf{u}|_{H^{l+1}(\tau)}^2\Big\},\quad C\ne C(\nu,\alpha,h). \tag{2.192}$$

Доказательство. Пусть $\{\hat{\mathbf{u}}_h,\hat p_h\}\in\mathbf{W}_h$ – подходящий интерполянт для $\{\mathbf{u},p\}$. Рассмотрим

$$\{\eta_\mathbf{u},\eta_p\}:=\{\mathbf{u}-\hat{\mathbf{u}}_h,p-\hat p_h\},\qquad \{\chi_\mathbf{u},\chi_p\}:=\{\hat{\mathbf{u}}_h-\mathbf{u}_h,\hat p_h-p_h\}.$$

Условие ортогональности Галёркина (2.131) и (2.186) обеспечивает существование $V_h\in\mathbf{W}_h$ такого, что

$$\beta_b|||\chi_\mathbf{u},\chi_p|||_b\;|||V_h|||_b\le a_h(\{\chi_\mathbf{u},\chi_p\},V_h)=-a_h(\{\eta_\mathbf{u},\eta_p\},V_h). \tag{2.193}$$

Оценка (2.193) и лемма 2.18 с $U=\{\eta_\mathbf{u},\eta_p\}$ влечёт

$$\begin{aligned}\beta_b|||\chi_\mathbf{u},\chi_p|||_b \;&\le\; |[\eta_\mathbf{u},\eta_p]|_b+\Big(\sum_\tau\delta_\tau\|-\nu\Delta\eta_\mathbf{u}+\alpha\eta_\mathbf{u}\|_\tau^2\Big)^{\frac12}\\ &+\Big(\sum_\tau\frac{2}{\nu+\xi_\tau}\|\eta_p\|_\tau^2\Big)^{\frac12}+\Big(\sum_\tau\delta_\tau^{-1}\|\eta_\mathbf{u}\|_\tau^2\Big)^{\frac12}.\end{aligned}$$

Неравенство треугольника $|||E_h|||_b \le |||\chi_{\mathbf{u}}, \chi_p|||_b + |||\eta_{\mathbf{u}}, \eta_p|||_b$ и стандартные свойства интерполяции вместе с условием (2.185) дают

$$\begin{aligned} |||E_h|||_b^2 \ \le \ & C \sum_\tau \Big\{ \big(\delta_\tau + h_\tau^2(\nu+\xi_\tau)^{-1} + \sigma_b h_\tau^2\big)\, h_\tau^{2k} |p|^2_{H^{k+1}(\tau)} \\ & + \big(\nu + \alpha C_F^2 h_\tau^2 + \xi_\tau + \delta_\tau(\mathbf{a}_\tau^2 + \frac{\nu^2}{h_\tau^2} + \alpha^2 h_\tau^2) + \frac{h_\tau^2}{\delta_\tau}\big) h_\tau^{2l} |\mathbf{u}|^2_{H^{l+1}(\tau)} \Big\}. \end{aligned} \tag{2.194}$$

Так как для LBB устойчивых конечных элементов типично соотношение $l \ge k+1$, то разумным выбором параметров является $\xi_\tau = \xi \sim 1$, $\delta_\tau \sim h_\tau^2/\xi$. Оценка (2.194) влечёт

$$|||E_h|||_b^2 \le C \sum_\tau \Big\{ (1+\sigma_b) h_\tau^{2(k+1)} |p|^2_{H^{k+1}(\tau)} + \big(\nu + \alpha h_\tau^2 + \xi + h_\tau^2 \mathbf{a}_\tau^2\big) h_\tau^{2l} |\mathbf{u}|^2_{H^{l+1}(\tau)} \Big\}.$$

Замечая, что σ_b остаётся ограниченным относительно изменений ν и α (при $\|\mathbf{a}\|_\infty \sim 1$), и выбирая h достаточно малым, получаем (2.192). $\Box$

Формулы (2.191) для параметров в случае LBB-устойчивых элементов проще, чем соответствующие формулы для аппроксимаций одинакового порядка по скорости и давления. Напомним, что в последнем случае они имеют вид ($\mathbf{w} = 0$):

$$\tilde{\delta}_\tau = \frac{\delta_0 h_\tau^2}{\nu(1 + \mathrm{Re}_\tau + D_\tau)}, \qquad \tilde{\xi}_\tau = \xi_0 \nu (1 + \mathrm{Re}_\tau + D_\tau) \tag{2.195}$$

с $D_\tau = \alpha\, h_\tau^2 \nu^{-1}$. Если $l = k \ge 1$, то порядок сходимости $\mathcal{O}(h^{k+\frac{1}{2}})$ имеет место в норме $\|[\cdot]\|_b$. В случае доминирующей конвекции ($\mathrm{Re}_\tau \ge 1$) этот результат известен [80, 135, 70, 177].

Более того, использование (2.195) для конечных элементов со степенями многочленов $l \ge k+1$ также приводит к оценке сходимости порядка $\mathcal{O}(h^{k+\frac{1}{2}})$ относительно нормы $|||\cdot|||_b$. Сравнивая с (2.192), можно заметить потерю $\frac{1}{2}$ в порядке сходимости. Этот эффект наблюдается и в численных экспериментах в разделе 2.6.4.

До сих пор мы не делали каких-либо предположений о зависимости решения $\mathbf{u}, p$ от ν. Существующая теория регулярности решений уравнений Навье-Стокса предполагает, что нормы $\|\mathbf{u}\|_{l+1}$ и $\|p\|_l$ имеют одинаковый порядок. Если это так, то пары конечных элементов со степенями $l \ge k+1$ являются более подходящими, чем пары с одинаковыми степенями $l = k$.

2.6.4 Численная иллюстрация.

В этом разделе результаты о сходимости метода SUPG для уравнений Осеена иллюстрированы результатами расчетов. Используется метод конечных элементов и LBB устойчивые пары Тейлора-Худа P_{k+1}/P_k на неструктурированной триангуляции области $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. Далее приведем результаты как для полностью стабилизированной схемы, так и частично.

Рассмотрим два примера. Правая часть $\mathbf{f}$ и условия Дирихле на границе выбираются так, что решением задачи (2.124) являются функции:

$$\mathbf{P1:}\quad \mathbf{u}(x) = (\sin(\pi x_1), -\pi x_2 \cos(\pi x_1))^T, \quad p(x) = \sin(\pi x_1)\cos(\pi x_2)$$

$$\mathbf{P2:}\qquad \mathbf{u}(x) = \Big(1 - h(x_2,\nu),\ 0\Big)^T, \qquad p(x) = \sqrt{\nu}\, x_1 h(x_2,\nu)$$

с $h(x_2,\nu) := \exp\frac{-x_2}{\sqrt{\nu}} + \exp\frac{-(1-x_2)}{\sqrt{\nu}}$. При этом $\mathbf{a}(x) := \mathbf{u}(x)$ и $\alpha = 0$.

Решение **P1** не зависит от ν, в то время, как решение **P2** от ν зависит и имеет экпоненциальный погранслой при $0 < \nu \ll 1$. Полунормы решения **P2**, стоящие в правых частях оценок ошибки, зависят от ν следующим образом: $|\mathbf{u}|_{l+1} \sim \nu^{-\frac{1}{2}(l+\frac{1}{2})},\ |p|_{k+1} \sim \nu^{-\frac{1}{2}(k+\frac{1}{2})}$.

Сначала рассмотрим полностью стабилизированную схему для задачи **P1** и сравним численные результаты в норме $|||\cdot|||_b$ с оценкой из теоремы 2.14. Значения вязкости взяты $\nu = 10^{-2i},\ i \in \{1,2,3,4\}$, а значения параметров стабилизации такие, как в теоремы 2.14. Результаты, показанные на рисунке 2.6 слева, подтверждают независимость оценки от ν и теоретический порядок сходимости. Отметим, что пара элементов P_2/P_1 дает значительно лучшие результаты, чем P_1/P_1, они сравнимы с результатами для P_2/P_2.

Для сравнения справа на рисунке 2.6 показаны результаты сходимости в норме $|||\cdot|||_b$ для стандартного выбора параметров по формуле (2.195). Обратим внимание на падение порядка сходимости в этом случае на $\frac{1}{2}$. Результаты в других нормах обсуждаются далее.

Для схемы с частичной стабилизацией результаты расчетов для задачи **P1** в норме $|||\cdot|||_a$ визуально совпадали с результатами для схемы с полной стабилизацией в норме $|||\cdot|||_b$ и таким образом подтверждали оценки сходимости, полученные в теореме 2.12.

Далее приводятся результаты сходимости для задачи **P1** и схем с полной и частичной стабилизацией в нормах, не зависящих от параметров: $\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|,\ |\mathbf{u}-\mathbf{u}_h|_1,\ \|p-p_h\|$. Результаты даны на рисунках 2.7-2.9.

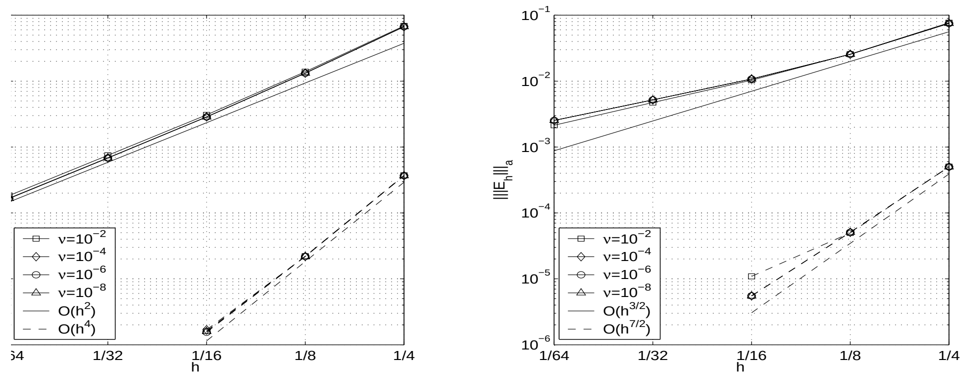

Рис. 2.6: Полностью стабилизированный метод для **P1**. Слева: Выбор параметров (2.191) для P_2/P_1 (сплошная линия), P_4/P_3 (прерывистая линия). Справа: Выбор параметров (2.195) для P_2/P_1 (сплошная линия), P_4/P_3 (прерывистая линия).

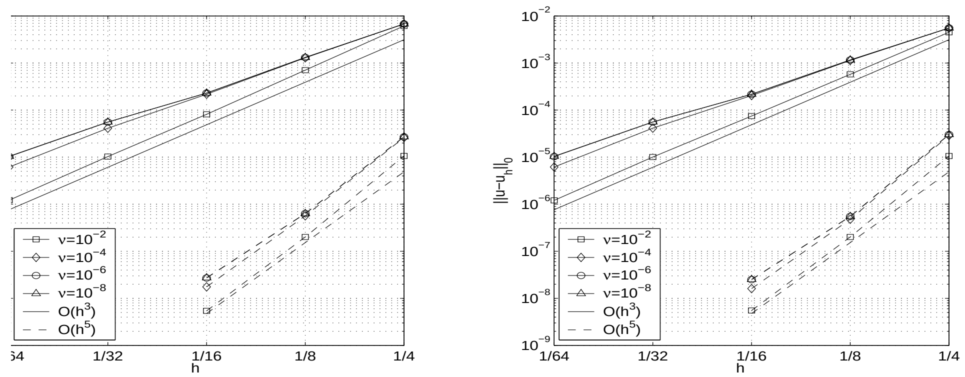

Рис. 2.7: Полностью (слева) и частично (справа) стабилизированный метод для **P1** с P_2/P_1 (сплошная линия) и P_4/P_3 (прерывистая лини): Сходимость $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|$. Выбор параметров (2.191)

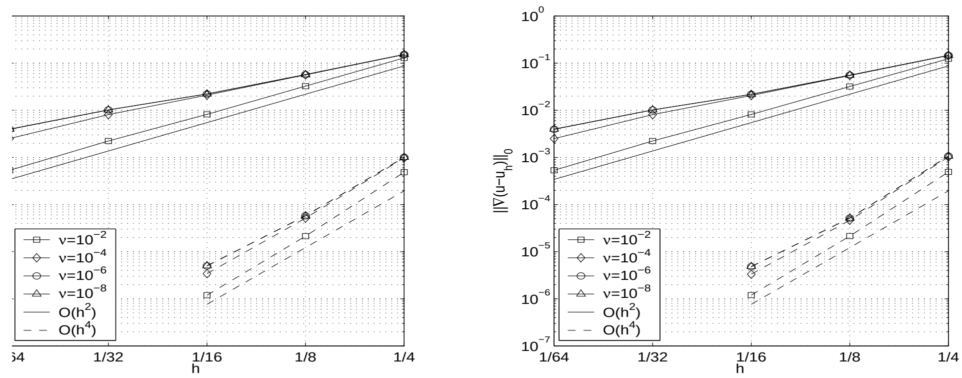

Рис. 2.8: Полностью (слева) и частично (справа) стабилизированный метод для **P1** с P_2/P_1 (сплошная линия) и P_4/P_3 (прерывистая лини): Сходимость $\|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h)\|$. Выбор параметров (2.191)

Относительно результатов на рисунках 2.7-2.9 заметим, что, во-первых, схемы с полной и частично стабилизацией дают практически одинаковые результаты. Во-вторых, наблюдается сходимость порядка h^{k+1} в норме $\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|$, не доказанная нами в работе.

Аналогичные вычисления были проведены с параметрами стабилизации, как в (2.195). В этих экспериментах наблюдалось сокращение на $\frac{1}{2}$ порядка сходимости скоростей в тех же нормах.

Для задачи **P2**, решение которой зависит от ν, теоретический порядок сходимости наблюдается лишь для достаточно малых h: $h \le c\sqrt{\nu}$. Теорема 2.14 для элементов P_{k+1}/P_k даёт оценку

$$|||E_h|||_b \le C\nu^{-\frac{1}{4}}(h\nu^{-\frac{1}{2}})^{k+1}.$$

В численных экспериментах норма $|||E_h|||_b$ остается равномерно ограниченной по ν, см. рис. 2.10 (слева). Схема с частичной стабилизацией показывает аналогичные результаты, рис. 2.10 (справа).

Если рассмотреть поточечную сходимость в скорости (рис. 2.11), то стабилизированные схемы существенно подавляют паразитические осцилляции, которые в методе Галёркина наблюдаются во всей области (если h не достаточно мало). Для стабилизированного метода решение хорошо приближено вне погранслоя. В районе погранслоя наблюдаются

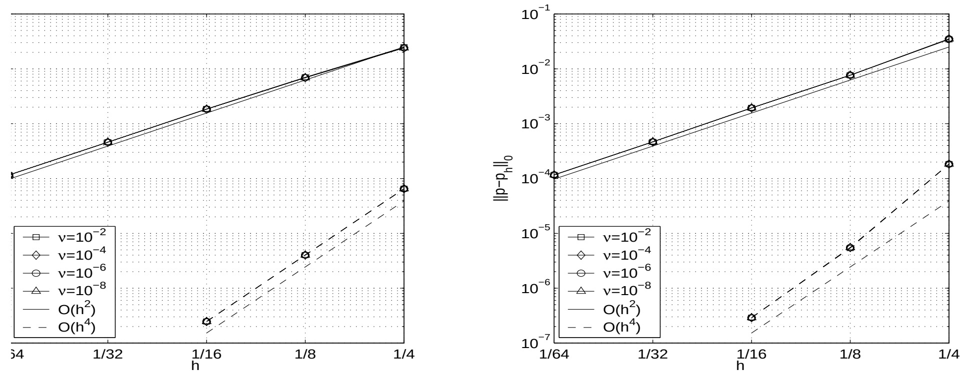

Рис. 2.9: Полностью (слева) и частично (справа) стабилизированный метод для **P1** с P_2/P_1 (сплошная линия) и P_4/P_3 (прерывистая лини): Сходимость $\|p - p_h\|$. Выбор параметров (2.191)

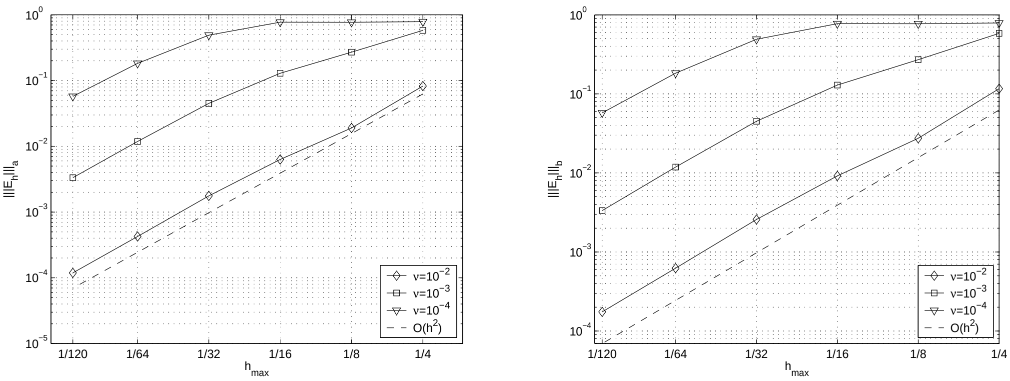

Рис. 2.10: Полностью (слева) и частично (справа) стабилизированный метод с P_2/P_1 и **P2**. Выбор параметров (2.191).

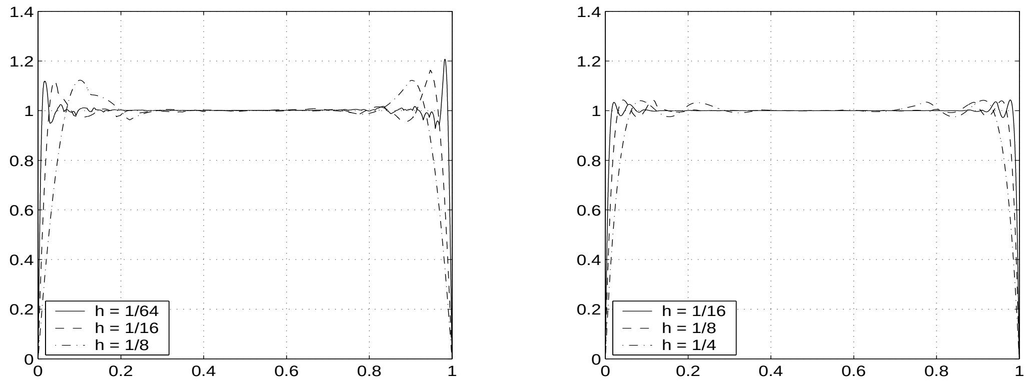

Рис. 2.11: Полностью стабилизированный метод **P2**. Слева: P_2/P_1. Справа: P_4/P_3

ограниченные осцилляции. Хорошо известным фактом является, то что осцилляции около погранслоя быстро угасают с увеличением k. Этот эффект виден на рис. 2.11.

До сих пор мы проводили эксперименты для системы Осеена и $\alpha = 0$. Рассмотрим зависимость ошибки от параметра α. Вычисления были проведены для задачи **P1** с $\alpha \in [10^{-3}, 10^{3}]$ и фиксированным $h_{\max} = \frac{1}{16}$. Правую часть системы мы брали равной $\mathbf{f} + \alpha\mathbf{a}$, т.е. решение оставалось тем же самым. Рассматривая норму $|||\cdot|||_a$, мы видим на рисунке 2.12 картину универсальной сходимости относительно $\alpha \to 0$ и вплоть до умеренных значений. Это подтверждает сделанное предположение, что результат теоремы 2.12 может быть обобщен на случай $\alpha \to 0$.

Изучим вопрос о чувствительности стабилизированных схем к подбору констант в параметрах стабилизации. Значения параметров согласно формулам (2.191) или (2.165) зависят только от конкретного выбора одного параметра ξ. На рисунке 2.13 показана ошибка в норме $|||\cdot|||_b$ для примера **P1** и $h_{max} = \frac{1}{32}$ при использовании параметров $\xi_\tau = \xi = \xi_0$, $\delta_\tau = h_\tau^2/\xi_0$. Значение ξ_0 изменялось. Из данных результатов можно сделать вывод, что выбор (2.191) не прихотлив к выбору конкретных констант в формулах для параметров. Этого нельзя сказать про выбор (2.195), см., например, [150].

Отдельно отметим, что для элементов со степенями многочленов $l \geq$

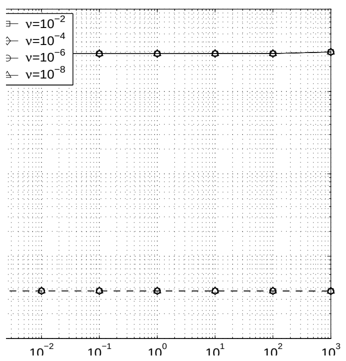

Рис. 2.12: Зависимость от α для **P1** и метода с частичной стабилизацией. P_2/P_1 (сплошная линия), P_4/P_3 (прерывистая линия).

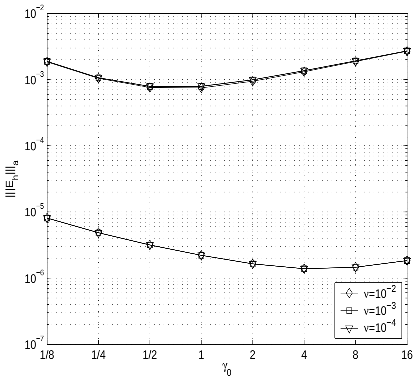

Рис. 2.13: Зависимость от ξ_0 для **P1** и полностью стабилизированной схемы. P_2/P_1 (верх), P_4/P_3 (низ).

$k+1$ роль $\nabla\mathrm{div}$ стабилизации становится больше, чем для элементов одинаковых степеней. Как и в случае задачи Стокса такая стабилизация служит для подавления неустойчивости, происходящей из большого значения градиента в уравнении моментов в (2.124).

2.7 Система Навье-Стокса.

2.7.1 Пример дискретизации.

Стабилизированные схемы для системы Осеена естественным образом обобщаются на нелинейную задачу Навье-Стокса. В этом случае параметры стабилизации могут зависеть от решения. Так, например, метод конечных элементов для уравнения Навье-Стокса в конвективной форме имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\nu(\nabla\mathbf{u}_h,\nabla\mathbf{v}_h)+(\mathbf{u}_h\cdot\nabla\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h)-(p_h,\operatorname{div}\mathbf{v}_h)+(q_h,\operatorname{div}\mathbf{u}_h)\\
&+\sum_{\tau\in T_h}\sigma(\tau,\mathbf{u}_h)(-\nu\Delta\mathbf{u}_h+\mathbf{u}_h\cdot\nabla\mathbf{u}_h+\nabla p_h-\mathbf{f},\mathbf{u}_h\cdot\nabla\mathbf{v}_h+\delta\nabla q_h)_\tau \qquad (2.196)\\
&+\xi(\operatorname{div}\mathbf{u}_h,\operatorname{div}\mathbf{v}_h)=(\mathbf{f},\mathbf{v}_h),\quad \forall\,\mathbf{v}_h\in\mathbf{V}_h,\,q_h\in\mathbb{Q}_h,\quad \delta=\{0,1\}.
\end{aligned}$$

Анализ стабилизированных методов конечных элементов для нелинейных уравнений очень техничен. Автору, пожалуй, известна только работы [44, 97], где анализируются схемы со стабилизацией давления для уравнений Навье-Стокса. В данном разделе стабилизированные схемы из предыдущего раздела будут испробованы для численного решения уравнений Навье-Стокса.

2.7.2 Примеры расчетов.

Задача о движущейся каверне

Одной из стандартных задач для тестирования численных методов для уравнений Навье-Стокса является задача о движущейся каверне. Уравнения (1.145) рассматриваются в области $\Omega = (0,1)^2$ с правой частью $\mathbf{f} = (0,0)^T$ и краевыми условиями: $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = (1,0)^T$, если $x_2 = 1$ и $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = (0,0)^T$, если $x_2 < 1$. Задача считается достаточно простой. Однако, имеет некоторые особенности. Во-первых, сингулярность решения в верхних углах, в силу разрывных краевых условий. Границы втекания и вытекания отсутствуют. Поле скоростей имеет внутренние слои при больших числах Рейнольдса. В литературе имеется много работ для сравнения, где приводятся результаты расчетов для различных методов дискретизации, в том числе для метода конечных элементов. Типичными числами Рейнольдса, для которых можно найти результаты расчетов, являются $\mathrm{Re} \in \{100, 400, 1.000, 3.200, 5000, 7.500, 10.000\}$. Для данной конфигурации численно найдена первая точка бифуркации Хопфа: $\mathrm{Re} \approx 8.018$, см. [28].

В этом параграфе приведены отдельные результаты расчетов для $\mathrm{Re} = 400, 1000, 5000, 7200$ для стабилизированного метода конечных элементов с различными аппроксимациями поля скоростей и давления. Отметим следующие особенности и выводы.

- Стабилизированные методы конечных элементов высокого порядка на достаточно грубой сетке дают сравнимые результаты с методом конечных разностей на существенно более мелкой сетке (табл. 2.7.2, 2.7.2).

- Добавление $\nabla\mathrm{div}$ стабилизации улучшает решение (табл. 2.7). Однако, для данной конфигурации $\nabla\mathrm{div}$ стабилизация более важна при использовании вихревой формы уравнения (см. рис. 2.14). Данный эффект связан с тем, что градиент давления Бернулли играет

Таблица 2.7: Положения центра и макс. значения ф. тока главного вихря, $\mathrm{Re} = 400$, конвективная форма, P_2isoP_1/P_0. ξ – параметр $\nabla\mathrm{div}$ стабилизации

	$h = 1/32$			$h = 1/128$	Ref. [83]
	значение ξ				
	0	0.2	1.0	0.2	
$\phi(x, y)$	-0.0896	-0.0974	-0.0857	-0.1102	-0.1139
x	0.578	0.562	0.594	0.559	0.555
y	0.625	0.609	0.625	0.607	0.606

более важную роль в уравнении моментов для данной задачи, чем градиент кинематического давления (см. рис. 2.15).

- Для вихревой формы необходимость первого стабилизирующего члена не обнаружена, т.е. $\sigma(\tau, \mathbf{u}_h) = 0$ для вихревой формы являлось наилучшим выбором.

- Точность решений (при правильной стабилизации) у вихревой и конвективной форм сравнимы. В частности, для рассмотренного далее случая $\mathrm{Re} = 5000$ и P_2isoP_1/P_0 конечных элементов вихревая форма дает немного более точное решение.

- Для конвективной формы и конечных элементов высокого порядка, т.е P_2/P_1 и P_4/P_3, полностью и частично стабилизированные схемы дают практически одинаковые результаты (табл. 2.7.2, 2.7.2).

Оговоримся: нельзя исключать, что при расчете других течений численные эксперименты могут показать отличные результаты в плане сравнения различных форм системы и методов стабилизации. Далее расчеты проводились еще для задачи “течение за ступенькой”. Они проводят к схожим заключениям.

Задача о течении за ступенькой

Другим стандартным тестом для стационарных уравнений Навье-Стокса является задача о течении в канале за ступенькой. На рисунке 2.17 показана, так называемая, “h:H =1:2” конфигурация, где H – высота канала, h – высота ступеньки. На границе втекания Γ_{in} задаётся параболический

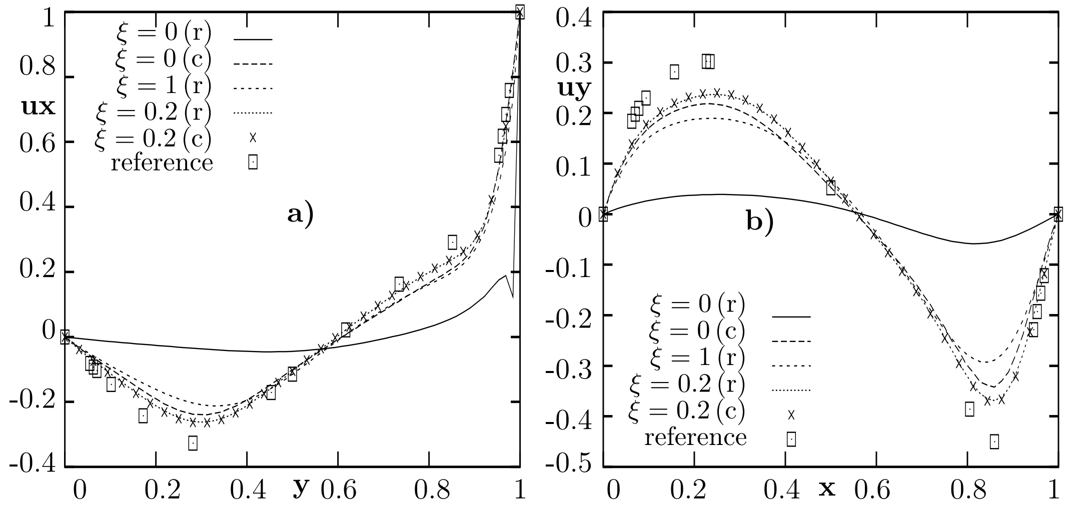

Рис. 2.14: a) Значения $u_1(0.5, x_2)$, Re = 400, h=1/32; b) Значения $u_2(x_1, 0.5)$, Re = 400, h=1/32; (c) – конвективная форма, (r) – вихревая форма. P_2isoP_1/P_0.

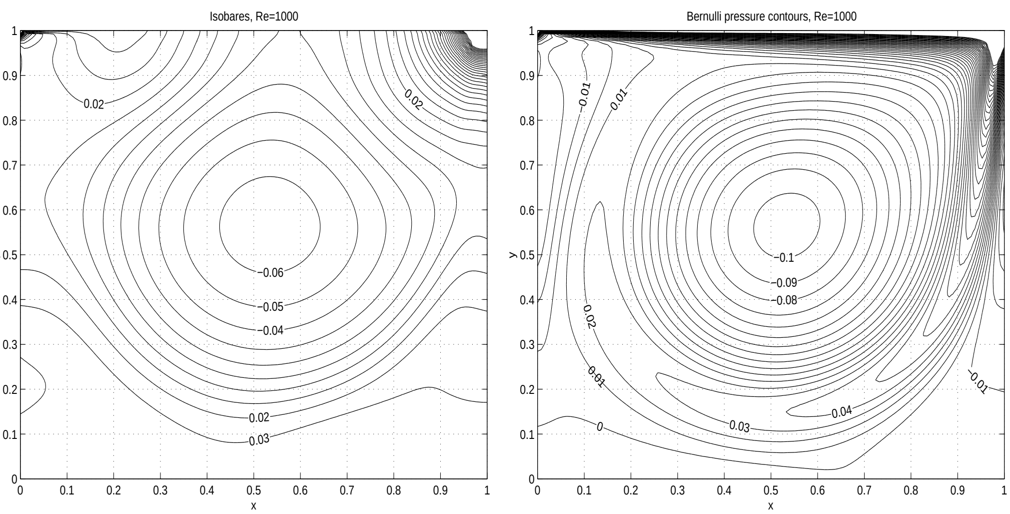

Рис. 2.15: Равномерно распределенные на [-0.2,0.3] изолинии кинематического давления (слева) и давления Бернулли (справа) Re = 1000, h=1/128, P_2isoP_1/P_0.

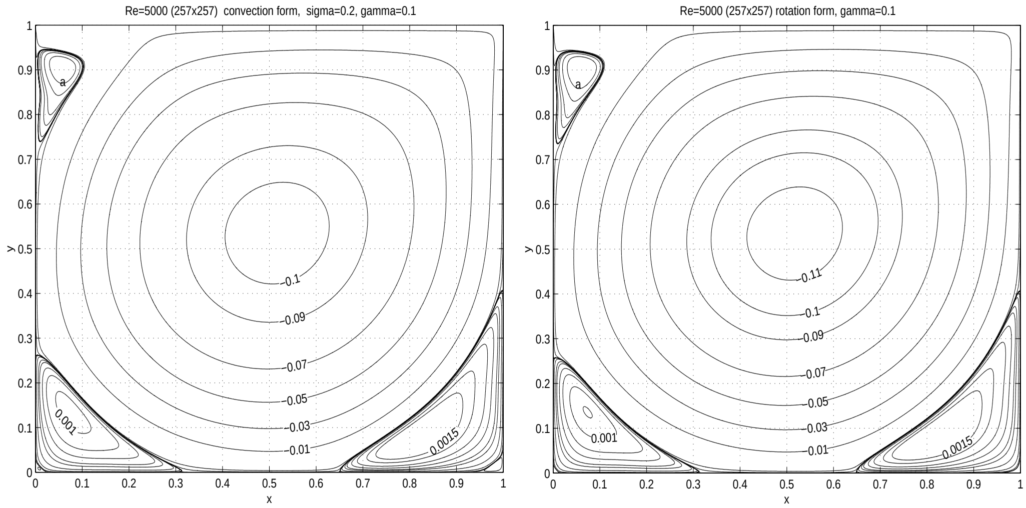

Рис. 2.16: Избранные изолинии функции тока Re = 5000, h=1/256. Показаны изолинии со значениями, как в [83]. Слева решение для конвективной формы, полностью стаб. схема. Справа решение для вихревой формы, добавлена только ∇div -стабилизация. Значение для изолинии a в верхнем лево углу равно $5{\cdot}10^{-4}$. Элементы $P_2 iso P_1/P_0$.

Источник	Метод	Ψ	x_1	x_2
a)$_1$ полн. стаб. схема	FE P_2/P_1, $h_{max} = 1/96$	0.1177	0.5129	0.5337
a)$_2$ част. стаб. схема	FE P_2/P_1, $h_{max} = 1/96$	0.1176	0.5129	0.5337
b) част. стаб. схема	FE P_4/P_3, $h_{max} = 1/32$	0.1151	0.5166	0.5310
c) Ref. [114]	FD , $h = 1/512$	0.1153	0.5137	0.5321
d) Ref. [83]	FD , $h = 1/256$	0.1200	0.5117	0.5322

Таблица 2.8: Движущаяся каверна при Re = 7.500. Положения центра и макс. значения ф. тока главного вихря

Источник/метод	u_1^{min}	x_2^{min}	u_2^{max}	x_1^{max}	u_2^{min}	x_1^{min}
a)$_1$ полн. стаб. $P_2/P_1,\ h = 1/96$	-0.4322	0.0620	0.4343	0.0685	-0.5535	0.9638
a)$_2$ част. стаб. $P_2/P_1,\ h = 1/96$	-0.4322	0.0620	0.4343	0.0685	-0.5535	0.9638
b) част. стаб. $P_4/P_3,\ h = 1/32$	-0.4213	0.0628	0.4225	0.0694	-0.5396	0.9639
c) Ref. [114] FD, $h = 1/512$	-0.4266	0.0625	0.4274	0.0684	-0.5455	0.9648
d) Ref. [83] FD, $h = 1/256$	-0.4359	0.0625	0.4403	0.0703	-0.5522	0.9609

Таблица 2.9: Движущаяся каверна при Re = 7.500. Миним. значение $u_1(0.5, x_2)$, миним. и макс. значение $u_2(x_1, 0.5)$

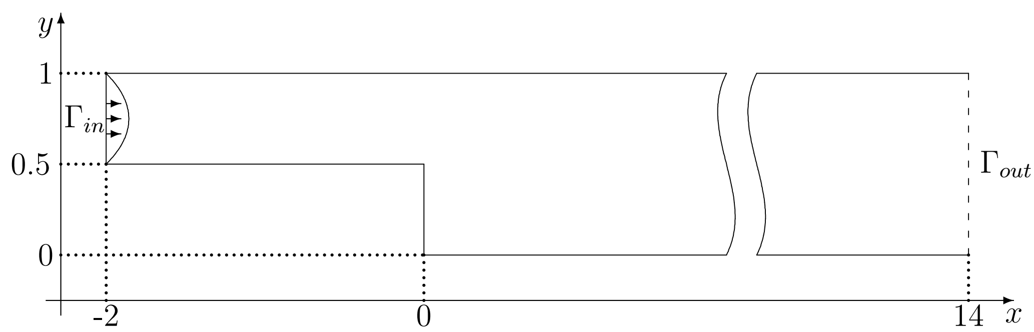

Рис. 2.17: Конфигурация задачи о течении за ступенькой.

профиль скорости (условия Дирихле). На границе вытекания Γ_{out}, как правило, задаются естественные краевые условия (заметим, что условия Дирихле на границе вытекания имеют выраженное влияние вверх по течению, см., например, [182]). В случае метода конечных элементов типичным выбором являются краевые условия “do-nothing” [61], которые для сильной формы записи уравнений соответствуют равенству нулю тензора напряжений на границе. На остальной границе области задаются нулевые краевые условия на вектор скорости.

Характерная скорость задаётся, как

$$U = \frac{1}{|H-h|} \int_{\Gamma_{in}} u_1(-2, y)\, \mathrm{d}y.$$

Число Рейнольдса, как $Re = \frac{UH}{\nu}$. Большое количество результатов численных экспериментов можно найти в литературе. Для трехмерной задачи известны также экспериментальные данные [27]. Известно, что двухмерное стационарное течение остаётся устойчивым, по крайней мере, до значения числа Рейнольдса равного 800 [88].

Общая структура решения показана на рисунке 2.18. Характерными значениями при сравнении результатов расчетов различными методами являются: координаты центра нижнего вихря, x- координата “reattachment” точки для нижнего вихря (т.е. точки на нижней стенке канала, где нулевая линия тока достигает границы), левая и правая точка отделения для верхнего вихря.

Расчеты течения за ступенькой мы проводили только для конвективной формы уравнений. Причиной являлось то, что естественные краевые условия на границе вытекания не подходят при использовании вариационной формулировки, основанной на вихревой форме записи уравнения. Соответствующие краевые условия для сильной (классической) формулировки не выполняются для течения Пуазеля. Мы не ставили целью в данной работе найти подходящие краевые условия на границе вытекания для вихревой формы.

Результаты расчетов показаны в таблице 2.10. Сетка при расчетах методом конечных элементов бралась (квази)равномерной. Сравнение дается с результатами других авторов, полученными методом конечных разностей на равномерной сетке [82], методом конечных разностей на сетке со сгущением (всего около 280000 неизвестных) и экстраполяцией по Ричердсону в [114], и спектральным методом в [102]. Нестабилизиро-

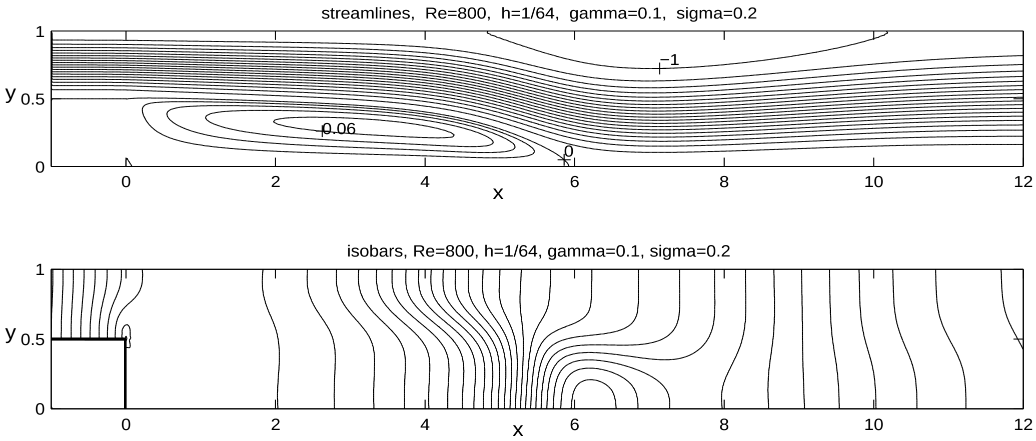

Рис. 2.18: Течение за ступенькой при Re = 800, h=1/64. Избранные линии тока и равномерно распределенные на [-1,0] изолинии кинематического давления. Полностью стабилизированный метод для конвективной формы. P_2isoP_1/P_0.

ванный метод конечных элементов (результаты в таблице не показаны) даёт худшую точность.

2.8 Выводы

В этой главе были рассмотрены методы конечных элементов для уравнений и систем уравнений в частных производных, представленных в главе 1. Как уже отмечалось, эти уравнения возникают, в частности, в приложениях, связанных с моделированием движения жидкостей и газов, и имеют особенности при стремлении некоторых физических или численных параметров к своим критическим значениям. Используя априорные оценки предыдущей главы, выше были доказаны оценки сходимости для конечно-элементных решений, в которых особое внимание уделено не только зависимости от значения параметра разбиения h, но и зависимости "констант" от других параметров, характеризующих задачу. Более того, в тех случаях, когда стандартный метод Галеркина конечных элементов известен как неустойчивый, были рассмотрены стабилизированные методы конечных элементов. Часть доказанных оценок будет необ-

Источник	Метод	(x_c, y_c)	r_1	r_2	r_3
Полн. стаб.	FE P_2/P_1, $h_{max} = 1/32$	$(3.40, 0.30)$	6.10	4.86	10.48
Част. стаб.	FE P_2/P_1, $h_{max} = 1/32$	$(3.40, 0.30)$	6.10	4.86	10.48
Полн. стаб.	FE $P_2 iso P_1/P_0$, $h = 1/64$	$(3.32, 0.30)$	5.94	4.85	10.21
Ref. [82]	FD, $h_{max} = 1/40$	$(3.35, 0.30)$	6.10	4.85	10.48
Ref. [114]	FD, Extrapol.	$(3.40, 0.30)$	6.09	4.82	10.47
Ref. [102]	Spectr. element	$(3.39, 0.31)$	6.10	4.85	10.48

Таблица 2.10: Численные результаты расчетов течения за ступенькой при $Re = 800$. (x_c, y_c) – координаты центра нижнего вихря, r_1 – координата “reattachment” точки для нижнего вихря, r_2 – левая точка отделения для верхнего вихря , r_3 – правая точка отделения для верхнего вихря.

ходима в следующей главе для доказательства свойства аппроксимации в теории многосеточных методов. Для задач седлового типа были доказаны равномерные по соответствующим параметрам и шагу сетки условия устойчивости типа inf-sup неравенств. Эти оценки послужат далее для обоснования универсальности по параметрам блочных переобуславливателей для соответствующих матриц систем алгебраических уравнений. Теоретические результаты главы проиллюстрированы данными численных экспериментов.

Глава 3

Анализ итерационных методов

3.1 Многосеточные методы

Предположим, что задана система вложенных конечно-элементных пространств

$$\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{V}_1 \subset \cdots \subset \mathbb{V}_k \subset \cdots \subset \mathbb{V}_l \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega)$$

с регулярным[1] измельчением сетки и кусочно-полиномиальными, степени не выше r, функциями $v_k \in \mathbb{V}_k$. Предположим, что соответствующий параметр дискретизации удовлетворяет условию:

$$c_0 2^{-k} \leq \frac{h_k}{h_0} \leq c_1 2^{-k},$$

c_0, c_1 не зависят от k.

В пространстве $\mathbb{V}_k$ рассмотрим стандартный нодальный базис $\{\phi_i\}$ для $1 \leq i \leq N_k$ и изоморфизм между пространством конечно-элементных функций и пространством коэффициентов:

$$P_k : \mathbb{X}_k := \mathbb{R}^{N_k} \to \mathbb{V}_k, \quad P_k x = \sum_{i=1}^{N_k} x_i \phi_i.$$

На $\mathbb{X}_k$ мы используем скалярное произведение с весом

$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle_k = h_k^d \sum_{i=1}^{N_k} x_i y_i \quad \text{для } \Omega \subset \mathbb{R}^d$$

[1]Оценка снизу на наименьший угол триангуляции является равномерной относительно k.

и соответствующую ему норму $\|\cdot\|$. Сопряжённый оператор $P_k^*: \mathbb{V}_k \to \mathbb{X}_k$ задаётся равенством $(P_k\mathrm{x}, v) = \langle \mathrm{x}, P_k^* v\rangle_k$ для всех $\mathrm{x} \in \mathbb{X}_k,\ v \in \mathbb{V}_k$. Имеет место эквивалентность нормировок:

$$C^{-1}\|\mathrm{x}\| \le \|P_k\mathrm{x}\| \le C\|\mathrm{x}\| \quad \forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{X}_k, \tag{3.1}$$

с константой C, не зависящей от k. Матрицу жесткости на сеточном уровне k обозначим A_k. В большинстве рассматривемых далее методах (но не во всех!) A_k определяется из соотношения:

$$\langle A_k\mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle_k = a(P_k\mathrm{x}, P_k\mathrm{y}) \quad \forall\ \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{X}_k. \tag{3.2}$$

Операторы проекции и продолжения в многосеточном методе всегда будут выбираться каноническим образом:

$$\begin{aligned} &p_k: \mathbb{X}_{k-1} \to \mathbb{X}_k, \quad p_k = P_k^{-1}P_{k-1} \\ &r_k: \mathbb{X}_k \to \mathbb{X}_{k-1}, \quad r_k = P_{k-1}^*(P_k^*)^{-1} = \left(\tfrac{h_k}{h_{k-1}}\right)^d p_k^T. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Последняя компонента многосеточного метода - это сглаживающие итерации на каждом уровне. Пусть $W_k: \mathbb{X}_k \to \mathbb{X}_k$ – обратимые матрицы. Мы рассматриваем сглаживающие итерации вида

$$\mathrm{x}^{\mathrm{new}} = \mathrm{x}^{\mathrm{old}} - W_k^{-1}(A_k\mathrm{x}^{\mathrm{old}} - b), \quad \text{для } \mathrm{x}^{\mathrm{old}}, b \in \mathbb{X}_k$$

с матрицей итерации

$$S_k = I - W_k^{-1}A_k. \tag{3.4}$$

При данных натуральных ν и μ, число пред-сглаживающих и пост-сглаживающих итераций на каждом уровне, и ξ, число рекурсивных вызовов метода на каждом сеточном уровне (кроме 0-ого), одна итерация многосеточного метода решения системы $A_l\mathrm{z} = \mathrm{f}$ определяется рекурсивной процедурой $\mathrm{z}^{new} = MGM(l, \mathrm{z}^{old}, \mathrm{f})$. Здесь z^{old} – начальной приближение к z, z^{new} – полученное новое приближение. Сама процедура описана ниже.

$\bar{\mathrm{z}} = MGM(k, \mathrm{z}, \mathrm{b})\{$

Если $k = 0$, то

0. $\bar{\mathrm{z}} = A_0^{-1}\mathrm{b}$ (точное решение на самой грубой сетке), далее выход из процедуры;

Иначе $(k > 0)$

1. $\mathrm{z}^0 = \mathrm{z}, \mathrm{z}^{i+1} = \mathrm{z}^i - W_k^{-1}(A_k\mathrm{z}^i - \mathrm{b})$, $i = 0, \ldots, \nu-1$ (ν пред-сглаживаний);
2. $\mathrm{d} = r(A_k\mathrm{z}^\nu - \mathrm{b})$ (проектирование невязки на грубую сетку);
3. $\mathrm{y}^0 = 0$ (начальное приближение к ошибке);
4. Выполняем $\mathrm{y}^{i+1} = MGM(k-1, \mathrm{y}^i, \mathrm{d})$ для $i = 0, \ldots, \gamma - 1$
   (γ итераций многосеточного метода на грубой сетке)
5. $\mathrm{z}^0 = \mathrm{z}^\nu - p\,\mathrm{y}^\gamma$ (коррекция с грубой сетки)
6. $\mathrm{z}^{i+1} = \mathrm{z}^i - W_k^{-1}(A_k\mathrm{z}^i - \mathrm{b})$, $i = 0, \ldots, \mu - 1$ (μ пост-сглаживаний);
7. $\bar{\mathrm{z}} = \mathrm{z}^\mu$

}

Одно выполнение процедуры $\mathrm{z}^{new} = MGM(l, \mathrm{z}^{old}, \mathrm{f})$ является одной итерацией многосеточного метода. Всего выполняют заданное количество итераций или пока норма невязки $\|A_h\mathrm{z}^{new} - \mathrm{f}\|$ не станет меньше заданного ε.

Пример итераций:
1. $\mathrm{z}^{old} = 0$;
2. Пока $\|A_h\mathrm{z}^{old} - \mathrm{f}\| \geq \varepsilon$ выполнять: $\mathrm{z}^{new} = MGM(l, \mathrm{z}^{old}, \mathrm{f})$, $\mathrm{z}^{old} = \mathrm{z}^{new}$.

Практика показала, что разумно выбирать $\gamma = 1$ или $\gamma = 2$. При $\gamma = 1$ одна итерация метода получила название V-цикл, а при $\gamma = 2$ W-цикл.

Матрица итераций многосеточного метода записывается с помощью рекурсивного соотношения (см., например, [94]):

$$\begin{aligned} M_0(\nu,\mu) &= 0, \\ M_k(\nu,\mu) &= S_k^\nu \left(I - p_k(I - M_{k-1}^\gamma)A_{k-1}^{-1}r_kA_k\right) S_k^\mu, \quad k = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

3.1.1 Вспомогательные леммы для свойства сглаживания

В ведении обсуждалось, что "свойство сглаживания", необходимое для доказательства сходимости многосеточного метода, представляет из себя специальную оценку на норму матрицы сглаживающих итераций. Для проверки этого свойства нам понадобится ряд простых лемм из линейной алгебры. В симметричном случае стандартным инструментом для проверки свойства сглаживания является:

Лемма 3.1 ([93]). *Пусть матрица B такая, что $0 \leq B = B^T \leq I$, тогда*

$$\|B(I-B)^{\nu}\| \leq \frac{1}{e(1+\nu)} \quad \forall\, \nu \geq 0. \tag{3.5}$$

Напомним, что сглаживания в многосеточном методе имеют вид базовых итераций:

$$W(\mathrm{x}^{i+1}-\mathrm{x}^{i}) = \mathrm{b} - A\,\mathrm{x}^{i}, \quad i = 0,1,2,\ldots. \tag{3.6}$$

Следующая лемма показывает, что если матрица W подобрана удачно (т.е. норма матрицы $A-W$ мала), то константа из свойства сглаживания, "спрятанная" в соотношении $\eta(\nu) = O(\nu^{-1})$, для функции η, (см. стр. 13), убывает пропорционально $\|A-W\|$.

Лемма 3.2 ([158]). *Пусть $A = A^T > 0$, $W = W^T > 0$, рассмотрим разложение $A = W - N$ и матрицу итераций $S = I - W^{-1}A = W^{-1}N$. Предположим, что для некоторых $\alpha > 2$ и $\delta > 0$ выполнено*

$$\begin{aligned} A+\alpha N &\geq 0, && (3.7)\\ \|N\| &\leq \delta, && (3.8)\\ \|S\| &\leq C_s, && (3.9) \end{aligned}$$

тогда

$$\|A\,S^{\nu}\| \leq C_s\delta \max\left\{\frac{1}{\nu-1}, (1+\frac{1}{\alpha-1})(\alpha-1)^{2-\nu}\right\} \quad \nu = 2,3,\ldots. \tag{3.10}$$

В случае, если A или $W-$ несимметричные матрицы, то леммы 3.1 и 3.2 не подходят, для проверки слаживающего свойства базовых итераций. Так обстоят дела, если для сглаживаний, например, используется метод Гаусса - Зейделя (не симметричный) или метод SOR.

В несимметричном случае подходящим инструментом может служить следующая лемма и следствие из нее.

Лемма 3.3 ([130]). *Пусть для матрицы $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ выполнено $\|B\| \leq 1$ в некоторой операторной норме. Тогда в той же норме справедливо*

$$\|(I-B)(I+B)^{\nu}\| \leq 2^{\nu+1}\sqrt{\frac{2}{\pi\nu}}, \qquad \nu = 1,2,3,\ldots. \tag{3.11}$$

Доказательство леммы можно также прочесть в [131, 94]. Следствием леммы является теорема, устанавливающая сглаживающее свойство для итерационного метода (3.6) с матрицей итераций

$$S = I - W^{-1}A.$$

Полагая в лемме 3.3 $B = I - 2W^{-1}A$ и проверяя, что при таком выборе

$$\|AS^\nu\| = \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu+1} \|W(I-B)(I+B)^\nu\|,$$

получаем следующую теорему.

Теорема 3.1. *Предположим, что в некоторой норме выполнено*

$$\|I - 2W^{-1}A\| \le 1 \tag{3.12}$$

$$\|W\| \le C\|A\|, \tag{3.13}$$

тогда справедливо сглаживающее свойство

$$\|AS^\nu\| \le C\sqrt{\frac{2}{\pi\nu}}\|A\|. \tag{3.14}$$

Нам понадобится еще один простой результат о сходимости базового итерационного метода.

Лемма 3.4. *Рассмотрим матрицы* $C, A, W \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, причём* C *– симметричная положительно определённая. Предположим существование констант* $c_0 > 0,\ c_1$ *таких, что*

$$c_0\langle A\mathrm{y}, A\mathrm{y}\rangle_C \le \langle W\mathrm{y}, W\mathrm{y}\rangle_C \le c_1\langle W\mathrm{y}, A\mathrm{y}\rangle_C \quad \forall\ \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n. \tag{3.15}$$

Тогда с произвольным $d \in [0,1]$ *имеют место оценки*

$$\|I - \alpha\frac{c_0}{c_1}AW^{-1}\|_C \le \sqrt{1 - d\frac{c_0}{c_1^2}} \qquad \text{если}\ \ 1-\sqrt{1-d} \le \alpha \le 1+\sqrt{1-d}$$

Доказательство. Пусть $D := AW^{-1}$. Из (3.15) получаем

$$\langle D\mathrm{y}, \mathrm{y}\rangle_C \ge c_1^{-1}\langle \mathrm{y}, \mathrm{y}\rangle_C\ , \quad \langle D\mathrm{y}, D\mathrm{y}\rangle_C \le c_0^{-1}\langle \mathrm{y}, \mathrm{y}\rangle_C \quad \forall\ \ \mathrm{y}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\|(I - \alpha\frac{c_0}{c_1}AW^{-1})\mathrm{y}\|_C^2 &= \langle \mathrm{y}, \mathrm{y}\rangle_C - 2\alpha\frac{c_0}{c_1}\langle D\mathrm{y}, \mathrm{y}\rangle_C + \alpha^2\frac{c_0^2}{c_1^2}\langle D\mathrm{y}, D\mathrm{y}\rangle_C \\ &\le \big(1 - 2\alpha\frac{c_0}{c_1^2} + \alpha^2\frac{c_0}{c_1^2}\big)\|\mathrm{y}\|_C^2 = \big(1 - (2\alpha-\alpha^2)\frac{c_0}{c_1^2}\big)\|\mathrm{y}\|_C^2\end{aligned}$$

и $2\alpha - \alpha^2 \ge d$ если $1-\sqrt{1-d} \le \alpha \le 1+\sqrt{1-d}$. □

3.2 Уравнения реакции-диффузии.

Для нахождения решения системы (2.4) рассмотрим V- и W-циклы многосеточного метода. Матрица жёсткости на каждом уровне задаётся соотношением (3.2). Докажем простую лемму.

Лемма 3.5. *Пусть* A_k *– матрица жёсткости из* (3.2) *для билинейной формы из* (2.4) *и* $D_k := \mathrm{diag}(A_k)$. *Неравенства*

$$c_1(\frac{\varepsilon}{h_k^2}+1) \le \|A_k\| \le c_2(\frac{\varepsilon}{h_k^2}+1) \tag{3.16}$$

$$\|D_k^{-1}\| \le \frac{c_3}{\|A_k\|} \tag{3.17}$$

выполняются с константами $c_i > 0$, *не зависящими от* ε *и* k.

Доказательство. Пусть e_i – i-ый базисный вектор из $\mathbb{X}_k$. Тогда

$$\begin{aligned}(A_k)_{ii} &= \frac{< A_k e_i, e_i >_k}{< e_i, e_i >_k} = h_k^{-d} a(\phi_i, \phi_i) \\ &\ge h_k^{-d}(\varepsilon |\phi_i|_1^2 + d_0\|\phi_i\|^2) \ge c_1(\frac{\varepsilon}{h_k^2}+1)\end{aligned} \tag{3.18}$$

с константой c_1, не зависящей от ε и k. Оценка снизу в (3.16) следует из (3.18) и $\|A_k\| \ge (A_k)_{ii}$. Используя обратное неравенство, мы получаем

$$\begin{aligned}< A_k x, x >_k &= a(P_k x, P_k x) \le \varepsilon |P_k x|_1^2 + d_1 \|P_k x\|^2 \\ &\le c(\frac{\varepsilon}{h_k^2}+1)\|P_k x\|^2 \le c_2(\frac{\varepsilon}{h_k^2}+1)\|x\|^2 ,\end{aligned}$$

следовательно, оценка сверху в (3.16) имеет место. Благодаря (3.18) и (3.16) получаем

$$\|D_k^{-1}\| = (\min_i (A_k)_{ii})^{-1} \le c_1^{-1}(\frac{\varepsilon}{h_k^2}+1)^{-1} \le \frac{c_2}{c_1}\|A_k\|^{-1},$$

что доказывает оценку в (3.17). □

3.2.1 Свойство аппроксимации.

Далее в главе под термином "свойство аппроксимации"понимаются специальные оценки нормы разности для матриц A_k^{-1} и A_{k-1}^{-1} (см. стр. 13). Эти оценки базируются на теоремах о сходимости метода конечных элементов из предыдущей главы.

Теорема 3.2. *Пусть* A_k *– матрица жёсткости из* (3.2) *для билинейной формы из* (2.4) *и* p_k, r_k *– операторы продолжения и проекции, как в* (3.3). *Выполняются следующие оценки с константой* c*, не зависящей от* ε *и* k*:*

$$\|A_k^{-1} - p_k A_{k-1}^{-1} r_k\| \le c \min\left\{1, \frac{h_k^2}{\varepsilon}\right\} \le c\|A_k\|^{-1}$$

Доказательство. Возмём $\mathrm{y}_k \in \mathbb{X}_k$. Константы c, которые появляются в доказательстве, не зависят от y_k, k или ε. Пусть $w \in \mathbb{V}$, $w_k \in \mathbb{V}_k$, и $w_{k-1} \in \mathbb{V}_{k-1}$ такие, что

$$\begin{aligned} a(w,v) &= ((P_k^*)^{-1}\mathrm{y}_k, v) \quad \forall\, v \in \mathbb{V}, \\ a(w_k,v) &= ((P_k^*)^{-1}\mathrm{y}_k, v) \quad \forall\, v \in \mathbb{V}_k, \\ a(w_{k-1},v) &= ((P_k^*)^{-1}\mathrm{y}_k, v) \quad \forall\, v \in \mathbb{V}_{k-1}. \end{aligned}$$

Полагая $f = (P_k^*)^{-1}\mathrm{y}_k \in \mathbb{L}_2(\Omega)$ в лемме 2.1, мы получаем

$$\|w - w_l\| \le c \min\left\{1, \frac{h_l^2}{\varepsilon}\right\} \|(P_k^*)^{-1}\mathrm{y}_k\| \quad \text{для } l \in \{k-1, k\}.$$

В силу $h_{k-1} \le c h_k$ это влечёт

$$\|w_k - w_{k-1}\| \le c \min\left\{1, \frac{h_k^2}{\varepsilon}\right\} \|(P_k^*)^{-1}\mathrm{y}_k\|.$$

Из (3.2) и (3.3) следует, что $w_k = P_k A_k^{-1}\mathrm{y}_k$ и $w_{k-1} = P_{k-1}A_{k-1}^{-1} r_k \mathrm{y}_k$. Таким образом, используя (3.1), получаем

$$\begin{aligned} \|(A_k^{-1} - p_k A_{k-1}^{-1} r_k)\mathrm{y}_k\| &\le c\|P_k A_k^{-1}\mathrm{y}_k - P_{k-1}A_{k-1}^{-1} r_k \mathrm{y}_k\| = c\|w_k - w_{k-1}\| \\ &\le c \min\left\{1, \frac{h_k^2}{\varepsilon}\right\} \|(P_k^*)^{-1}\mathrm{y}_k\| \\ &\le c \min\left\{1, \frac{h_k^2}{\varepsilon}\right\} \|\mathrm{y}_k\|, \end{aligned}$$

что доказывает первое неравенство из утверждения теоремы. Второе неравенство следует из леммы 3.5 и $\min\{1, \alpha\} \le 2(1 + \frac{1}{\alpha})^{-1}$ для $\alpha > 0$. $\square$

3.2.2 Свойство сглаживания для базовых итераций.

В качестве сглаживаний рассмотрим метод Якоби (с параметром) и симметричный метод Гаусса-Зейделя. Если мы разложим A_k, как $A_k = D_k - L_k - L_k^T$, где D_k – диагональная часть, L_k – строго нижне-треугольная. Матрица итераций этих сглаживаний имеет вид (3.4), где

$$W_k = \omega^{-1} D_k, \quad \omega \in (0,1), \quad \text{и } W_k = (D_k - L_k) D_k^{-1} (D_k - L_k^T).$$

Из леммы 3.5 мы получаем $\|D_k^{-1} A_k\| \le \|D_k^{-1}\| \|A_k\| \le c_3$. В методе Якоби мы выбираем некоторое $\omega \le 1$ $(0 < \omega \le \frac{1}{c_3})$, ω не зависит от ε и k такое, что выполнено $\rho(\omega D_k^{-1} A_k) \le 1$. Заметим, что в случае симметричного метода Гаусса-Зейделя

$$W_k = (D_k - L_k) D_k^{-1} (D_k - L_k^T) = A_k + L_k D_k^{-1} L_k^T \ge A_k \ .$$

Следовательно, как в случае метода Якоби, так и симметричного метода Гаусса-Зейделя, получаем

$$\sigma(W_k^{-1} A_k) \subset (0,1]. \tag{3.19}$$

Лемма 3.6. *Как для метода Якоби, так и для симметричного метода Гаусса-Зейделя неравенство*

$$\|W_k\| \le c \|A_k\|$$

выполняется с константой c, не зависящей от ε и k.

Доказательство. Для метода Якоби результат леммы прямое следствие неравенства $\|D_k\| \le \|A_k\|$. Для симметричного метода Гаусса-Зейделя мы используем факт, что в каждой строке матрицы жёсткости количество ненулевых элементах ограничено константой, не зависящей от k, и получаем

$$\begin{aligned} \|L_k\|^2 \le \|L_k\|_1 \|L_k\|_\infty &= \left(\max_j \sum_{i=j+1}^{n} |(A_k)_{ij}| \right) \left(\max_i \sum_{j=1}^{i-1} |(A_k)_{ij}| \right) \\ &\le c \max_{i,j} (A_k)_{ij}^2 \le c \|A_k\|^2 \ , \end{aligned}$$

Следовательно, в силу леммы 3.5, имеем

$$\|W_k\| = \|A_k + L_k D_k^{-1} L_k^T\| \le \|A_k\| + \|L_k\|^2 \|D_k^{-1}\| \le c \|A_k\| \ .$$

□

Теорема 3.3. *Как в случае метода Якоби, так и симметричного метода Гаусса-Зейделя, выполняется следующее неравенство с константой* c*, не зависящей от* k, ε *и* ν*:*

$$\|A_k S_k^\nu\| \le c\frac{1}{\nu+1}\|A_k\| \ , \qquad \nu = 1, 2, \dots \ . \tag{3.20}$$

Доказательство. Обозначим $B := W_k^{-\frac{1}{2}} A_k W_k^{-\frac{1}{2}}$. Заметим, что B симметрична и $\sigma(B) \subset (0, 1]$. Более того

$$\|A_k S_k^\nu\| = \|W_k^{\frac{1}{2}} B(I-B)^\nu W_k^{\frac{1}{2}}\| \le \|W_k\| \|B(I-B)^\nu\|.$$

Теперь, чтобы получить (3.20) применяем леммы 3.6 и 3.1. □

3.2.3 Универсальная сходимость V- и W-циклов.

Следствие 3.1. *Теорема 3.2 и лемма 3.6 влекут*

$$\|W_k^{\frac{1}{2}}(A_k^{-1} - p_k A_{k-1}^{-1} r_k) W_k^{\frac{1}{2}}\| \le C_A \tag{3.21}$$

с константой C_A*, не зависящей от* ε *и* k*.*

Следствие 3.2. *Для матрицы итераций двухсеточного метода с* $\mu = 0$ *свойства сглаживания и аппроксимации влекут*

$$\|(I - p_k A_{k-1}^{-1} r_k A_k) S_k^\nu\| \le \frac{C_T}{\nu+1} \tag{3.22}$$

с константой C_T*, не зависящей от* ε *и* k*.*

Теперь теорема 10.6.25 из [94] может быть применена и влечёт следующий результат

Теорема 3.4. *Для любого* $\psi \in (0, 1)$ *существует* $\nu_0 > 0$*, не зависящее от* k *и* ε*, такое, что для матрицы итераций W-цикла со сглаживаниями Якоби с параметром и симметричными Гаусса-Зейделя справедливо*

$$\|M_k(\nu, 0)\| \le \psi \quad \forall\, \nu \ge \nu_0.$$

Для анализа V-цикла многосеточного метода используется энергетическая норма: $\|\mathrm{x}\|_{A_k} = \langle A_k \mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle_k, \ \mathrm{x} \in \mathbb{X}_k$. Благодаря следствию 3.1, (3.19) и теореме 10.7.15 из [94] мы имеем следующий результат о сходимости

Теорема 3.5. *Для матрицы итераций V-цикла со сглаживаниями Якоби с параметром и симметричными Гаусса-Зейделя справедливо*

$$\|M_k\Big(\frac{\nu}{2},\frac{\nu}{2}\Big)\|_{A_k} \le \frac{C_A}{C_A+\nu}\ , \quad \nu = 2, 4, \dots$$

с константой C_A из (3.21).

Результаты теоремы 3.4 и теоремы 3.5 доказывают универсальность многосеточного метода относительно параметров дискретизации h_k и диффузии ε.

3.3 Уравнения конвекции-диффузии.

В этой главе будет описан многосеточный метод для решения системы вида $A_k\mathrm{x} = \mathrm{b}$ с матрицей жесткости A_k из раздела 2.2.2 и приведён анализ сходимости метода.

Нам понадобится определение подобласти Ω_k^{2E} у границы вытекания:

$$\Omega_k^{2E} := \{\,(x,y)\in\Omega \mid x > 1-2\alpha\, kh_k\,\}. \tag{3.23}$$

где целое положительное число α, не зависящее от k и ε, будет определено позже.

Пусть $W_k : \mathbb{X}_k \to \mathbb{X}_k$ некоторая обратимая матрица. Рассмотрим сглаживания вида

$$\mathrm{x}^{\mathrm{new}} = \mathcal{S}_k(\mathrm{x}^{\mathrm{old}},\mathrm{b}) = \mathrm{x}^{\mathrm{old}} - \omega W_k^{-1}(A_k\mathrm{x}^{\mathrm{old}} - \mathrm{b}), \quad \text{для } \mathrm{x}^{\mathrm{old}},\mathrm{b}\in\mathbb{X}_k. \tag{3.24}$$

Матрицу сглаживающих итераций обозначим через

$$S_k = I - \omega_k W_k^{-1} A_k. \tag{3.25}$$

По сравнению с определением (3.4) в определении (3.25) явно выделен параметр релаксации ω_k. В качестве W_k используем переобуславливатель блочного типа:

$$W_k = 4\frac{\varepsilon}{h_k^2}\Phi_\alpha + \Phi_\alpha\, D_x + A_k^{2E}, \tag{3.26}$$

где A_k^{2E} – сужение оператора A_k на Ω_k^{2E} (матрица A_k^{2E} получается из матрицы A_k заменой всех строк с номерами узлов из $\Omega\setminus\Omega_k^{2E}$ на нулевые),

Φ_α – диагональная матрица, определенная в разделе 2.2.3 для вектора $\{\varphi_i^\xi\}$ с $\xi = 1 - 2\alpha\, k\, h_k$ (положим $\Phi_\alpha = 0$, если $\xi \le 0$). Подходящий выбор параметра ω_k будет сделан позже. Матрица $4\frac{\varepsilon}{h_k^2}\Phi_\alpha + \Phi_\alpha\, D_x$ – двухдиагональная, причем распадается на блоки. Вычисление $W_k^{-1}\mathrm{z}$ для некоторого вектора z происходит следующим образом: сначала методом Гаусса (прямой ход) вычисляются все значения в узлах сетки, принадлежащих $\Omega \setminus \Omega_k^{2E}$, потом, используя полученные недостающие значения на левой границе Ω_k^{2E}, в этой подобласти решается система с матрицей $A_k^{2E} + T$, где T – сужение оператора $4\frac{\varepsilon}{h_k^2}\Phi_\alpha + \Phi_\alpha\, D_x$ на Ω_k^{2E}.

В случае условий Неймана на Γ_E достаточно положить

$$W_k = 4\frac{\varepsilon}{h_k^2} I + D_x$$

Замечание 3.1. При построении многосеточных методов для сингулярно-возмущенных задач зачастую рекомендуется построение так называемых *универсальных сглаживаний (robust smoother)*. Такие сглаживания должны становится точным методом для решения вырожденной задачи, т.е., когда параметр ε стремится к нулю (см. [93], глава 10). Для итераций (3.24) это означало бы, что $A_k - W_k = \mathcal{O}(\varepsilon)$ (константа в $\mathcal{O}$ может зависеть от k).

Такие универсальные сглаживания известны для некоторых анизотропных задач и используют блочные методы Якоби, Гаусса-Зейделя или ILU-разложение. Их теоретический анализ может быть найден в [144, 145, 158]. В случае, если задача конвекции-диффузии (1.10) или (1.11) аппроксимируется с помощью конечных разностей против потока, то, легко видеть, что блочный метод Якоби дает универсальные сглаживания. Однако для аппроксимации по методу конечных элементов такие блочные переобуславливатели *не приводят* к универсальным сглаживаниям. Это становится понятным при рассмотрении шаблона (2.31). При $\varepsilon \to 0$ первые два слагаемых дают блочную трех-диагональную матрицу, но в третьем (конвективном) слагаемом связь в y-направлении не исчезает. Поэтому не понятно, как для дискретизации методом конечных элементов могут быть построены универсальные сглаживания.

При анализе многосеточного метода для задач типа реакции-диффузии или анизотропных уравнений диффузии константа в свойстве аппроксимации обычно зависит от ε, как $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$. Тогда эта зависимость компенсируется множителем ε в свойстве сглаживания (см. [176, 178, 144, 145, 158]). В данной работе мы не можем применить тот же прием, так как универсальные сглаживания построить не удается. Вместо этого мы используем другое разложение матрицы итераций, приводящее к модифицированным, не зависящим от ε, свойствам сглаживания и аппроксимации.

Замечание 3.2. Отметим следующие свойства предложенных сглаживаний, которые, по-видимому, необходимы для обеспечения универсальной оценки на норму матрицы итераций многосеточного метода. Около границ втекания и вытекания сглаживающие итерации быстро сходятся. Происходит это за счёт постановки краевых условий на границе втекания, которые переобуславливатель W_k учитывает. Наличие этих условий обеспечивают быстрое затухание ошибки в небольшой области вниз по течению. Около границы вытекания быстрое сокращение ошибки происходит в силу наличия блока A_k^{2E} в (3.24). Эти свойства найдут своё математическое выражение в следствиях 3.3 и 3.4.

В качестве операторов перехода с сетки на сетку мы выбираем канонические продолжение и проектор, определенные в 3.3. Обозначим через k_0 минимальное k такое, что $\Omega_k^{2E} \neq \Omega$ и рассмотрим W-цикл (см. процедуру MGM в начале раздела 3.1 с $\gamma = 2$).

В целях анализа нам понадобится выбирать различные параметры релаксации для пред- и постсглаживаний. Поэтому введем обозначения

$$S_{k,pr} := I - \omega_{k,pr} W_k^{-1} A_k, \quad S_{k,po} := I - \omega_{k,po} W_k^{-1} A_k.$$

Матрица итераций двухсеточного метода примет вид

$$T_k = S_{k,po}^{\nu_k}(I - p_k A_{k-1}^{-1} r_k A_k) S_{k,pr}^{\mu_k}.$$

Матрица итераций многосеточного метода может быть записана с помощью следующей рекурсии

$$M_{k_0}^{\mathrm{mgm}} := 0, \quad M_k^{\mathrm{mgm}} = T_k + S_{k,po}^{\nu_k} p_k (M_{k-1}^{\mathrm{mgm}})^2 A_{k-1}^{-1} r_k A_k S_{k,pr}^{\mu_k}, \quad k > 1. \quad (3.27)$$

Для анализа многосеточного метода понадобятся некоторые вспомогательные матрицы и утверждения. Напомним определение: $J_k^{2E} \in \mathbb{R}^{N_k \times N_k}$ – диагональная матрица такая, что $(J_k^{2E})_{ii} = 0$, если узел с индексом i (в глобальной нумерации) лежит в Ω_k^{2E}, иначе $(J_k^{2E})_{ii} = 1$. В анализе метода важную роль также играет вспомогательная подобласть Ω_k^W около границы втекания, определенная в (2.52). Как и в разделе 2.2.3 для Ω_k^W будем использовать функцию срезки. Определим диагональную матрицу Φ_k следующим образом:

$$\hat{\Phi}_k := \operatorname{diag}(\phi_1^\xi, \ldots, \phi_{n_k}^\xi), \quad \Phi_k := \hat{I}_k \otimes \hat{\Phi}_k \ , \tag{3.28}$$

где ϕ_i^ξ – функция срезки определенная в разделе 2.2.3 на стр. 107 с $\xi = 4kh_k$. Для простоты обозначений мы не будем в дальнейшем писать индекс ξ в ϕ_i^ξ. Диагональная матрица Φ_k является положительно определенной (будем различать её с матрицей Φ_α из определения W_k).

Аналогично J_k^{2E} определим проектор J_k^E относительно подобласти

$$\Omega_k^E := \{(x, y) \in \Omega|\ x > 1 - \alpha k h_k\}.$$

Нам понадобится следующие свойства J_k^E.

Лемма 3.7. *Справедливы равенства*

$$A_k J_k^E \ = \ J_k^E A_k + I_A \tag{3.29}$$
$$W_k J_k^E \ = \ J_k^E W_k + I_W \tag{3.30}$$

Для матриц I_A и I_W выполнены оценки

$$\|I_A A_k^{-1}\| \le c_p, \quad \|I_A p A_{k-1}^{-1} r\| \le c_p, \tag{3.31}$$
$$\|I_W A_k^{-1}\| \le c_p, \quad \|I_W p A_{k-1}^{-1} r\| \le c_p. \tag{3.32}$$

Доказательство. Проверим равенство (3.29). Пользуясь определением A_k, например в виде шаблона (2.31), легко проверить, что матрица I_A задаётся следующим образом. Для произвольного $\mathrm{z} \in \mathbb{X}_k$ рассмотрим $\mathrm{y} = I_A \mathrm{z}$. Для компонент вектора y, соответствующим узлам на левой границе Ω_k^E, имеем

$$y_i = c_1 z_{i+1} + c_2 z_{i+1+n_k},$$

причем $c_1, c_2 \sim h_k^{-1}$. Остальные компоненты y равны нулю.

Положим $\mathrm{z} = A_k^{-1}\mathrm{f}$. Рассмотрим функцию $z = P_k \mathrm{z} \in \mathbb{V}_k$. Значения z в узле (ih_k, jh_k) обозначается через z_{ij} Пусть $\mathrm{i} = n_k + 1 - \alpha k$ – индекс узлов на левой границе Ω_k^E. Справедливо

$$\|\mathrm{y}\|^2 \le c\, h_k^{-2} \sum_{j=1}^{n_k} h_k^2 z_{\mathrm{ij}}^2.$$

Теперь воспользуемся оценкой (2.51):

$$\sum_{j=1}^{n_k} h_k^2 z_{\mathrm{i}j}^2 \le c\, h_k^2 \|\mathrm{f}\|^2.$$

Суперпозиция последних двух неравенств даёт: $\|\mathrm{y}\| \le c\,\|\mathrm{f}\|$, что по построению y означает

$$\|I_A A_k^{-1}\| \le c.$$

Также получаем оценку

$$\|I_A p A_{k-1}^{-1} r\| \le c.$$

Далее рассмотрим вектор $\mathrm{y} = I_W \mathrm{z}$, для которого дословно повторяются рассуждения выше. Получаем

$$\|I_W A_k^{-1}\| \le c, \qquad \|I_W p A_{k-1}^{-1} r\| \le c.$$

□

Лемма 3.8. *Справедливо равенство*

$$(I - \omega_{k,po} A_k W_k^{-1})(I - J_k^E) \;=\; (1 - \omega_{k,po})(I - J_k^E) + \Psi_k, \qquad (3.33)$$

с некоторой матрицей Ψ_k *такой, что* $\|\Psi_k\| \le c\, h_k^{s\alpha}$, $s > 0$ *– некоторая абсолютная константа.*

Доказательство. Для доказательства (3.33) заметим, что для произвольного вектора $\mathrm{z} \in \mathbb{X}_k$ справедливо

$$A_k W_k^{-1} \left(I - J_k^E\right) \mathrm{z} = A_k^{2E} W_k^{-1} \left(I - J_k^E\right) \mathrm{z}.$$

Обозначим $\mathrm{y} = A_k^{2E} W_k^{-1} \left(I - J_k^E\right) \mathrm{z}$, получаем из определения W_k:

$$\mathrm{y} = \left(I - J_k^E\right) \mathrm{z} - \Phi_\alpha(4\frac{\varepsilon}{h^2} + D_x) W_k^{-1} \left(I - J_k^E\right) \mathrm{z}.$$

Обозначим

$$\Psi_k = \Phi_\alpha(4\frac{\varepsilon}{h^2} + D_x) W_k^{-1} \left(I - J_k^E\right).$$

Теперь, рассмотрим вектор $\tilde{\mathrm{z}} = W_k^{-1} \left(I - J_k^E\right) \mathrm{z}$. Заметим, что компоненты $\tilde{\mathrm{z}}$, соответствующие узлам сетки в $\Omega \setminus \Omega_k^E$, равны нулю.

Вне подобласти

$$\Omega_k^{3E/2} := \{(x,y) \in \Omega|\ x > 1 - \frac{3\alpha k}{2} h_k\}$$

в силу следствия 2.1 ($\eta - \xi = \frac{\alpha}{2} k h_k$) имеем $\|D_x \tilde{\mathrm{z}}\|_{\Omega \setminus \Omega_k^{3E/2}} \le c\, h_k^{\frac{\alpha}{12}} \|\mathrm{z}\|$, поэтому, используя неравенство Фридрихса в полосе шириной $\frac{1}{2}\alpha\, k h_k$ и неравенство $\varepsilon \le 2h_k$ для оценки $\|4\frac{\varepsilon}{h^2}\tilde{\mathrm{z}}\|$, получаем

$$\|(4\frac{\varepsilon}{h^2} + D_x)\tilde{\mathrm{z}}\|_{\Omega \setminus \Omega_k^{3E/2}} \le c\,\alpha\, k\, h_k^{\frac{\alpha}{12}} \|\mathrm{z}\|.$$

В подобласти $\Omega_k^{3E/2}$, благодаря малости элементов матрицы Φ_α, имеем

$$\|\Phi_\alpha(4\frac{\varepsilon}{h^2} + D_x)\tilde{\mathrm{z}}\|_{\Omega_k^{3E/2}} \le c\, h_k^{\frac{\alpha}{6}-1} \|\tilde{\mathrm{z}}\| \le c\,\alpha\, k\, h_k^{\frac{\alpha}{6}} \|\mathrm{z}\|.$$

Суммирование оценок в подобластях дают (3.33). □

3.3.1 Свойство аппроксимации.

Теорема 3.6 (Модифицированное свойство аппроксимации). *Существует константа c_2, не зависящая от k и ε такая, что*

$$\|J_k^E W_k (A_k^{-1} - p_k A_{k-1}^{-1} r_k)(I - \Phi_k)\| \le c_2 \quad \textit{для} \quad k = 2, 3, \ldots \tag{3.34}$$

Доказательство. В многосеточном методе для систем, возникающих из аппроксимации методом конечных элементов, доказательство свойства аппроксимации обычно базируется на оценке для $\mathbb{L}_2$ нормы ошибки $u - u_h$. Подходящая оценка доказана в лемме 2.6. Однако в нашем случае возникает дополнительная трудность – билинейная форма $a_k(\cdot,\cdot)$ зависит от стабилизирующей добавки, а следовательно, от номера уровня k. Оценки для $u - u_h$ становится недостаточно. Поэтому далее будут доказаны вспомогательные леммы для преодоления этой трудности.

Введем пространство

$$\mathbb{V}_k^0 := \{v_k \in \mathbb{V}_k \mid v_k(x) = 0 \quad \text{для всех} \;\; x \in \Omega_k^W\ \}$$

Пусть $\mathrm{b} \in \mathbb{X}_k$ задано. Мы должны доказать оценку

$$\|J_k^E W_k (A_k^{-1} - p_k A_{k-1}^{-1} r_k)(I - \Phi_k)\mathrm{b}\| \le c\|\mathrm{b}\|$$

с константой c, не зависящей от k, ε и b. Положим

$$f_k := (P_k^*)^{-1}(I - \Phi_k)\mathrm{b}.$$

Заметим, что $f_k \in \mathbb{V}_k^0$. Для заданной f_k определим, соответствующие дискретные и непрерывные решения, как

$$\begin{aligned}
u_k \in \mathbb{V}_k: &\quad a_k(u_k, v_k) = (f_k, v_k) && \text{для всех } v_k \in \mathbb{V}_k \\
u \in \mathbb{V}: &\quad a_k(u, v) = (f_k, v) && \text{для всех } v \in \mathbb{V} \\
u_{k-1} \in \mathbb{V}_{k-1}: &\quad a_{k-1}(u_{k-1}, v_{k-1}) = (f_k, v_{k-1}) && \text{для всех } v_{k-1} \in \mathbb{V}_{k-1} \\
\tilde{u} \in \mathbb{V}: &\quad a_{k-1}(\tilde{u}, v) = (f_k, v) && \text{для всех } v \in \mathbb{V}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Из соотношения (2.34) следует, что равенство

$$\|v_x\|_{\Omega\setminus\Omega_k^E} = \|J_k^E D_x P_k^{-1} v\| \tag{3.36}$$

выполняется для всех $v \in \mathbb{V}_k$. Используем определение $W_k = 4\frac{\varepsilon}{h_k^2}\Phi_\alpha + \Phi_\alpha D_x + A_k^{2E}$. Напомним, что $\|\Phi_k\| \le 1$. Получаем

$$\begin{aligned}
&\|J_k^E W_k(A_k^{-1} - p_k A_{k-1}^{-1} r_k)(I - \Phi_k)\mathrm{b}\| \\
&\le c\frac{\varepsilon}{h_k^2}\|J_k^E(A_k^{-1} - p_k A_{k-1}^{-1} r_k)(I - \Phi_k)\mathrm{b}\| + \|J_k^E D_x A_k^{-1}(I - \Phi_k)\mathrm{b}\| \\
&\quad + \|J_k^E D_x p_k A_{k-1}^{-1} r_k (I - \Phi_k)\mathrm{b}\|
\end{aligned}$$

Продолжим оценку в силу определений (3.35) и соотношения (3.36):

$$\begin{aligned}
&\|J_k^E W_k(A_k^{-1} - p_k A_{k-1}^{-1} r_k)(I - \Phi_k)\mathrm{b}\| \\
&\le c\Big(\frac{\varepsilon}{h_k^2}\|u_k - u_{k-1}\|_{\Omega\setminus\Omega_k^E} + \|(u_k)_x\|_{\Omega\setminus\Omega_k^E} + \|(u_{k-1})_x\|_{\Omega\setminus\Omega_k^E}\Big) \\
&\le c\Big(\frac{\varepsilon}{h_k^2}\|u_k - u_{k-1}\|_{int} + \|(u_k)_x\|_{int} + \|(u_{k-1})_x\|_{int}\Big) \\
&\le c\Big(\frac{\varepsilon}{h_k^2}\big(\|u - u_k\|_{int} + \|\tilde{u} - u_{k-1}\|_{int} + \|u - \tilde{u}\|_{int}\big) \\
&\qquad + \|(u_k)_x\|_{int} + \|(u_{k-1})_x\|_{int}\Big)
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Выше мы использовали вложение $\Omega \setminus \Omega_k^E \subset \Omega_{int}$. Из следствия 2.2 получаем

$$\|(u_k)_x\|_{int} + \|(u_{k-1})_x\|_{int} \le c\|f_k\|, \tag{3.38}$$

а лемма 2.6 влечет

$$\|u_k - u\|_{int} + \|u_{k-1} - \tilde{u}\|_{int} \le c\,\frac{h_k^2}{\varepsilon}\,\|f_k\|. \tag{3.39}$$

Наконец, далее мы докажем лемму 3.10, из которой следует

$$\|u - \tilde{u}\| \le c\,h_k\|f_k\|. \tag{3.40}$$

Если мы подставим результаты (3.38),(3.39) и (3.40) в (3.37), мы получим

$$\|J_k^E W_k(A_k^{-1} - p_k A_{k-1}^{-1} r_k)(I - \Phi_k)\mathrm{b}\| \le c\|f_k\| \le c\|\mathrm{b}\|.$$

Таким образом теорема 3.6 доказана. $\square$

Осталось доказать лемму 3.10. Для доказательства леммы 3.10 нам понадобится ещё одна лемма.

Лемма 3.9. *Пусть $g \in \mathbb{H}^1(\Omega)$, $u(x,y)$ является решением задачи*

$$-\varepsilon u_{yy} - \varepsilon_k u_{xx} + u_x = g_x, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3.41}$$

Пусть $\omega := \{(x,y) \in \Omega |\, x < 1 - \varepsilon_k |\ln \varepsilon_k|\}$, тогда выполнено

$$\|u\|_{int} \le c\left(\|g\|_{L_2(\omega)} + \sqrt{h_k}\|g\| + h_k\left(\int_{\Gamma_W} (u_x)^2\,dy\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{3.42}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$v(x,y) := \int_0^x u(\xi,y)\,d\xi.$$

Она удовлетворяет соотношению

$$-\varepsilon v_{yy} - \varepsilon_k v_{xx} + v_x = g + \varepsilon_k\,u_W \tag{3.43}$$

и краевым условиям $v = 0$ на $\partial\Omega \setminus \Gamma_E$, $v_x = 0$ на Γ_E. Здесь $u_W(x,y) = u_x(0,y)$ и

$$\|\varepsilon_k\,u_W\| = \varepsilon_k\left(\int_{\Gamma_W} (u_x)^2\,dy\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{3}{2}h_k\left(\int_{\Gamma_W} (u_x)^2\,dy\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.44}$$

Теперь оценка (3.42) эквивалентна неравенству

$$\|v_x\|_{int} \le c\left((\|g\|_{L_2(\omega)} + \sqrt{h_k}\|g\| + h_k\left(\int_{\Gamma_W}(u_x)^2\,dy\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{3.45}$$

Оценка (3.45) в свою очередь следует из (1.37) с $p = \frac{1}{2}$ (замечание 1.1) и (3.44). Лемма доказана. □

С помощью этой леммы доказываем следующую лемму:

Лемма 3.10. *Пусть u и $\tilde{u}$ – непрерывные решения, определенные в (3.35). Выполняется оценка*

$$\|u - \tilde{u}\|_{int} \le c\,h_k\|f_k\|. \tag{3.46}$$

Доказательство. Разность $e := u - \tilde{u}$ удовлетворяет уравнению

$$-\varepsilon e_{yy} - \varepsilon_k e_{xx} + e_x = g_x, \quad e|_{\partial\Omega} = 0 \tag{3.47}$$

с $g = -\bar{\delta} h_k \tilde{u}_x$. Теперь применяем лемму 3.9. Получаем

$$\begin{aligned} \|e\|_{int} &\le c\left(\|g\|_{L_2(\omega)} + \sqrt{h_k}\|g\| + h_k\left(\int_{\Gamma_W}(e_x)^2\,dy\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &\le c\,h_k\left(\|\tilde{u}_x\|_{L_2(\omega)} + \sqrt{h_k}\,\|\tilde{u}_x\| + \left(\int_{\Gamma_W}(\tilde{u}_x)^2\,dy\right)^{\frac{1}{2}}\right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{\Gamma_W}(u_x)^2\,dy\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &\le c_1\,h_k\|f_k\|. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались (1.25), (1.37) с $p = 0$ и (1.34) с $p = \frac{1}{2}$ (напомним, что $\mathrm{supp}(f_k) \subset \Omega \setminus \Omega_k^W$). Лемма 3.10 доказана. □

3.3.2 Свойство сглаживания.

Лемма 3.11. *Существуют положительные константы α (см.* (3.23)*) и c_1, не зависящие от k и ε, такие, что справедливо*

$$W_k A_k^{-1} \ge c_1 I \quad \textit{для} \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{3.48}$$

Доказательство. Напомним вид переобуславливателя W_k из сглаживающих итераций, см. (3.26):

$$W_k = 4\frac{\varepsilon}{h_k^2}\Phi_\alpha + \Phi_\alpha D_x + A_k^{2E}.$$

Утверждение леммы эквивалентно оценке

$$\langle W_k\mathrm{z}, A_k\mathrm{z}\rangle \geq c\,\|A_k\mathrm{z}\|^2 \quad \forall\, \mathrm{z} \in \mathbb{X}_k. \tag{3.49}$$

Нам понадобятся следующие оценки:

$$\begin{aligned}
\langle A_k\mathrm{z}, \Phi\mathrm{z}\rangle &\geq \varepsilon\langle A_y\mathrm{z}, \mathrm{z}\rangle_\Phi - \frac{9}{4}H\bar{\varepsilon}_k^2\langle A_x\mathrm{z}, \mathrm{z}\rangle \\
&\geq \varepsilon\langle A_y\mathrm{z}, \mathrm{z}\rangle_\Phi - c\,H\bar{\varepsilon}_k\|A_k\mathrm{z}\|^2, && (3.50)\\
\langle A_k\mathrm{z}, \Phi\, D_x\mathrm{z}\rangle &\geq c_1\|D_x\mathrm{z}\|_\Phi^2 - c\,H\|A_k\mathrm{z}\|^2. && (3.51)
\end{aligned}$$

с некоторыми константами $c_1, c > 0$. Неравенство (3.50) является следствием (2.43) и (2.40), (3.51) следует из (2.33), а константа H определяется на странице 107 (в данном случае $1 - \xi = 2\alpha\, k\, h_k$ – ширина области Ω_k^{2E}). Непосредственными вычислениями проверяется оценка $H < \frac{8}{27}h_k^{\frac{\alpha}{2}ln2-1}$. Обозначим через A'_k матрицу проекции оператора A_k на подобласть $\Omega' = \Omega\setminus\Omega_k^{2E}$ и, как следствие, получим разложение $A_k = A'_k + A_k^{2E}$, $\langle A'_k\mathrm{z}, A_k^{2E}\mathrm{z}\rangle = 0\ \forall\,\mathrm{z}$. Выводим оценку:

$$\begin{aligned}
\|A_k\mathrm{z}\|^2 &= \|A'_k\mathrm{z}\|^2 + \|A_k^{2E}\mathrm{z}\|^2 \\
\text{(из (2.30))} \quad &\leq 3\varepsilon^2\|A_y\mathrm{z}\|_{\Omega'}^2 + 3\bar{\varepsilon}_k^2\|A_x\mathrm{z}\|_{\Omega'}^2 + 3\|D_k\mathrm{z}\|_{\Omega'}^2 + \|A_k^{2E}\mathrm{z}\|^2
\end{aligned}$$

Продолжим оценку, используя неравенства:

$$\|A_x\mathrm{z}\|_{\Omega'} \leq c\,h_k^{-1}\|D_x\mathrm{z}\|_{\Omega'_+}, \qquad \|D_k\mathrm{z}\|_{\Omega'} \leq c\,\|D_x\mathrm{z}\|_{\Omega'_+},$$

где Ω'_+ – расширение Ω' вправо на полосу шириной h_k. Далее воспользуемся оценкой снизу $\Phi_\alpha \geq c\,I$ в Ω'_+. Получаем

$$\|A_k\mathrm{z}\|^2 \leq c\,\varepsilon^2\|A_y\mathrm{z}\|_{\Phi_\alpha}^2 + c\,\|D_x\mathrm{z}\|_{\Phi_\alpha}^2 + \|A_k^{2E}\mathrm{z}\|^2.$$

Наконец, используя коммутируемость A_y и Φ_α и $A_y \leq 4h_k^{-2}I$, имеем

$$\|A_k\mathrm{z}\|^2 \leq c\,\big(\frac{\varepsilon}{h_k}\big)^2\langle A_y\mathrm{z}, \mathrm{z}\rangle_{\Phi_\alpha} + c\,\|D_x\mathrm{z}\|_{\Phi_\alpha}^2 + \|A_k^{2E}\mathrm{z}\|^2. \tag{3.52}$$

Теперь применим оценки (3.50), (3.51) и получаем

$$\begin{aligned}\langle W_k \mathrm{z}, A_k \mathrm{z}\rangle &= \langle 4\frac{\varepsilon}{h_k^2}\Phi_\alpha\, \mathrm{z}, A_k \mathrm{z}\rangle + \langle \Phi_\alpha\, D_x \mathrm{z}, A_k \mathrm{z}\rangle + \|A_k^{2E}\mathrm{z}\|^2 \\ &\geq 4\big(\frac{\varepsilon}{h_k}\big)^2 \langle A_y \mathrm{z}, \mathrm{z}\rangle_{\Phi_\alpha} + c_1 \|D_x \mathrm{z}\|^2_{\Phi_\alpha} - c\,(1 + 9\frac{\varepsilon\bar{\varepsilon}_k}{h_k^2})\, H \|A_k \mathrm{z}\|^2 + \|A_k^{2E}\mathrm{z}\|^2.\end{aligned}$$

Так как H экспоненциально убывает с ростом α, то можем выбрать некоторое положительное целое α, не зависящее от k и ε, такое, что константа $c\,(1 + \alpha \frac{9}{4}\frac{\varepsilon\bar{\varepsilon}_k}{h_k^2})\, H$ будет достаточно мала, и последняя оценка в сочетании с (3.52) докажет (3.49), а следовательно, и лемму. $\square$

Предположение 3.1. *В постсглаживающих итерациях* (3.24) *положим* $\omega_{k,po} := c_1$.

Получаем свойство сглаживания.

Лемма 3.12 (Модифицированное свойство сглаживания). *Выполняется оценка:*

$$\|A_k S_k^{\nu_k} W_k^{-1}\| \leq \frac{4}{c_1\sqrt{2\pi\nu_k}}\ .$$

Доказательство. Из леммы 3.4 следует, что неравенство (3.48) влечет оценку

$$\|I - 2c_1 A_k W_k^{-1}\| \leq 1. \tag{3.53}$$

Теперь утверждение леммы является следствием (3.53) и теоремы 10.6.8 из [94]. $\square$

Наконец, заметим, что из предположений 3.2, 3.1 и (3.53) следует

$$\|\tilde{S}_{k,po}\| \leq 1, \qquad \|\tilde{S}_{k,pr}\| \leq 1. \tag{3.54}$$

3.3.3 Поведение сглаживающих итераций около границ втекания и вытекания.

Благодаря лемме 3.8 можно показать, что около границы вытекания постсглаживающие итерации быстро сходятся. А именно, справедливо

Следствие 3.3. Пусть $\tilde{S}_{k,po} := A_k S_{k,po} A_k^{-1}$. Выполняется оценка:

$$\|\tilde{S}_{k,po}^{\nu_k}(I - J_k^E)\| \leq (1 - \omega_{k,po})^{\nu_k} + c_4 h_k^{s\alpha}\ .$$

Перейдём к изучению поведения сглаживаний около границы втекания. Так как при применении W_k^{-1} к x результат не зависит от значений вектора x вниз по течению, а оператор A_k действует локально, то для упрощения подсчетов в далее в § 3.3.3 рассмотрим случай условий Неймана на Γ_E. Напомним, что матрица "срезки" Φ_k определена в (3.28).

Лемма 3.13. *Существуют константы $d_1 > 0, d_2 > 0$, не зависящие от k и ε такие, что*

$$\|\Phi_k^{\frac{1}{2}}(I - \frac{d_1}{k^2}A_k W_k^{-1})\Phi_k^{-\frac{1}{2}}\| \le 1 - \frac{d_2}{k^4} \tag{3.55}$$

Доказательство леммы 3.13 будет базироваться на нескольких вспомогательных леммах. Напомним оценку (2.42). Для условий Неймана на Γ_E она принимает вид:

$$\langle A_k \mathrm{x}, D_x \mathrm{x}\rangle_\Phi \ge c\,\|D_x \mathrm{x}\|_\Phi^2 \quad \forall\ \mathrm{x} \in \mathbb{X}_k \tag{3.56}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от k и ε.

Определим диагональную матрицу проекции $J_k := I_{n_k-1} \otimes \hat{J}_k$, $\hat{J}_k$ – диагональная матрица $n_k \times n_k$ с элементами $(\hat{J}_k)_{i,i} = 1$, если $(\hat{\Phi}_k)_{i,i} = 1$ и $(\hat{J}_k)_{i,i} = 0$ иначе.

Лемма 3.14. *Существует константа $c > 0$, не зависящая от k и ε, такая, что*

$$\|W_k \mathrm{x}\|_\Phi^2 \le ck^2\big(\frac{\varepsilon}{h_k^3}\|(I - J_k)\mathrm{x}\|_\Phi^2 + \|D_x \mathrm{x}\|_\Phi^2\big) \quad \forall\ \mathrm{x} \in \mathbb{X}_k$$

Доказательство. Заметим справедливость соотношений

$$\begin{aligned}\|J_k \mathrm{x}\|_\Phi &= \|J_k D_x^{-1} J_k D_x \mathrm{x}\|_\Phi \le \|J_k D_x^{-1} J_k\|_\Phi \|D_x \mathrm{x}\|_\Phi \\ &= \|J_k D_x^{-1} J_k\| \|D_x \mathrm{x}\|_\Phi \le (3k+1)h_k \|D_x \mathrm{x}\|_\Phi\end{aligned}$$

Следовательно, используя $\varepsilon \le \frac{1}{2}h_k$, получаем

$$\begin{aligned}\|W_k \mathrm{x}\|_\Phi = \|\frac{4\varepsilon}{h_k^2}\mathrm{x} + D_x \mathrm{x}\|_\Phi &\le \frac{4\varepsilon}{h_k^2}\|(I - J_k)\mathrm{x}\|_\Phi + \frac{4\varepsilon}{h_k^2}\|J_k \mathrm{x}\|_\Phi + \|D_x \mathrm{x}\|_\Phi \\ &\le \frac{4\varepsilon}{h_k^2}\|(I - J_k)\mathrm{x}\|_\Phi + ck\|D_x \mathrm{x}\|_\Phi \le ck\big(\frac{4\varepsilon}{h_k^2}\|(I - J_k)\mathrm{x}\|_\Phi + \|D_x \mathrm{x}\|_\Phi\big)\end{aligned}$$

Возводя в квадрат это соотношение и используя $(\frac{\varepsilon}{h_k^2})^2 \le \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{h_k^3}$, мы завершаем доказательство. $\square$

Напомним определение матрицы $\hat{\Phi}_x := \frac{1}{h_k}\mathrm{diag}(\phi_{i+1} - \phi_i)_{1\le i\le n_k}$ и диагональной матрицы $\Phi_x := I_{n_k-1} \otimes \hat{\Phi}_x$.

Лемма 3.15. *Справедлива оценка*

$$\langle A_k \mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle_\Phi \ge \frac{1}{30}\|(-\Phi_x)^{\frac{1}{2}}\mathrm{x}\|^2 \quad \forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{X}_k$$

Доказательство. Для матрицы "срезки" $\hat{\Phi}_k$ из (3.28) выполняется:

$$\max_{i\ge 3k+2}\left(\frac{\phi_{i-1} - \phi_i}{\phi_i - \phi_{i+1}}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{8}}$$

Из оценки (2.43) следует

$$\Phi_k A_k \ge (\frac{1}{9} - \frac{1}{6}(2 - e^{\frac{1}{8}}))\Phi_x > -\frac{1}{30}\Phi_x.$$

$\square$

Используя доказанные две леммы, мы можем доказать оценку сверху в (3.15):

Лемма 3.16. *Существует константа $c_1 > 0$, не зависящая от k и ε такая, что*

$$\langle W_k \mathrm{x}, W_k \mathrm{x}\rangle_\Phi \le c_1 k^2 \langle W_k \mathrm{x}, A_k \mathrm{x}\rangle_\Phi \quad \forall\, \mathrm{x} \in \mathbb{X}_k$$

Доказательство. Из леммы 3.15 и (3.56) получаем

$$\begin{aligned}\langle W_k \mathrm{x}, A_k \mathrm{x}\rangle_\Phi &= \frac{4\varepsilon}{h_k^2}\langle \mathrm{x}, A_k \mathrm{x}\rangle_\Phi + \langle D_x \mathrm{x}, A_k \mathrm{x}\rangle_\Phi \\ &\ge c\big(\frac{\varepsilon}{h_k^2}\langle \Phi_x \mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle_k + \|D_x \mathrm{x}\|_\Phi^2\big)\end{aligned} \tag{3.57}$$

с $c > 0$, не зависящей от k и ε. Используя соотношение $\phi_i - \phi_{i+1} = (1 - e^{-\frac{1}{4}})\phi_i \ge \frac{1}{5}\phi_i$ для $i \ge 3k+1$, получаем

$$\langle \Phi_x \mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle_k \ge \frac{1}{5}h_k^{-1}\langle (I - J_k)\Phi_k \mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle_k = \frac{1}{5}h_k^{-1}\|(I - J_k)\mathrm{x}\|_\Phi^2 \tag{3.58}$$

Из (3.57) и (3.58) следует

$$\langle W_k\mathrm{x}, A_k\mathrm{x}\rangle_\Phi \geq c\Big(\frac{\varepsilon}{h_k^3}\|(I-J_k)\mathrm{x}\|_\Phi^2 + \|D_x\mathrm{x}\|_\Phi^2\Big)$$

Теперь комбинируем эту оценку с результатом леммы 3.14 и доказываем лемму. □

Получим теперь оценку снизу в (3.15).

Лемма 3.17. *Существует константа $c_0 > 0$, не зависящая от k и ε такая, что*

$$c_0\langle A_k\mathrm{x}, A_k\mathrm{x}\rangle_\Phi \leq \langle W_k\mathrm{x}, W_k\mathrm{x}\rangle_\Phi \qquad \forall\ \mathrm{x}\in\mathbb{X}_k$$

Доказательство. Во-первых, заметим оценку

$$\|A_k\mathrm{x}\|_\Phi \leq \bar{\varepsilon}_k\|A_x\mathrm{x}\|_\Phi + \varepsilon\|A_y\mathrm{x}\|_\Phi + \frac{1}{6}\|BD_x\mathrm{x}\|_\Phi.$$

Имеем

$$\|A_y\|_\Phi = \|(I_{n_k-1}\otimes\hat{\Phi}_k^{\frac{1}{2}})(\hat{A}_y\otimes\hat{J})(I_{n_k-1}\otimes\hat{\Phi}_k^{-\frac{1}{2}})\| = \|\hat{A}_y\otimes\hat{J}\| \leq \frac{4}{h_k^2}$$

Так как $|\phi_i\phi_{i+1}^{-1}| \leq e^{\frac{1}{4}}$, то выполняется $\|\hat{\Phi}_k^{\frac{1}{2}}\hat{D}_x^T\hat{\Phi}_k^{-\frac{1}{2}}\| \leq ch_k^{-1}$. Следовательно, получаем $\|D_x^T\|_\Phi \leq ch_k^{-1}$. Рассуждая аналогично можно проверить оценку $\|B\|_\Phi \leq c$. Таким образом, используя $\bar{\varepsilon}_k \leq \frac{3}{2}h_k$, получаем:

$$\begin{aligned}\|A_k\mathrm{x}\|_\Phi &\leq \bar{\varepsilon}_k\|D_x^T\|_\Phi\|D_x\mathrm{x}\|_\Phi + \frac{4\varepsilon}{h_k^2}\|\mathrm{x}\|_\Phi + c\|D_x\mathrm{x}\|_\Phi \\ &\leq c\Big(\frac{\varepsilon}{h_k^2}\|\mathrm{x}\|_\Phi + \|D_x\mathrm{x}\|_\Phi\Big)\end{aligned} \tag{3.59}$$

Из равенства (2.45) следует $\langle D_x\mathrm{x},\mathrm{x}\rangle_\Phi \geq 0$. Отсюда выводим

$$\begin{aligned}\|W_k\mathrm{x}\|_\Phi^2 &= \frac{16\varepsilon^2}{h_k^4}\|\mathrm{x}\|_\Phi^2 + \frac{16\varepsilon}{h_k^2}\langle D_x\mathrm{x},\mathrm{x}\rangle_\Phi + \|D_x\mathrm{x}\|_\Phi^2 \\ &\geq c\Big(\frac{\varepsilon^2}{h_k^4}\|\mathrm{x}\|_\Phi^2 + \|D_x\mathrm{x}\|_\Phi^2\Big)\end{aligned} \tag{3.60}$$

Теперь утверждение леммы следует из (3.59) и (3.60). □

Оценки доказанные в леммах 3.16 и 3.17 используем вместе с леммой 3.4 и получаем утверждение леммы 3.13.

Предположение 3.2. *В постсглаживающих итерациях* (3.24) *положим* $\omega_{k,pr} := \min\{\,\frac{1}{4}\,,\frac{d_1}{k^2}\,\}$.

Выражение в (3.55) может быть записано, как $\|I - \frac{d_1}{k^2}A_k W_k^{-1}\|_{\Phi_k} \leq 1 - \frac{d_2}{k^4}$. Таким образом, получена оценка на сходимость итераций в почти вырожденной норме $\|\cdot\|_{\Phi_k}$. Эта норма, однако, совпадает с евклидовой для векторов отличных от нуля только в Ω_k^W. Поэтому оценка (3.55) показывает, что сглаживающие итерации быстро сходятся *около границы втекания*. Действительно, из предположения 3.2, леммы 3.13 и $\|\Phi_k\| \leq 1$ получаем

$$\|\Phi_k^{\frac{1}{2}}(I - \frac{d_1}{k^2}A_k W_k^{-1})^{\mu_k}\| \leq \|\big(\Phi_k^{\frac{1}{2}}(I - \frac{d_1}{k^2}A_k W_k^{-1})\Phi_k^{-\frac{1}{2}}\big)^{\mu_k}\|\|\Phi_k^{\frac{1}{2}}\| \leq (1 - \frac{d_2}{k^4})^{\mu_k}.$$

Следствие 3.4. Пусть $\tilde{S}_{k,pr} := A_k S_{k,pr} A_k^{-1}$. Выполняется оценка:

$$\|\Phi_k^{\frac{1}{2}}\tilde{S}_{k,pr}^{\mu_k}\| \leq (1 - \frac{d_2}{k^4})^{\mu_k}.$$

3.3.4 Универсальная сходимость W-цикла.

Будем использовать оценку для канонического оператора проекции:

$$\|r_k\| \leq c_r$$

с константой c_r, не зависящей от k. Нам также понадобится следующий результат:

Лемма 3.18. *Существуют константы* c_3 *и* c_5*, не зависящие от* k *и* ε *такие, что для* $k = 2, 3, \ldots$ *выполнено*

$$\|J_k^E A_k p_k A_{k-1}^{-1}\| \leq c_3 \qquad \|A_k p_k A_{k-1}^{-1}\| \leq c_5 h_k^{-1}. \tag{3.61}$$

Доказательство. Второе из неравенств в (3.61) очевидно в силу оценок $\|A_k\| \leq c\,h_k^{-1}$ и $\|A_{k-1}^{-1}\| \leq c$ (см. (2.41)). Докажем первое неравенство в (3.61). Выберем произвольный вектор $\mathrm{g} \in \mathbb{X}_{k-1}$, для которого определим $g_{k-1} := (P_{k-1}^*)^{-1}\mathrm{g} \in \mathbb{V}_{k-1}$. Пусть $u_{k-1} \in \mathbb{V}_{k-1}$ является решением

$$a_{k-1}(u_{k-1}, v_{k-1}) = (g_{k-1}, v_{k-1}) \quad \text{для всех} \;\; v_{k-1} \in \mathbb{V}_{k-1}.$$

Тогда выполнено $A_{k-1}^{-1}\mathrm{g} = P_{k-1}^{-1}u_{k-1}$. Соответствующее непрерывное решение $u \in \mathbb{V}$ задается равенством

$$a_{k-1}(u, v) = (g_{k-1}, v) \quad \text{для всех} \;\; v \in \mathbb{H}_0^1.$$

Докажем оценку на $\|J_k^E A_k p_k A_{k-1}^{-1}\|$. Для этого введем пространство $\mathbb{V}_k^e := \{v_k \in \mathbb{V}_k |\ v_k = 0 \text{ в } \Omega^E\}$ и рассмотрим цепочку соотношений:

$$
\begin{aligned}
\|J_k^E A_k p_k A_{k-1}^{-1}\mathrm{g}\| &= \max_{\mathrm{y}\in\mathbb{X}_k} \frac{\langle A_k p_k P_{k-1}^{-1} u_{k-1}, J_k^E \mathrm{y}\rangle}{\|\mathrm{y}\|} \le c \max_{v_k\in\mathbb{V}_k^e} \frac{a_k(u_{k-1}, v_k)}{\|v_k\|} \\
&\le c \max_{v_k\in\mathbb{V}_k^e} \frac{a_{k-1}(u_{k-1}, v_k)}{\|v_k\|} \\
&\quad + c \max_{v_k\in\mathbb{V}_k^e} \frac{a_k(u_{k-1}, v_k) - a_{k-1}(u_{k-1}, v_k)}{\|v_k\|}
\end{aligned} \tag{3.62}
$$

Определим $e_{k-1} := u - u_{k-1}$ и $\Omega' = \Omega \setminus \Omega^E$. Для первого члена в (3.62) мы получаем, используя результаты из леммы 2.5:

$$
\begin{aligned}
a_{k-1}(u_{k-1}, v_k) &\le |a_{k-1}(e_{k-1}, v_k)| + |a_{k-1}(u, v_k)| \\
&\text{используем } \mathrm{supp}(v_k) \subset \Omega' \\
&\le c h_k \|(e_{k-1})_x\|_{L_2(\Omega')} \|(v_k)_x\| + \varepsilon \|(e_{k-1})_y\|_{L_2(\Omega')} \|(v_k)_y\| \\
&+ \|(e_{k-1})_x\|_{L_2(\Omega')} \|v_k\| + |(g_{k-1}, v_k)| \\
&\le c\big(\|(e_{k-1})_x\|_{L_2(\Omega')} + \frac{\varepsilon}{h_k} \|(e_{k-1})_y\|_{L_2(\Omega')}\big) \|v_k\| + \|g_{k-1}\| \|v_k\| \\
&\le c \|g_{k-1}\| \|v_k\| \le c \|\mathrm{g}\| \|v_k\|
\end{aligned} \tag{3.63}
$$

Для второго члена в (3.62) мы получаем:

$$
\begin{aligned}
|a_k(u_{k-1}, v_k) - a_{k-1}(u_{k-1}, v_k)| &= \bar{\delta} h_k |((u_{k-1})_x, (v_k)_x)| \\
&\le c \|(u_{k-1})_x\|_{L_2(\Omega')} \|v_k\| \\
&\le c \|g_{k-1}\| \|v_k\| \le c \|\mathrm{g}\| \|v_k\|
\end{aligned} \tag{3.64}
$$

Оценки из (3.62), (3.63) и (3.64) влекут

$$
\|J_k^E A_k p_k A_{k-1}^{-1} \mathrm{g}\| \le c \|\mathrm{g}\|. \tag{3.65}
$$

□

Используя эти результаты, мы сначала докажем результат о сходимости двухсеточного метода в норме: $\|B\|_{A^T A} := \|A_k B A_k^{-1}\|$ для $B \in \mathbb{R}^{N_k \times N_k}$.

Теорема 3.7. *Для матрицы итераций двухсеточного метода имеет место оценка*

$$\|T_k\|_{A^TA} \le c\left(\nu_k^{-\frac{1}{2}} + (1-d_2/k^4)^{\mu_k} + \right.$$
$$\left. ((1-\omega_{k,po})^{\nu_k} + h_k^{s\alpha})\, h_k^{-1}(1+(1-d_2/k^4)^{\mu_k})\right),$$

где s – константа из леммы 3.8, α – константа из 3.23.

Доказательство. Теорема доказывается с помощью следующего разложения матрицы итераций:

$$\begin{aligned}
\|T_k\|_{A^TA} &= \|S_{k,po}^{\nu_k}(I - p_kA_{k-1}^{-1}r_kA_k)S_{k,pr}^{\mu_k}\|_{A^TA} \\
&= \|S_{k,po}^{\nu_k}(A_k^{-1} - p_kA_{k-1}^{-1}r_k)\big((I-\Phi_k^{\frac{1}{2}}) + \Phi_k^{\frac{1}{2}}\big)A_kS_{k,pr}^{\mu_k}\|_{A^TA} \\
&\le \|S_{k,po}^{\nu_k}\big((I-J_k^E) + J_k^E\big)(A_k^{-1} - p_kA_{k-1}^{-1}r_k)(I-\Phi_k^{\frac{1}{2}})A_kS_{k,pr}^{\mu_k}\|_{A^TA} \\
&+ \|S_{k,po}^{\nu_k}A_k^{-1}\big((I-J_k^E) + J_k^E\big)(I - A_kp_kA_{k-1}^{-1}r_k)\Phi_k^{\frac{1}{2}}A_kS_{k,pr}^{\mu_k}\|_{A^TA}
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Оценим каждое из слагаемых отдельно. В силу соотношений (3.29), (3.30) и неравенства треугольника имеем

$$\begin{aligned}
&\|S_{k,po}^{\nu_k}\big((I-J_k^E) + J_k^E\big)(A_k^{-1} - p_kA_{k-1}^{-1}r_k)(I-\Phi_k^{\frac{1}{2}})A_kS_{k,pr}^{\mu_k}\|_{A^TA} \\
\le\ &\|S_{k,po}^{\nu_k}A_k^{-1}\big((I-J_k^E)A_k - I_A\big)(A_k^{-1} - p_kA_{k-1}^{-1}r_k)(I-\Phi_k^{\frac{1}{2}})A_kS_{k,pr}^{\mu_k}\|_{A^TA} \\
&+\|S_{k,po}^{\nu_k}W_k^{-1}\big(J_k^EW_k + I_W\big)(A_k^{-1} - p_kA_{k-1}^{-1}r_k)(I-\Phi_k^{\frac{1}{2}})A_kS_{k,pr}^{\mu_k}\|_{A^TA} \\
=\ &\|\tilde{S}_{k,po}^{\nu_k}\big((I-J_k^E)A_k - (I-J_k^{E+1})I_A\big)(A_k^{-1} - p_kA_{k-1}^{-1}r_k)(I-\Phi_k^{\frac{1}{2}})\tilde{S}_{k,pr}^{\mu_k}\| \\
&+\|A_kS_{k,po}^{\nu_k}W_k^{-1}\big(J_k^EW_k + I_W\big)(A_k^{-1} - p_kA_{k-1}^{-1}r_k)(I-\Phi_k^{\frac{1}{2}})\tilde{S}_{k,pr}^{\mu_k}\|.
\end{aligned}$$

Для получения последнего равенства мы использовали соотношение $I_A = (I - J_k^{E+1})I_A$, где J_k^{E+1} – проектор для области, являющийся расширением Ω_k^E на полосу шириной h_k влево. Следствие 3.3 остаётся в силе (быть может с другой константой c_4), если вместо J_k^E использовать J_k^{E+1}. Оцениваем оба слагаемых, используя неравенства треугольника, Коши и результаты лемм 3.6, 3.12, 3.18, следствия 3.3 и оценки (3.54), (3.31) и

(3.32):

$$
\begin{gathered}
\|\tilde S^{\nu_k}_{k,po}\big((I-J^E_k)A_k-(I-J^{E+1}_k)I_A\big)(A^{-1}_k-p_kA^{-1}_{k-1}r_k)(I-\Phi^{\frac12}_k)\tilde S^{\mu_k}_{k,pr}\|\\
\le \|\tilde S^{\nu_k}_{k,po}(I-J^E_k)\|\|I-A_kp_kA^{-1}_{k-1}r_k\|\|I-\Phi^{\frac12}_k\|\|\tilde S^{\mu_k}_{k,pr}\|\\
+\|\tilde S^{\nu_k}_{k,po}(I-J^{E+1}_k)\|(\|I_AA^{-1}_k\|+\|I_Ap_kA^{-1}_{k-1}r_k\|)\|I-\Phi^{\frac12}_k\|\|\tilde S^{\mu_k}_{k,pr}\|\\
\le ((1-\omega_{k,po})^{\nu_k}+c_4h^{s\alpha})\,(1+c_5h^{-1}_kc_r+2c_p).\\
\|A_kS^{\nu_k}_{k,po}W^{-1}_k\big(J^E_kW_k+I_W\big)(A^{-1}_k-p_kA^{-1}_{k-1}r_k)(I-\Phi^{\frac12}_k)\tilde S^{\mu_k}_{k,pr}\|\\
\le \|A_kS^{\nu_k}_{k,po}W^{-1}_k\|\big(\|J^E_kW_k(A^{-1}_k-p_kA^{-1}_{k-1}r_k)(I-\Phi^{\frac12}_k)\|\\
+\|I_WA^{-1}_k\|+\|I_Wp_kA^{-1}_{k-1}r_k\|)\|\tilde S^{\mu_k}_{k,pr}\|\\
\le \frac{4}{c_1\sqrt{2\pi\nu_k}}(c_2+2c_p)\le c\,\nu^{-\frac12}.
\end{gathered}
$$

Используя дополнительно результат следствия 3.4, оценим второе слагаемое из (3.66):

$$
\begin{gathered}
\|S^{\nu_k}_{k,po}A^{-1}_k\big((I-J^E_k)+J^E_k\big)(I-A_kp_kA^{-1}_{k-1}r_k)\Phi^{\frac12}_kA_kS^{\mu_k}_{k,pr}\|_{A^TA}\\
\le \|\tilde S^{\nu_k}_{k,po}(I-J^E_k)\|\|(I-A_kp_kA^{-1}_{k-1}r_k)\|\|\Phi^{\frac12}_k\tilde S^{\mu_k}_{k,pr}\|\\
+\|\tilde S^{\nu_k}_{k,po}\|\|J^E_k(I-A_kp_kA^{-1}_{k-1}r_k)\|\|\Phi^{\frac12}_k\tilde S^{\mu_k}_{k,pr}\|\\
\le ((1-\omega_{k,po})^{\nu_k}+c_4h^{s\alpha})\,(1+c_5h^{-1}_kc_r)(1-\frac{d_2}{k^4})^{\mu_k}
\end{gathered}
$$

Суммируя полученные оценки и выбирая подходящую константу c, мы доказываем теорему. □

Из результата для двухсеточного метода из теоремы 3.7, следует теорема о сходимости многосеточного метода.

Теорема 3.8. *Пусть выполняются условия на количество сглаживающих итераций вида:*

$$\nu_k \ge c_{po}k, \quad \mu_k \ge c_{pr}\,k^4$$

с подходящими константами c_{po}, c_{pr}, а k_0 достаточно велико. Справедлива следующая оценка для показателя сходимости W-цикла:

$$\|M^{\mathrm{mgm}}_k\|_{A^TA}\le \xi^* \tag{3.67}$$

с константой $\xi^*<1$, не зависящей от k и ε. Константы c_{po}, c_{pr} и k_0 так же не зависят от k и ε.

Доказательство. Пусть константы c_{po}, c_{pr} и α выбраны такими, что

$$\|T_k\|_{A_k^T A_k} \le q < 1, \quad \forall\, k > 1$$

с достаточно малым q, и выполнено предположение леммы 3.11. Этого всегда можно добиться для достаточно больших, но не зависящих от k и ε, констант c_{po}, c_{pr} и α. Значение α влечет выбор достаточно большого k_0 (см. стр. 196).

Обозначим $\xi_k := \|M_k^{\mathrm{mgm}}\|_{A_k^T A_k}$. Из рекурсивного соотношения (3.27) для M_k^{mgm} непосредственно следует

$$\begin{aligned}
\xi_k \le \|T_k\|_{A_k^T A_k} + \Big(&\|\tilde{S}_{k,po}\|^{\nu_k}\|J_k^E A_k p_k A_{k-1}^{-1}\| \\
&+\|\tilde{S}_{k,po}^{\nu_k}(I - J_k^E)\|\|A_k p_k A_{k-1}^{-1}\|\Big)\, \xi_{k-1}^2\|r_k\|\|\tilde{S}_{k,pr}\|^{\mu_k} \\
\le \|T_k\|_{A_k^T A_k} + (c_3 + &((1-\omega_{k,po})^{\nu_k} + c_4 h^{s\alpha})\, c_5 h_k^{-1})\xi_{k-1}^2 c_r \le q + c\,\xi_{k-1}^2.
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Теперь стандартные рассуждения о неподвижной точки для соотношения (3.68) доказывают теорему. □

Замечание 3.3. Подсчитаем арифметическую сложность одного W-цикла. Умножение матрицы на вектор на k-м уровне имеет сложность порядка $\mathcal{O}(N_k) = \mathcal{O}(n_k^2)$. Сложность одной сглаживающей итерации имеет порядок $\mathcal{O}(N_k) + \mathcal{O}\big(n_k(\ln n_k)^3\big)$. Число сглаживаний имеет зависимость от k вида $\nu_k \sim k$ и $\mu_k \sim k^4$. Поэтому вычисления на k-м уровне требуют $\mathcal{O}\big(N_k(\ln N_k)^4\big)$ арифметических операций. В силу стандартных рассуждений (см. [94] глава 10 или [168] упр. 2.1) W-цикл многосеточного метода имеет арифметическую сложность порядка $\mathcal{O}(N_k(\ln N_k)^4)$, т.е. квазиоптимальную сложность.

3.3.5 Численные примеры.

В данном разделе приведены результаты нескольких численных экспериментов, цель которых показать, что анализ диссертации отражает некоторые важные особенности метода и задачи и в некотором смысле точен. В то же время мы увидим, что на практике можно не следовать предположениям об увеличении числа сглаживаний из теоремы 3.8 о сходимости метода.

В вычислениях использовались следующие значения параметров: $\bar{\delta}$ из (2.24) равно $\frac{1}{2}$. Эксперименты показали, что в сглаживающих итерациях нет необходимости решать систему около границы вытекания "точно". Поэтому мы используем немного упрощённый вид сглаживаний: пре- и постсглаживания – такие, как в (3.24) с $\omega_k = 1$ и $W_k = 4\frac{\varepsilon}{h_k^2}I + D_x$ (сравните с (3.26)). В качестве правой части брался вектор случайных чисел, и нулевой вектор, как начальное приближение. Критерий остановки итераций – относительное уменьшение невязки в 10^9 раз. Таким образом, сходимость оценивалась в норме $\|\cdot\|_{A^TA}$. Ниже используется стандартное обозначение: $Pe_h := \frac{h}{2\varepsilon}$.

В этом разделе были доказаны результаты о сходимости W-цикла. Далее мы приводим результаты вычислений для стандартного V-цикла многосеточного метода с $\mu_k = \nu_k = 2$. В таблице 3.1 приведено число итераций, необходимое для выполнения заданного критерия остановки и (в скобках) усреднённый показатель сходимости. Эти результаты показывают универсальность многосеточного метода. Количество итераций для W-цикла во всех экспериментах было немногим меньше, чем для V-цикла.

Таблица 3.1: Сходимость многосеточного метода: V-цикл с $\nu_k = \mu_k = 2$

	h			
Pe_h	1/8	1/32	1/128	1/512
1	**9**(0.09)	**12**(0.15)	**11**(0.15)	**12**(0.15)
10	**7**(0.05)	**8**(0.07)	**8**(0.07)	**8**(0.07)
1e+3	**10**(0.12)	**11**(0.15)	**11**(0.15)	**11**(0.15)
1e+5	**10**(0.12)	**11**(0.15)	**11**(0.15)	**11**(0.15)

Число итераций и усреднённый показатель сходимости

Ряд численных экспериментов приведём для задачи с условиями Неймана на Γ_E. Эти результаты носят общий характер для условий Неймана и в условий Дирихле на Γ_E. Во-первых, как оценка (3.55) из леммы 3.13 говорит, что сглаживающие итерации быстро сходятся около границы втекания Γ_W. Для иллюстрации утверждения леммы 3.13 вычислим показатель сходимости сглаживающих итераций в норме $\|\Phi_k^{\frac{1}{2}}\cdot\|$, где $\Phi_k := I_{n_{k-1}} \otimes \operatorname{diag}(\phi)$ и

$$\phi_i = \begin{cases} 1 & \text{если } 1 \le i < 5, \\ \exp(4-i) & \text{если } 5 \le i \le n_k \end{cases}$$

Параметр релаксации ω в сглаживателе выбирался здесь равным 1.2. Результаты показаны в таблице 3.2

Таблица 3.2: Сходимость сглаживаний в $\|\Phi^{\frac{1}{2}} \cdot \|$-норме.

	h			
Pe_h	1/8	1/32	1/128	1/512
1	**93**(0.8)	**131**(0.85)	**133**(0.85)	**133**(0.85)
10	**23**(0.40)	**28**(0.47)	**28**(0.47)	**28**(0.47)

Число итераций и усреднённый показатель сходимости

Однако глобально, т.е., например, в евклидовой норме, сходимость сглаживающих итераций, как и следовало ожидать, зависит от h – результаты экспериментов приведены в таблице 3.3.

Таблица 3.3: Зависимость от h глобальной сходимости сглаживающих итераций

	h			
Pe_h	1/8	1/32	1/128	1/512
1	**119**(0.83)	**244**(0.91)	**533**(0.94)	**1495**(0.986)
10	**26**(0.44)	**51**(0.61)	**66**(0.72)	**173**(0.88)

Число итераций и усреднённый показатель сходимости

Традиционный анализ сходимости многосеточного метода базируется на оценках для $\|(A_h^{-1} - pA_{2h}^{-1}r)\|$ (свойство аппроксимации) и $\|A_h S_h^{\nu}\|$ (свойство сглаживания). Численные эксперименты показали что в нашем случае, по-видимому, невозможно получить такие оценки, которые в произведении дадут не зависящую от ν и ε константу. Для $\varepsilon = h^2$ результаты некоторых экспериментов показаны в таблице 3.4. Оценки норм операторов получены, как результат вычисления выражений

$$\frac{\|(A_h^{-1} - pA_{2h}^{-1}r)\mathrm{f}\|}{\|\mathrm{f}\|} \quad \text{и} \quad \frac{\|(A_h S_h^2)\mathrm{f}\|}{\|\mathrm{f}\|}$$

для вектора $\mathrm{f} \in \mathbb{V}_h$, равного 1 в узле $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и нулю в остальных узлах. Результаты указывают на $\mathcal{O}(h^{-1})$ зависимость для свойства сглаживания, что было ожидаемо, и $\mathcal{O}(\sqrt{h})$ зависимость для свойства аппроксимации. Поэтому традиционное разложение матрицы двухсеточного метода не подходит для задачи конвекции-диффузии для доказательства универсальных оценок.

Таблица 3.4: Стандартные свойства сглаживания и аппроксимации.

	h			
Оценки для	1/8	1/32	1/128	1/512
$\|A_h^{-1} - pA_{2h}^{-1}r\|$	8.4e-2	5.0e-2	2.7e-2	1.4e-2
$\|A_h S_h^2\|$	1.25	4.48	17.7	70.8

Таблица 3.5: Свойство аппроксимации для f_k отличной от нуля около Γ_E

	h			
Pe_h	1/8	1/32	1/128	1/512
1	0.31	0.60	1.23	2.53
10	0.07	0.17	0.23	0.46

Values of $\frac{\varepsilon}{h^2}\|(A_h^{-1} - pA_{2h}^{-1}r)\mathrm{f}\|/\|\mathrm{f}\|$.

Модифицированное свойство аппроксимации, лежащее в основе нашего анализа, состоит в получении равномерной оценки для $\|W_h(A_h^{-1} - pA_{2h}^{-1}r)\|$, где W_h – переобуславливатель в сглаживающих итерациях. В работе такая оценка была доказана при дополнительных ограничениях: во-первых, вектор правой части должен быть равен нулю около Γ_W, во-вторых, норма должна вычисляться по подобласти, отделённой от Γ_E. Математически это отражено в введении подходящей функции (матрицы) срезки Φ_h и проектора J_h^E в модифицированное свойство аппроксимации:

$$\|J_h^E W_h(A_h^{-1} - pA_{2h}^{-1}r)(I - \Phi_h)\| \le c_a.$$

Численные эксперименты показывают, что оба предположения необходимы. Причём первое из них, как для задачи Дирихле, так и Неймана.

Для иллюстрации этого утверждения мы проделали несколько численных экспериментов с вектором f_k равным единице в узлах (h_k, jh_k), $j = 1, \dots, n_k$ и нулю в остальных. Результаты для задачи с условиями Неймана на Γ_E можно найти в таблице 3.5. Наблюдается возрастание "константы" из свойства аппроксимации порядка $h_k^{-\frac{1}{2}}$. Этот эффект вынудил нас ввести в анализ оператор срезки Φ_k.

Второе предположение (о том, что норма в свойстве аппроксимации должна вычисляться по подобласти, отделённой от Γ_E), необходимо только для задачи Дирихле. В частности оно необходимо и для равномерной оценки нормы матрицы $A_h\, pA_{2h}^{-1}r$. Его отсутствие приводит к зависимости "констант" от h. Так в таблице 3.6 приведено значение

$$\|A_h\, pA_{2h}^{-1}r\, \mathrm{f}\|/\|\mathrm{f}\|,$$

где f – вектор со значениями 1 во всех внутренних узлах. Различие в зависимости от h для операторов с условиями Дирихле и Неймана на Γ_E хорошо заметно.

Таблица 3.6: Эффект погран. слоя около границы вытекания.

	h			
Условия на Γ_E	1/8	1/32	1/128	1/512
$Pe_h = 1$				
Неймана	1.16	1.05	1.02	1.01
Дирихле	1.29	2.26	4.54	9.29
$Pe_h = 10$				
Неймана	1.10	1.02	1.01	1.00
Дирихле	1.47	2.81	5.58	11.17

Значения $\|A_h\, pA_{2h}^{-1}r\, \mathrm{f}\|/\|\mathrm{f}\|$.

Остановимся на роли постсглаживаний. Помимо глобального сглаживающего свойства (следствие 3.12) в нашем анализе им отведена еще одна роль – быстро подавлять ошибку около границы вытекания Γ_E (следствие 3.3), что позволяло нам ввести в анализ проектор J_k^E. Таблица 3.7 иллюстрирует этот феномен. В данном эксперименте правая часть системы отлична от нуля только в 4-х столбцах узлов около Γ_E, а в качестве итераций используются только сглаживания на самой мелкой сетке. Критерий остановки – такой же, как и ранее. Легко видеть, что равномерная оценка (по h и ε) имеет место.

Таблица 3.7: Сходимость сглаживающих итераций около Γ_E.

	h			
Pe_h	1/8	1/32	1/128	1/512
1	**98**(0.81)	**131**(0.85)	**129**(0.85)	**130**(0.85)
10	**28**(0.47)	**33**(0.53)	**33**(0.53)	**33**(0.58)

Число итераций и усреднённый показатель сходимости.

Обсудим предположение из теоремы 3.8 на число пред- и постсглаживаний. Оно имеет вид: $\mu = O(k^4)$ и $\nu = O(k)$. Зависимость $\nu = O(k)$, по-видимому, необходима для получения однородной оценки на норму матрицы итераций. Действительно, в таблице 3.8 приведён показатель сходимости метода на *первой* итерации при $\mu = 0$. При фиксированном ν наблюдается рост порядка $O(h^{-\frac{1}{2}})$, в то время, как $\nu = O(k)$ обеспечивает однородную оценку. Напомним, что мы использовали упрощенные сглаживания, введение в W_k блока A_k^{2E}, т.е. решение задачи около границы вытекания точно, возможно, уберет данную зависимость. Зависимость μ от k, видимо, вызвана несовершенством техники доказательства. В проведенных нами экспериментах необходимость в увеличении количества предсглаживаний не была замечена. Наконец, результаты из таблицы 3.9 показывают, что на практике и μ, и ν можно выбирать малыми и не зависящими от номера сеточного уровня, – рост ошибки на первой итерации происходит локально около границы вытекания, на последующих итерациях ошибка равномерно уменьшается во всей области.

Таблица 3.8: Показатель сходимости на первой итерации.

	h			
	1/64	1/128	1/256	1/512
$\nu = k - 4$	0.55	0.51	0.51	0.52
$\nu = 2$	0.55	0.78	1.13	1.61

3.4 Система уравнений с кососимметричной реакцией.

Рассмотрим прямое произведение конечно-элементных пространств $\mathbf{V}_k = \mathbb{V}_k \times \mathbb{V}_k$. Аналогично определениям из раздела 3.1 для изоморфизма между пространством конечно-элементных функций и пространством коэффициентов будем использовать следующие обозначения:

$$Q_k : \mathbb{X}_k := \mathbb{R}^{2N_k} \to \mathbf{V}_k, \quad Q_k \mathbf{x} = Q_k \begin{pmatrix} \mathrm{x}^1 \\ \mathrm{x}^2 \end{pmatrix} = P_k \mathrm{x}^1 \times P_k \mathrm{x}^2, \quad \mathrm{x}^{1,2} \in \mathbb{R}^{N_k}.$$

Для $\mathbb{Q}_k$ справедлива эквивалентность нормировок (3.1). Матрица жёсткости $L_k : \mathbb{R}^{2N_k} \to \mathbb{R}^{2N_k}$ на каждом сеточном уровне k задаётся соотношением (3.2). Эта матрица имеет блочную структуру

$$L_k = \begin{pmatrix} \varepsilon A + \alpha M & -M_w \\ M_w & \varepsilon A + \alpha M \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \langle A\mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle_k &= (\nabla P_k \mathrm{x}, \nabla P_k \mathrm{y}) \,, \quad \langle M\mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle_k = (P_k \mathrm{x}, P_k \mathrm{y}) \,, \\ \langle M_w \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle_k &= (w P_k \mathrm{x}, P_k \mathrm{y}) \end{aligned} \tag{3.69}$$

для всех $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^{N_k}$. Заметим, что A – матрица жёсткости для одной компоненты скорости, M – матрица масс, M_w – матрица типа масс для билинейной формы $[x, y] \to (wx, y)$, которая не обязательно задаёт скалярное произведение. Матрицы A, M, M_w являются симметричными, а A и M положительно определёнными.

Продолжения и проекция – канонические:

$$\begin{aligned} & p_k : \mathbb{X}_{k-1} \to \mathbb{X}_k, \quad p_k = Q_k^{-1} Q_{k-1} \\ & r_k : \mathbb{X}_k \to \mathbb{X}_{k-1}, \quad r_k = Q_{k-1}^* (Q_k^*)^{-1} = \left(\tfrac{h_k}{h_{k-1}}\right)^2 p_k^T. \end{aligned} \tag{3.70}$$

В качестве сглаживающих итераций рассмотрим блочный метод типа Якоби, т.е. базовые итерации (3.6) с переобуславливателем

$$W_k = \omega^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(\varepsilon A + \alpha M) & -\mathrm{diag}(M_w) \\ \mathrm{diag}(M_w) & \mathrm{diag}(\varepsilon A + \alpha M) \end{pmatrix}, \tag{3.71}$$

и параметром релаксации $\omega \in (0,1]$. Этот тип сглаживаний будет нами использоваться в численных экспериментах из раздела 3.4.4. Анализ сходимости многосеточного метода мы в целях упрощения изложения проведём для метода типа блочного Ричардсона:

$$W_k = \begin{pmatrix} \beta_1 I & -\beta_2 I \\ \beta_2 I & \beta_1 I \end{pmatrix}, \tag{3.72}$$

где I – единичные матрицы, а β_1, β_2 – подходящие константы.

3.4.1 Свойство аппроксимации.

Теорема 3.9. *Пусть выполняются предположения (A1) – (A3), тогда*

$$\|L_k^{-1} - p_k\, L_{k-1}^{-1} r_k\| \le C \left(\frac{\varepsilon}{h_k^2} + \alpha + \|w\|_\infty\right)^{-1} \le C\|L_k\|^{-1}. \tag{3.73}$$

Доказательство. Возьмём $\mathbf{y}_k \in \mathbb{X}_k$. Как обычно, константы C в доказательстве не зависят от параметров: ε, α или k. Пусть $\mathbf{s}^* \in \mathbf{H}_0^1$, $\mathbf{s}_k \in \mathbf{V}_k$, и $\mathbf{s}_{k-1} \in \mathbf{V}_{k-1}$ такие, что

$$\begin{aligned} a(\mathbf{s}^*, \mathbf{v}) &= ((Q_k^*)^{-1}\mathbf{y}_k, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1, \\ a(\mathbf{s}_k, \mathbf{v}) &= ((Q_k^*)^{-1}\mathbf{y}_k, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_k, \\ a(\mathbf{s}_{k-1}, \mathbf{v}) &= ((Q_k^*)^{-1}\mathbf{y}_k, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_{k-1}. \end{aligned}$$

Полагая $\mathbf{f} = (Q_k^*)^{-1}\mathbf{y}_k \in L_2(\Omega)^2$ в теореме 2.3, мы получаем

$$\|\mathbf{s}^* - \mathbf{s}_l\| \le C \min\left\{\frac{h_l^2}{\varepsilon}, \frac{1}{\alpha + \|w\|_\infty}\right\} \|(Q_k^*)^{-1}\mathbf{y}_k\| \quad \text{для } l \in \{k-1, k\}.$$

В силу $h_{k-1} \le c h_k$ это влечёт

$$\|\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_{k-1}\| \le C \min\left\{\frac{h_k^2}{\varepsilon}, \frac{1}{\alpha + \|w\|_\infty}\right\} \|(Q_k^*)^{-1}\mathbf{y}_k\|\ .$$

Из (3.2) и (3.70) следует, что $\mathbf{s}_k = Q_k L_k^{-1}\mathbf{y}_k$ и $\mathbf{s}_{k-1} = Q_{k-1} L_{k-1}^{-1} r_k \mathbf{y}_k$. Теперь, используя (3.1), получаем

$$\begin{aligned} \|(L_k^{-1} - p_k L_{k-1}^{-1} r_k)\mathbf{y}_k\| &\le C\|Q_k L_k^{-1}\mathbf{y}_k - Q_{k-1} L_{k-1}^{-1} r_k \mathbf{y}_k\| = C\|\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_{k-1}\| \\ &\le C \min\left\{\frac{h_k^2}{\varepsilon}, \frac{1}{\alpha + \|w\|_\infty}\right\} \|(Q_k^*)^{-1}\mathbf{y}_k\| \\ &\le C \min\left\{\frac{h_k^2}{\varepsilon}, \frac{1}{\alpha + \|w\|_\infty}\right\} \|\mathbf{y}_k\|\ . \end{aligned}$$

Заметим, что $\min\{\frac{1}{p},\frac{1}{q}\} \le \frac{2}{p+q}$ для всех $p,q>0$. Следовательно, первое неравенство в (3.73) доказано. Для проверки второго неравенства в (3.73) запишем

$$\begin{aligned}\|L_k\| &= \left\| \begin{pmatrix} \varepsilon A+\alpha M & \emptyset \\ \emptyset & \varepsilon A+\alpha M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \emptyset & -M_w \\ M_w & \emptyset \end{pmatrix} \right\| \\ &\le \|\varepsilon A+\alpha M\| + \|M_w\| \le \varepsilon\|A\| + (\alpha+\|w\|_\infty)\|M\| \ .\end{aligned}$$

Используя $\|A\| \le Ch_k^{-2}$ и $\|M\| \le C$, получаем $\|L_k\| \le C(\varepsilon h_k^{-2}+\alpha+\|w\|_\infty)$ $\square$

3.4.2 Свойство сглаживания для блочного метода Якоби.

Пусть a_1, m_1 – положительные константы, не зависящие от ε, α и k такие, что для спектральных радиусов матриц в (3.69) справедливы оценки

$$\rho(A) \le \frac{a_1}{h_k^2}, \quad \rho(M) \le m_1.$$

Далее, пусть $w_{\min} = \text{ess}\ \inf_\Omega w$ и $w_{\max} = \text{ess}\ \sup_\Omega w$, определим

$$C_w = \begin{cases} w_{\max} & \text{если } w_{\max} \ge -w_{\min} \\ w_{\min} & \text{если } w_{\max} < -w_{\min}\ . \end{cases}$$

Заметим, что $|C_w| = \|w\|_\infty$. В рассуждениях ниже мы будем использовать следующий простой результат.

Лемма 3.19. *Пусть для $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $\Lambda \in (0,\infty)$ выполнено $B^TB \le \Lambda(B+B^T)$. Тогда $\|I-\omega B\| \le 1$ справедливо для $\omega \in [0,\frac{1}{\Lambda}]$.*

Утверждение леммы вытекает из неравенств

$$\begin{aligned} 0 \le (I-\omega B)^T(I-\omega B) &= I - \omega(B+B^T) + \omega^2 B^TB \\ &\le I - \omega(1-\omega\Lambda)(B+B^T) \le I\ . \qquad \square \end{aligned}$$

Используя эту лемму мы докажем, что норма матрица итераций сглаживаний меньше 1:

Лемма 3.20. *Предположим, что условия (A1) и (A2) выполнены. Рассмотрим базовый итерационный метод с W_k, как в (3.72) и*

$$\beta_1 = \frac{\varepsilon a_1}{h_k^2} + \alpha\kappa_1 m_1, \quad \beta_2 = \kappa_2 C_w, \quad \text{с константами}$$
$$\kappa_1 \geq 2(1+\eta^2)\ , \quad \kappa_2 \geq 4m_1\eta\ . \tag{3.74}$$

Тогда выполняется неравенство

$$\|I - W_k^{-1}L_k\| \leq 1.$$

Доказательство. Непосредственные вычисления влекут

$$W_k^{-1}L_k = R_1 + R_2\ , \qquad \text{с} \tag{3.75}$$
$$R_1 = \frac{\varepsilon}{\beta_1^2+\beta_2^2}\begin{pmatrix} \beta_1 A & \beta_2 A \\ -\beta_2 A & \beta_1 A \end{pmatrix},$$
$$R_2 = \frac{1}{\beta_1^2+\beta_2^2}\begin{pmatrix} \beta_1\alpha M + \beta_2 M_w & \beta_2\alpha M - \beta_1 M_w \\ -\beta_2\alpha M + \beta_1 M_w & \beta_1\alpha M + \beta_2 M_w \end{pmatrix}.$$

Из

$$\frac{1}{2}(R_1^T + R_1) = \frac{\varepsilon\beta_1}{\beta_1^2+\beta_2^2}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad R_1^T R_1 = \frac{\varepsilon^2}{\beta_1^2+\beta_2^2}\begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$$

следует, что

$$R_1^T R_1 \leq \frac{1}{2}(R_1^T + R_1) \ \Leftrightarrow\ \varepsilon A \leq \beta_1 I \ \Leftrightarrow\ \varepsilon A \leq (\frac{\varepsilon a_1}{h_k^2} + \alpha\kappa_1 m_1)I\ .$$

Последнее неравенство выполняется в силу $\rho(A) \leq \frac{a_1}{h_k^2}$ и $\alpha\kappa_1 m_1 \geq 0$. Применение леммы 3.19 влечёт оценку

$$\|I - 2R_1\| \leq 1\ . \tag{3.76}$$

Для матрицы R_2 получаем:

$$\frac{1}{2}(R_2^T + R_2) = \frac{1}{\beta_1^2+\beta_2^2}\begin{pmatrix} \beta_1\alpha M + \beta_2 M_w & \emptyset \\ \emptyset & \beta_1\alpha M + \beta_2 M_w \end{pmatrix},$$
$$R_2^T R_2 = \frac{1}{\beta_1^2+\beta_2^2}\begin{pmatrix} \alpha^2 M^2 + M_w^2 & \alpha(M_w M - M M_w) \\ -\alpha(M_w M - M M_w) & \alpha^2 M^2 + M_w^2 \end{pmatrix}.$$

Будем использовать обозначение $\hat{M} = \beta_1 \alpha M + \beta_2 M_w$. Обратим внимание, что неравенство $R_2^T R_2 \le \frac{1}{2}(R_2^T + R_2)$ выполняется, если выполняется два других неравенства

$$\alpha^2 M^2 + M_w^2 \le \frac{1}{2}\hat{M}\ , \tag{3.77}$$

$$\alpha|\langle (M_w M - M M_w)\mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle_k| \le \frac{1}{4}\Big(\langle \hat{M}\mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle_k + \langle \hat{M}\mathrm{y}, \mathrm{y}\rangle_k\Big), \tag{3.78}$$

для всех $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^{N_k}$. Сначала рассмотрим (3.77). Имеем $M_w^2 \le \|w\|_\infty^2 M^2 \le m_1 \|w\|_\infty^2 M$. В силу условия (A2) матрица M_w знако-определена и $C_w M_w$ положительно определена, более того, $C_w M_w \ge |C_w| c_w M = \|w\|_\infty c_w M$. Используя это, получаем

$$\alpha^2 M^2 + M_w^2 \le (m_1 \alpha^2 + m_1 \|w\|_\infty^2) M,$$
$$\frac{1}{2}\hat{M} \ge \frac{1}{2}(\kappa_1 m_1 \alpha^2 M + \kappa_2 C_w M_w) \ge \frac{1}{2}(\kappa_1 m_1 \alpha^2 + \kappa_2 \|w\|_\infty c_w) M.$$

Следовательно, (3.77) выполняется, если

$$m_1 \alpha^2 + m_1 \|w\|_\infty^2 \le \frac{1}{2}(\kappa_1 m_1 \alpha^2 + \kappa_2 \|w\|_\infty c_w).$$

Подстановка $\|w\|_\infty = \eta(\alpha + c_w)$ и перегруппировка слагаемых приводит к оценке

$$\alpha^2 m_1 (\frac{1}{2}\kappa_1 - (1+\eta^2)) + \alpha c_w \eta (\frac{1}{2}\kappa_2 - 2 m_1 \eta) + \eta c_w^2 (\frac{1}{2}\kappa_2 - m_1 \eta) \ge 0\ .$$

Это неравенство выполнено для κ_1, κ_2 из (3.74). Следовательно, при κ_1, κ_2 из (3.74) неравенство (3.77) выполняется. Для доказательства (3.78) заметим, что

$$\begin{aligned}
\alpha|\langle (M_w M - M M_w)\mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle_k| &\le \alpha(\langle |M_w M \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle_k| + \alpha|\langle M M_w \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle_k|, \\
\alpha|\langle M_w M \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle_k| &= \alpha|\langle M\mathrm{x}, M_w \mathrm{y}\rangle_k| \\
&\le \tfrac{1}{2}\big(\alpha^2 \langle M^2 \mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle_k + \langle M_w^2 \mathrm{y}, \mathrm{y}\rangle_k\big), \\
\alpha|\langle M M_w \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle_k| &= \alpha|\langle M_w \mathrm{x}, M\mathrm{y}\rangle_k| \\
&\le \tfrac{1}{2}\big(\langle M_w^2 \mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle_k + \alpha^2 \langle M^2 \mathrm{y}, \mathrm{y}\rangle_k\big).
\end{aligned}$$

Таким образом (3.78) следует из (3.77). Приходим к заключению, что (3.78) и (3.77) выполняется для κ_1, κ_2 из (3.74). Следовательно, $R_2^T R_2 \le \frac{1}{2}(R_2^T + R_2)$. И благодаря лемме 3.19 имеем

$$\|I - 2R_2\| \le 1\ . \tag{3.79}$$

Наконец, (3.75), (3.76) и (3.79) влекут

$$\|I - W_k^{-1} L_k\| = \|I - (R_1 + R_2)\| \le \frac{1}{2}\|I - 2R_1\| + \frac{1}{2}\|I - 2R_2\| \le 1 \ .$$

□

Теорема 3.10. *Предположим, что условия (A1) и (A2) выполнены. Рассмотрим базовый итерационный метод с* W_k*, как в* (3.72) *и*

$$\beta_1 = 2(\frac{\varepsilon a_1}{h_k^2} + \alpha\kappa_1 m_1), \quad \beta_2 = 2\kappa_2 C_w,$$

с константами κ_1*,* κ_2 *из* (3.74)*. Тогда справедлива оценка*

$$\|L_k S_k^{\mu_1}\| \le \frac{C}{\sqrt{\mu_1}} \big(\frac{\varepsilon}{h^2} + \alpha + \|w\|_\infty\big), \quad \mu_1 = 1, 2, \dots \tag{3.80}$$

Доказательство. Из леммы 3.20 получаем

$$\|I - 2W_k^{-1} L_k\| \le 1. \tag{3.81}$$

Более того,

$$\begin{aligned} \|W_k\| &= \rho\Big(\begin{pmatrix} \beta_1 I & -\beta_2 I \\ \beta_2 I & \beta_1 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 I & \beta_2 I \\ -\beta_2 I & \beta_1 I \end{pmatrix} \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\beta_1^2 + \beta_2^2)^{\frac{1}{2}} \le \beta_1 + \beta_2 \le C(\frac{\varepsilon}{h^2} + \alpha + \|w\|_\infty) \ . \end{aligned} \tag{3.82}$$

Теперь (3.81), (3.82) и теорема 10.6.8 из [94] влекут оценку (3.80). □

3.4.3 Универсальная сходимость W-цикла.

В предыдущих двух параграфах мы доказали справедливость свойств сглаживания и аппроксимации:

$$\|L_k^{-1} - p_k\, L_{k-1}^{-1} r_k\| \ \le \ C\,\big(\frac{\varepsilon}{h^2} + \alpha + \|w\|_\infty\big)^{-1} \tag{3.83}$$

$$\|L_k S_k^{\mu}\| \ \le \ \frac{C}{\sqrt{\mu}}\,\big(\frac{\varepsilon}{h^2} + \alpha + \|w\|_\infty\big) \tag{3.84}$$

Прямым следствием (3.83) и (3.84) является оценка для матрицы итераций двухсеточного метода

$$\|(I - p_k L_{k-1}^{-1} r_k L_k) S_k^{\mu}\| \le \frac{C}{\sqrt{\mu}} \ . \tag{3.85}$$

В параграфе 3.4.2 была доказана оценка $\|S_k\| \le 1$. Используя её и свойства (3.83), (3.84), Теорема 10.6.25 из [94] влечёт следующий результат:

Теорема 3.11. *Предположим выполнение условий (A1) – (A3), тогда для любого $\psi \in (0,1)$ существует $\bar{\mu}_0 > 0$, не зависящее от параметров задачи ε, α и сеточного уровня k, такое что для матрицы итераций W-цикла со сглаживаниями (3.72) мы получаем*

$$\|M_k(\mu, 0)\| \le \psi \quad \forall\, \mu \ge \bar{\mu}_0. \qquad \square$$

Теорема доказывает универсальную сходимость W-цикла относительно параметров задачи ε и α и шага сетки h_k.

3.4.4 Численные примеры.

В этом разделе даны результаты применения V-цикла многосеточного метода. Результаты для W-цикла весьма похожи. В качестве сглаживаний используем блочный метод типа Якоби (3.71). В нем для нахождения значений пары $\{u_1, u_2\}$ для каждого узла требуется найти решение линейной системы размера 2×2. Параметр релаксации ω на каждом шаге сглаживаний вычисляется динамически на основе критерия минимизации невязки: полагаем $\omega = (\mathbf{q}, \mathbf{q})/(\mathbf{q}, \mathbf{r})$, где на k-ом сеточном уровне

$$\mathbf{r} = \bar{W}_k^{-1}(L_k \mathbf{x}^{old} - b), \quad \mathbf{q} = \bar{W}_k^{-1} L_k \mathbf{r},$$

и $\bar{W}_k$ совпадает с W_k из (3.71) для $\omega = 1$.

Количество пред- и пост-сглаживающих итераций всюду равно двум. В качестве начального приближения полагаем $\mathbf{u}^0 = 0$. Критерием остановки служит относительное уменьшение невязки в 10^9 раз относительно исходной.

Функция w в численных экспериментах выбирается так же как в разделе 2.3.3: примеры Ia, Ib и II. К этим тестам добавляется еще пример III с потоком $\mathbf{v}$ моделирующим наличие внутреннего слоя.

Во всех таблицах показаны результаты для $\alpha = 0$. При $\alpha > 0$ численные эксперименты демонстрировали только лучшие результаты, чем при $\alpha = 0$.

Для w из (2.83) показатели сходимости при различных значений h и ε даны в таблице 3.9. Напомним, что в данном случае для w условия (A2)

Таблица 3.9: Сходимость V-цикла для w из (2.83).

	h				
ε	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512
1	**11**(0.15)	**11**(0.15)	**11**(0.15)	**11**(0.15)	**11**(0.15)
1e-2	**11**(0.14)	**11**(0.14)	**11**(0.14)	**11**(0.15)	**11**(0.15)
1e-4	**6**(0.03)	**7**(0.05)	**9**(0.10)	**11**(0.14)	**11**(0.15)
1e-6	**5**(0.01)	**5**(0.01)	**5**(0.01)	**7**(0.04)	**7**(0.05)
1e-8	**5**(0.01)	**5**(0.01)	**5**(0.01)	**5**(0.01)	**5**(0.01)

Количество итераций и средний показатель сходимости.

и (A3) выполнены. А условие (A1) "почти" выполнено (см. обсуждение в § 2.3.3). Для w из (2.84) показатели сходимости при различных значений h и ε практически совпадают с результатами из таблицы 3.9.

Для w из (2.85) показатели сходимости при различных значений h и ε даны в таблице 3.10. Заметим, что условия (A1) и (A2) на w в этом случае не выполняются, поэтому теория сходимости из предыдущих разделов здесь неприменима.

Таблица 3.10: Сходимость V-цикла для w из (2.85).

	h				
ε	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512
1	**11**(0.15)	**11**(0.15)	**11**(0.15)	**11**(0.15)	**11**(0.15)
1e-2	**12**(0.16)	**11**(0.15)	**11**(0.15)	**11**(0.15)	**11**(0.15)
1e-4	**18**(0.30)	**17**(0.29)	**16**(0.26)	**14**(0.22)	**13**(0.19)
1e-6	**23**(0.40)	**29**(0.48)	**29**(0.49)	**28**(0.41)	**29**(0.48)
1e-8	**15**(0.24)	**19**(0.33)	**23**(0.40)	**28**(0.47)	**25**(0.43)

Количество итераций и средний показатель сходимости.

Пример III. В этом примере моделируется наличие внутреннего слоя. С этой целью в качестве конвективного поля выбирается течение Эйлера (предельный случай уравнений Навье-Стокса при $\varepsilon \to 0$), в котором тангенсальная компонента потока разрывна вдоль некоторой линии внутри области. В этом случае поток является потенциальным почти всюду, следовательно, его вихрь сконцентрирован вдоль этой линии (так называемый "vortex sheet"). Мы полагаем $w = \operatorname{curl} \mathbf{v}_d$, где $\mathbf{v}_d = (v_1, v_2)$ и для некоторого угла ψ,

$$\begin{cases} v_1(x,y) &= \cos\psi \\ v_2(x,y) &= \sin\psi \end{cases} \quad \text{если} \quad \cos\psi > (x-0.25)\sin\psi,$$

$$\begin{cases} v_1(x,y) &= 0 \\ v_2(x,y) &= 0 \end{cases} \quad \text{если} \quad \cos\psi \le (x-0.25)\sin\psi.$$

Меняя угол ψ можно менять угол с которым слой "входит"в область. Мы полагаем $\psi = \pi/3$, так чтобы сетка не была ориентирована вдоль слоя. В качестве дискретной скорости $\mathbf{v}_h^d \in \mathbf{V}_h$ мы берем нодальный интерполянт к $\mathbf{v}_d$, и полагаем $w = \operatorname{curl} \mathbf{v}_h^d$, получая кусочно-постоянную функцию w, которая существенно зависит от параметра дискретизации в силу разрывности $\mathbf{v}_d$ ($\|w\|_\infty = O(h^{-1})$). Показатели сходимости при различных значений h и ε даны в таблице 3.11. Если ψ выбирается так, что сетка ориентирована вдоль слоя, то в проведённых экспериментах результаты только улучшались.

Таблица 3.11: Сходимость V-цикла для w из примера III

ε	h = 1/32	1/64	1/128	1/256	1/512
1	**11**(0.15)	**11**(0.15)	**11**(0.15)	**11**(0.15)	**11**(0.15)
1e-2	**13**(0.20)	**13**(0.19)	**14**(0.22)	**14**(0.21)	**13**(0.19)
1e-4	**19**(0.33)	**19**(0.34)	**20**(0.35)	**21**(0.36)	**22**(0.38)
1e-6	**17**(0.29)	**20**(0.36)	**24**(0.42)	**28**(0.47)	**30**(0.50)
1e-8	**17**(0.29)	**20**(0.35)	**24**(0.42)	**28**(0.48)	**32**(0.53)

Количество итераций и средний показатель сходимости.

Хотя в примерах II и III показатели сходимости при малых ε несколько хуже, чем в примерах Ia и Ib. Многосеточный метод с блочным методом Якоби показал себя весьма универсальным.

3.5 Обобщённая система Стокса.

В этом разделе рассматриваются несколько итерационных методов для обобщённой задачи Стокса. Основной целью автора является доказательство универсальной оценки сходимости методов. Раздел начнется с определения матрично-векторной постановки задачи и описания в общем виде ряда переобусловленных блочных методов известных из литературы для решения систем уравнений с седловой точкой. Далее речь пойдет о конкретных переобусавливателях для обобщенной задачи Стокса. Заканчивается раздел обсуждением многосеточного метода.

Начнем с получения матрично-векторной формы системы (2.87). Напомним, что конечно-элементное пространство для давления $\mathbb{Q}_h$ получается рассмотрением пространства конечно-элементных функций, которое мы обозначим через $\mathbb{Q}_h^+$ (например, кусочно-линейные функции), и добавлением условия ортогональности:

$$\mathbb{Q}_h = \{\, p_h \in \mathbb{Q}_h^+ \mid (p_h, 1) = 0 \,\}$$

Как следствие $\dim(\mathbb{Q}_h) = \dim(\mathbb{Q}_h^+) - 1$. Пусть $n := \dim(\mathbb{V}_h)$, $m := \dim(\mathbb{Q}_h^+)$. Рассмотрим обычные узловые базисные функции в $\mathbb{V}_h$ и $\mathbb{Q}_h^+$ и соответствующие изоморфизмы

$$J_V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{V}_h, \ , \quad J_Q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{Q}_h^+ \ .$$

Матрицы жесткости $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и матрица масс $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ задаются с помощью соотношений

$$\begin{aligned}
&\langle A\mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = \varepsilon(\nabla J_V\mathrm{x}, \nabla J_V\mathrm{y}) + \alpha(J_V\mathrm{x}, J_V\mathrm{y}) + \xi(\operatorname{div} J_V\mathrm{x}, \operatorname{div} J_V\mathrm{y})\ \forall\, \mathrm{x},\mathrm{y} \in \mathbb{R}^n,\\
&\langle B\mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = (\operatorname{div} J_V\mathrm{x}, J_Q\mathrm{y}) \quad \forall\ \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathrm{y} \in \mathbb{R}^m\ ,\\
&\langle M\mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = (J_Q\mathrm{x}, J_Q\mathrm{y}) \quad \forall\ \mathrm{x},\mathrm{y} \in \mathbb{R}^m\ .
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Метод конечных элементов (2.87) для обобщённой задачи Стокса приводит к системе линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{f} \\ \mathrm{g} \end{pmatrix} \tag{3.87}$$

с правой частью (f, g) определяемой по формулам: $\langle \mathrm{f}, \mathrm{y}\rangle = (\mathbf{f}, J_V\mathrm{y})$ и $\langle \mathrm{g}, \mathrm{y}\rangle = (g, J_V\mathrm{x})$ с произвольными $\mathrm{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^m$. Дополнение по Шуру обозначается, как $S := BA^{-1}B^T$. Отметим, что S и матрица системы (3.87) имеют неполный ранг, их ядро одномерно. Определим постоянный вектор $\mathrm{e} := J_Q^{-1}1 = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^m$. Справедливо $\ker(S) = \operatorname{span}\{\mathrm{e}\}$. Более того,

$$(J_Q\mathrm{y}, 1) = 0 \ \Leftrightarrow\ (J_Q\mathrm{y}, J_Q\mathrm{e}) = 0 \ \Leftrightarrow \langle M\mathrm{y}, \mathrm{e}\rangle = 0 \ \Leftrightarrow\ \langle \mathrm{y}, M\mathrm{e}\rangle = 0 \tag{3.88}$$

Поэтому, определив

$$(M\mathrm{e})^{\perp} := \{\, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^m \mid \langle \mathrm{y}, M\mathrm{e} \rangle = 0 \,\}, \tag{3.89}$$

получаем $\mathbb{Q}_h = \{\, J_Q \mathrm{y} \mid \mathrm{y} \in (M\mathrm{e})^{\perp} \,\}$. Следовательно, матрично-векторная форма задачи (2.87) имеет вид:

$$\text{Найти } \ \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathrm{y} \in (M\mathrm{e})^{\perp} \ \text{ удовлетворяющие системе (3.87).} \tag{3.90}$$

3.5.1 Несколько итерационных методов

В этом параграфе рассмотрены несколько известных методов для решения систем алгебраических уравнений вида (3.87). Эти методы будут использоваться в численных экспериментах для решения систем типа Стокса и Осеена.

Предположим, что Q_A – переобуславливатель для A, а Q_S – переобуславливатель для S, причем Q_A, Q_S являются симметричными. Для некоторых методов нам необходимо будет предполагать такое масштабирование Q_A, что выполнены оценки

$$(1 - \sigma_A) Q_A \le A \le Q_A \tag{3.91}$$

с некоторой константой $\sigma_A < 1$.

Метод Узавы

Классическим методом решения систем вида (3.87) является метод Узавы. Применяя блочный метод исключения Гаусса к (3.87) получаем эквивалентную систему

$$\begin{pmatrix} I & A^{-1}B^T \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1}\mathrm{f} \\ BA^{-1}\mathrm{f} - \mathrm{g} \end{pmatrix}$$

Теперь система имеет блочно-треугольный вид, который приводит к *методы Узавы*:

$$1.\ \text{Решить систему } \ A\mathrm{z} = \mathrm{f} \tag{3.92}$$

$$2.\ \text{Решить систему } \ S\mathrm{y} = B\mathrm{z} - \mathrm{g}\ , \quad \mathrm{y} \in (M\mathrm{e})^{\perp} \tag{3.93}$$

$$3.\ \text{Решить систему } \ A\mathrm{x} = \mathrm{z} - B^T\mathrm{y} \tag{3.94}$$

Для выполнения шагов 1. и 3. будем использовать многосеточные методы, которые были изучены в предыдущих разделах. Для решения системы $S\mathrm{y} = B\mathrm{z}$ будем использовать переобусловленный метод сопряжённых градиентов (PCG). При каждом умножении матрицы S на вектор мы решаем систему с матрицей A с помощью многосеточного метода.

Оператор S имеет нетривиальное ядро: $S\mathrm{e} = 0$. Предположим, что на шаге 2 метода Узавы приближения $\mathrm{y}^1, \mathrm{y}^2, \dots$ получены с помощью PCG метода с переобуславливателем M и начальным приближением y^0, тогда

$$\mathrm{y}^k - \mathrm{y}^0 \in \operatorname{span}\big\{M^{-1}S\mathrm{e}^0, \dots, (M^{-1}S)^k\mathrm{e}^0\big\}, \quad \mathrm{e}^0 := \mathrm{y} - \mathrm{y}^0\ .$$

Следовательно, $\langle \mathrm{y}^k - \mathrm{y}^0, M\mathrm{e}\rangle = 0$ для $k \geq 1$, т.е., $\mathrm{y}^k - \mathrm{y}^0 \in (M\mathrm{e})^\perp$ для $k \geq 1$, и

$$\mathrm{y}^k \in (M\mathrm{e})^\perp \quad \text{для} \quad k \geq 1, \quad \text{если} \quad \mathrm{y}^0 \in (M\mathrm{e})^\perp \tag{3.95}$$

Это означает, что приближения остаются в подпространстве $(M\mathrm{e})^\perp$, если начальный вектор y^0 лежит в данном подпространстве. Так как решение y также ищется из подпространства $(M\mathrm{e})^\perp$ (см. 3.93)), то вектор ошибки $\mathrm{e}^k := \mathrm{y} - \mathrm{y}^k$ всегда остаётся в этом подпространстве, если $\mathrm{y}^0 \in (M\mathrm{e})^\perp$. Следовательно, для оценки скорости сходимости PCG метода нам будет достаточно оценивать спекральное число обусловленности переобусловленной матрицы на данном подпространстве.

На практике метод Узавы может быть не очень привлекательным, так как требует на каждом шаге точного решения системы с матрицей A. В данной работе метод Узавы будет использоваться для проверки и иллюстрации универсальности переобуславливателей для дополнения по Шуру. На практике используются различные варианты блочных переобусловленных методов для (3.87), не требующие точного обращения A (см., например, [36, 51, 75, 154, 166]). Два таких метода обсуждается ниже. Если быстрый метод обращения оператора A доступны, то метод Узавы является одним из самых эффективных, см. также вариант метода Узавы в [21].

Неточный метод Узавы

Приведем в этом параграфе неточный метод Узавы в том виде, как он изучается [51],[166]. Предположим, что помимо условия (3.91) для переобуславливателя Q_A выполнено следующее условие для Q_S

$$(1 - \sigma_S)\langle Q_S\mathrm{y}, \mathrm{y}\rangle \leq \langle S\mathrm{y}, \mathrm{y}\rangle \leq \langle Q_S\mathrm{y}, \mathrm{y}\rangle \quad \forall\ \mathrm{y} \in \mathbb{R}^m. \tag{3.96}$$

с некоторой константой $\sigma_S \in [0,1)$.

Неточный метод Узавы состоит в следующем: для заданных $\mathrm{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{y}_0 \in \mathbb{R}^m$ находить $(\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ из соотношений

$$\begin{aligned} \mathrm{x}_{i+1} &= \mathrm{x}_i + Q_A^{-1}(\mathrm{f} - (A\mathrm{x}_i + B^T\mathrm{y}_i)) \ , \\ \mathrm{y}_{i+1} &= \mathrm{y}_i + Q_S^{-1}(B\mathrm{x}_{i+1} - \mathrm{g}) \ . \end{aligned} \tag{3.97}$$

В работе [51] показано, что для ошибки $\mathrm{e}_i := \begin{pmatrix} \mathrm{x} - \mathrm{x}_i \\ \mathrm{y} - \mathrm{y}_i \end{pmatrix}$ справедлива оценка

$$[|e_i|] \le \rho^i [|e_0|] \quad \text{для} \ \ i = 0, 1, 2, \ldots$$

где $[|\cdot|]$ – некоторая норма, зависящая от матриц A, S, Q_A, Q_S и

$$\rho = \frac{\sigma_S(1-\sigma_A) + \sqrt{\sigma_S^2(1-\sigma_A)^2 + 4\sigma_A}}{2} \le 1 - \frac{1}{2}(1-\sigma_S)(1-\sigma_A) \ . \tag{3.98}$$

В силу данной оценки мы видим, что неточный метод Узавы быстро сходится, если имеются подходящие переобуславливатели Q_A и Q_S.

Отметим, что в силу однородных условий Дирихле на нормальную компоненты скорости на $\partial\Omega$ справедливо равенство $\langle B\mathrm{x}, \mathrm{e}\rangle = 0$ для любого $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что $\mathrm{y}_0 \in (M\mathrm{e})^\perp$ и $Q_S = M$, тогда из второго равенства в (3.97) выводим $\mathrm{y}_i \in (M\mathrm{e})^\perp$. Следовательно, для оценки сходимости неточного метода Узавы достаточно установить спектральную эквивалентность M и Q_S на подпространстве $(M\mathrm{e})^\perp$.

Метод MINRES

Рассмотрим переобусловленный метод MINRES. С этой целью определим положительно определенный симметричный переобуславливатель

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} Q_A & 0 \\ 0 & Q_S \end{pmatrix} \quad \text{для} \ \ \mathcal{A} := \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

и норму $\|\mathrm{w}\|_{\tilde{\mathcal{A}}} := \langle \tilde{\mathcal{A}}\mathrm{w}, \mathrm{w}\rangle^{\frac{1}{2}}$ для $\mathrm{w} \in \mathbb{R}^{n+m}$. Пусть w^0 – начальный вектор и $\mathrm{e}^0 := \mathrm{w}^* - \mathrm{w}^0$ – ошибка. В переобусловленном методе MINRES вычисляется вектор w^k из подпространства $\mathrm{w}^0 + \mathrm{span}\{\tilde{\mathcal{A}}^{-1}\mathcal{A}\mathrm{e}^0, \ldots, (\tilde{\mathcal{A}}^{-1}\mathcal{A})^k\mathrm{e}^0\}$ минимизирущий норму невязки $\|\tilde{\mathcal{A}}^{-1}\mathcal{A}(\mathrm{w}^* - \mathrm{w})\|_{\tilde{\mathcal{A}}}$ на этом подпространстве. Об эффективной реализации этого метода можно справиться в литературе, например в [29].

Если возьмём $Q_S = M$, то снова, как и на 2-ом шаге метода Узавы приближения и ошибки принадлежат подпространству $(M\mathrm{e})^{\perp}$, если начальное приближение y^0 лежит в нём. Из литературы (см. [136, 154]) известно, что переобусловленный метод MINRES быстро сходится, если используются "хорошие" переобуславливатели Q_A для A и Q_S для S (на подпространстве $(M\mathrm{e})^{\perp}$). Мы будем использовать многосеточные методы из предыдущих глав для определения Q_A, вопрос выбора Q_S будет обсуждаться далее.

3.5.2 Переобуславливатели для дополнения Шура.

В этом разделе рассматривается вопрос о выборе матрицы Q_S, т.е. переобуславливателя для S. Наша цель – универсальная сходимость метода относительно изменения констант ε, ξ и α.

В целях анализа введём дискретную величину аналогичную Γ:

$$\sqrt{\Gamma_h} := \sup_{v_h \in \mathbb{V}_h, q_h \in \mathbb{Q}_h} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_V \|q_h\|} \ .$$

Лемма 3.21. *Пусть M – матрица масс, определённая в* (3.86) *и $Q_S := \Gamma_h M$, тогда $Q_S \geq S$ и $\sigma_S := 1 - \frac{\gamma_h}{\Gamma_h}$ – константа из оценки* (3.96).

Доказательство. Обозначим $\tilde{B} := M^{-\frac{1}{2}} B$, тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{\Gamma_h} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m} \frac{\langle Bx, y \rangle}{\langle Ax, x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \hat{M} y, y \rangle^{\frac{1}{2}}} \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m} \frac{\langle \tilde{B}x, y \rangle}{\|x\|_A \|y\|} \ . \end{aligned} \tag{3.99}$$

Отношения (2.90), (3.99), и лемма 1.13 влекут оценки

$$\gamma_h I \leq \tilde{B} A^{-1} \tilde{B}^T \leq \Gamma_h I,$$

и, следовательно, для $Q_S = \Gamma_h M$ получаем

$$\frac{\gamma_h}{\Gamma_h} Q_S \leq S \leq Q_S.$$

□

Из леммы 3.21 и оценки (3.98) можно заключить, что для быстрой сходимости неточного метода Узавы желательно, чтобы величина $\Gamma_h \gamma_h^{-1}$ была мала. Применим этот результат к задаче Стокса, т.е. далее билинейные формы a и b берутся такие как в (1.110). В начале проанализируем для $\alpha \in \{0, 1\}$ зависимость $\Gamma_h \gamma_h^{-1}$ от параметров ξ, ε, h. Ещё раз напомним обратное неравенство, которым мы воспользуемся

$$\|\nabla v_h\| \le c_I h^{-1} \|v_h\| \quad \forall\ v_h \in \mathbb{V}_h \tag{3.100}$$

с константой c_I, не зависящей от h.

Лемма 3.22. *Имеют место оценки*

$$\frac{\Gamma_h}{\gamma_h} \le \hat{\beta}^{-2}, \qquad \textit{если} \ \ \alpha = 0, \tag{3.101}$$

$$\frac{\Gamma_h}{\gamma_h} \le \hat{\beta}^{-2} \frac{\varepsilon + c_F^2 + \xi}{\varepsilon + c_I^{-2} h^2 + \xi}, \qquad \textit{если} \ \ \alpha = 1\ . \tag{3.102}$$

Доказательство. Из обратного неравенства следует

$$\|u_h\|_V^2 = \varepsilon \|\nabla u_h\|^2 + \alpha \|u_h\|^2 + \xi \|\operatorname{div} u_h\|^2 \ge (\varepsilon + \alpha c_I^{-2} h^2 + \xi) \|\operatorname{div} u_h\|^2\ .$$

Поэтому благодаря оценке $b(v_h, q_h) \le \|\operatorname{div} v_h\| \|q_h\|$ получаем

$$\Gamma_h \le \frac{1}{\varepsilon + \alpha c_I^{-2} h^2 + \xi}\ . \tag{3.103}$$

Оценка снизу для γ_h дана в (2.96). Теперь возьмем вместе эти оценки для Γ_h и γ_h и рассмотрим случаи $\alpha \in \{0, 1\}$. □

В силу оценки (3.101) и леммы 3.21 в случае $\alpha = 0$ при любых значениях ε и ξ отмасштабированная матрица масс $Q_S = \Gamma_h \hat{M}_h$ является хорошим переобуславливателем для дополнения по Шуру. В этом случае $1 - \sigma_S > c_0 > 0$ с константой c_0, *не зависящей от* ε *и* h.

В случае $\alpha = 1$ результат (3.102) дает

$$\frac{\Gamma_h}{\gamma_h} = \mathcal{O}(h^{-2}) \qquad \text{при} \ \ h \downarrow 0,\ \varepsilon \le h^2,\ \xi = 0\ , \tag{3.104}$$

Таким образом, имеет место быстрый рост константы при $h \to 0$ и малых ε. Теперь отмасштабированная матрица масс не является хорошим переобуславливателем для дополнения по Шуру. Далее в этом разделе будет рассмотрен подходящий переобуславливатель для этого случая. Если же $\alpha = \xi = 1$, получаем:

$$\frac{\Gamma_h}{\gamma_h} \le \frac{2 + c_F^2}{2 + c_I^{-2} h^2} \quad \forall\, \varepsilon \in (0,1]. \tag{3.105}$$

Теперь для отмасштабированной матрицы масс (также как и при $\alpha = 0$) имеем $1 - \sigma_S > c_0 > 0$ с константой c_0, *не зависящей от* ε *и* h.

Напомним, что для построения универсального метода помимо хорошего (универсального) переобуславливателя Q_S для дополнения Шура необходим универсальный переобуславливатель Q_A для A. Матрица масс A задается соотношением в (3.86). Для случая $\xi = 0$ мы можем с успехом использовать многосеточный метод, как переобуславливатель для A. Действительно, из результатов раздела 3.2 вытекает, что V- или W-цикл многосеточного метода дают переобуславливатель Q_A для A такой, что $(1 - \sigma_A)Q_A \le A \le Q_A$ с константой $\sigma_A < 1$, не зависящей от $h,\ \varepsilon \in (0,1],\ \alpha \ge 0$.

Таким образом, для случая $\xi = 0$ универсальный переобуславливатель для A известен. Однако, *для случая* $\xi = 1$ *построение и анализ универсального переобуславливателя* Q_A *для* A *является открытым вопросом.* При $\xi = 1$ дополнительная жёсткость в системе появляется из-за оператора div, который в общем случае имеет большое ядро. В настоящее время универсальный многосеточный метод для решение системы уравнений с такой матрицей является темой исследований. Возможно техника разработанная в [141] может оказаться приемлемой в данном случае.

Наконец, в случае $\xi = 0, \alpha \ge 0$ построение универсального метода для обощенной системы Стокса возможно, если в качестве Q_S рассмотреть более сложный переобуславливатель, чем масштабированная матрица масс для давления. Действительно, неравенства (1.97) указывают на следующий выбор:

$$Q_S = (\varepsilon M - \alpha L^{-1})^{-1}, \tag{3.106}$$

где L – аппроксимация оператора Лапласа с краевыми условиями Неймана для давления. В случае метода конечных элементов возможно два пути построения L. Во-первых, если $\mathbb{Q}_h \in \mathbb{H}^1(\Omega)$, то L можно определить, как матрицу жесткости:

$$\langle L\mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = (\nabla J_Q \mathrm{x}, \nabla J_Q \mathrm{y}) \quad \forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^m\ .$$

Во-вторых, можно рассмотреть смешанную аппроксимацию:

$$L := BM_u^{-1}B^T,$$

где M_u – аппроксимация матрицы масс для скоростей. Для Q_S из (3.106) спектральная эквивалентность Q_S и S (на подпространстве) с константами, не зависящими от параметров, доказана в [50] при некоторых дополнительных ограничениях на $\mathbb{Q}_h$. Для непрерывных операторов такая оценка была доказана в разделе 1.4, см. (1.97).

Подводя итог, мы имеем следующие результаты о сходимости блочных переобусловленных методов для обобщённой задачи Стокса. Для универсальной сходимости блочных методов необходимы универсальные переобуславливатели для матриц S и A. Рассмотрим характерные случаи

- $\xi = \alpha = 0$: масштабированная матрица масс Q_S является универсальным переобуславливателем для S. Многосеточный метод – универсальный переобуславливатель для A.

- $\xi = 0,\ \alpha > 0$: масштабированная матрица масс *не является* универсальным переобуславливателем для S. Матрица Q_S, определённая в (3.106), – универсальный переобуславливатель для S. Многосеточный метод является универсальным переобуславливателем для A.

- $\xi = 1, \alpha \geq 0$: масштабированная матрица масс Q_S является универсальным переобуславливателем для S. Универсальный переобуславливатель для A пока не известен.

3.5.3 Численные примеры.

Сначала рассмотрим пример обобщенной задачи Стокса и метода конечных элементов из параграфа 2.4.4. Системы линейных алгебраических уравнений будем решать с помощью неточного метода Узавы. В качестве дополнения по Шуру Q_S возьмём матрицу масс отмасштабированную множителем $(\varepsilon + c_I^{-2}h_u^2\alpha + \xi)^{-1}$, см. (3.103). Здесь $h_u = \frac{h}{2}$ – размер триангуляции для скорости. Возьмём $c_I = 2\sqrt{2}$, как константы из обратного неравенства (3.100). Это значение найдено из верхней границы спектра дискретного Лапласиана в единичном квадрате. Если разумной

Таблица 3.12: Зависимость от ε: $h = 1/32$, $\alpha = 0$

		Вязкость		
Параметр	Величина	1	10^{-2}	10^{-4}
ξ=0	N_{iter}	38	38	38
	ψ_{cd}	0.06	0.06	0.06
ξ=0.1	N_{iter}	36	13	312
	ψ_{cd}	0.06	0.30	0.96

N_{iter}- всего итераций неточного метода Узавы,
ψ_{cd} - показатель сходимости MG метода для A.

оценки для c_I не имеется , то слагаемое $c_I^{-2}h_u^2\alpha$ может быть опущено. В результате константа $1 - \sigma_S$ из (3.96) будет меньше.

В качестве переобуславливателя Q_A используется стандартный V-цикл, со стандартными операторами проекции и продолжения, двумя пред и пост-сглаживаниями с помощью симметричного метода Гаусса-Зейделя.

В качестве критерия остановки в неточном методе Узавы (3.97) служит относительное сокращение невязки в 10^5 раз. Для иллюстрации сходимости метода в таблицах 3.12-3.13 приведено N_{iter} – общее число итераций неточного метода Узавы, необходимое для выполнения критерия остановки. Как мы уже обсуждали ранее, константы σ_A и σ_S из (3.91), (3.96) обуславливают сходимость метода (3.97). Оценка для σ_S была получена в лемме 3.21. Значение σ_A зависит от сходимости многосеточного метода для задачи скоростей, который определяет Q_A. Значения ψ_{cd} в таблице являются оценкой для показателя сходимости многосеточного метода. Так как мы выполняем две итерации многосеточного метода при применении Q_A^{-1}, то можно оценить $\sigma_A \approx \psi_{cd}^2$.

Медленная сходимость алгоритма Узавы для стабилизированной задаче при малых ε вызвана плохой сходимостью многосеточного метода для A (см. значения ψ_{cd}). Ясно, что на практике (при малых ε) этот многосеточный метод не должен использоваться.

В таблице 3.14 показаны результаты при $\alpha = 1$. Здесь мы также наблюдаем значительное ухудшение сходимости метода Узавы при $\xi = 0$.

Таблица 3.13: Зависимость от ε: $h = 1/64$, $\alpha = 0$

		Вязкость		
Параметр	Величина	1	10^{-2}	10^{-4}
ξ=0	N_{iter}	39	36	34
	ψ_{cd}	0.06	0.06	0.06
ξ=0.1	N_{iter}	37	12	414
	ψ_{cd}	0.06	0.34	0.98

N_{iter}- всего итераций неточного метода Узавы,
ψ_{cd} - показатель сходимости MG метода для A.

Причиной этому является то, что при $\varepsilon \to 0$, $h \to 0$ масштабированная матрица масс является плохим переобуславливателем для S (см. (3.104) и обсуждение в параграфе 3.6.1). При $\xi > 0$ возрастание количества итераций происходит далеко не так быстро, а причина его другая – ухудшение переобуславливателя для Q_A.

Таблица 3.14: Зависимость от ε: $h = 1/64$, $\alpha = 1$

		Вязкость		
Параметр	Величина	1	10^{-2}	10^{-4}
ξ=0	N_{iter}	39	124	3829
	ψ_{cd}	0.05	2.6e-2	1.7e-3
ξ=0.1	N_{iter}	37	20	217
	ψ_{cd}	0.05	0.34	0.97

N_{iter}- всего итераций неточного метода Узавы,
ψ_{cd} - показатель сходимости MG метода для A.

Если использовать более сложный переобуславливатель для S, чем масштабированная матрица масс, то можно добиться универсальной сходимости для метода Узавы (точного и неточного) при $\xi = 0$. Этот переобуславливатель задан в (3.106) и требует решения задачи Неймана для давления, впрочем, не обязательно точно. Результаты численных экспериментов подтверждающие универсальную сходимость приведены в таблице 3.15 . Эти результаты были получены для аппроксмации задачи методом конечных разностей (схема MAC) и взяты из [181]. С помощью переобусловленного метода сопряженных градиентов находилось решение задачи для давления в (3.93). Похожие результаты для различных конечных элементов можно найти, например, в [63, 50]. Таблица 3.16 показывает, что использование метода сопряженных градиентов без переобуславливания ведет к ухудшению показателя сходимости при увеличения отношения α/ε.

Таблица 3.15: Показатель сходимости переобусловленного метода CG в алгоритме Узавы ($\varepsilon = 1$, $\xi = 0$).

$\alpha \backslash h$	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512
0	0.165	0.201	0.225	0.242	0.240	0.242
16	0.150	0.188	0.202	0.234	0.221	0.222
32	0.125	0.177	0.197	0.220	0.204	0.212
64	0.106	0.153	0.176	0.205	0.197	0.204
128	0.086	0.119	0.173	0.183	0.188	0.203
256	0.065	0.100	0.147	0.164	0.186	0.189
512	0.053	0.084	0.122	0.155	0.178	0.180
1024	0.034	0.062	0.096	0.136	0.161	0.187
2048	0.019	0.043	0.083	0.115	0.145	0.178

3.6 Задача Стокса с интерфейсом.

Рассмотрим конечно-элементную задачу в матрично-векторной форме. Для этого повторим рассуждения из раздела 3.5. Отличия будут следующими. Во-первых, отличается условие ортогональности для векторов давления:

$$M_h = \{\, p_h \in M_h^+ \mid (p_h, 1)_M = 0 \,\}$$

Во-вторых, отличается матрица жесткости A, и рассматривается матрица масс $\hat{M}_\nu \in \mathbb{R}^{m\times m}$ относительно скалярного произведения с весом:

$$\begin{aligned} \langle A\mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle &= (\nu\nabla J_V \mathrm{x}, \nabla J_V \mathrm{y}) \quad \forall\ \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n\ , \\ \langle \hat{M}_\nu \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle &= (J_Q \mathrm{x}, J_Q \mathrm{y})_M \quad \forall\ \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^m\ . \end{aligned} \tag{3.107}$$

Таблица 3.16: Показатель сходимости непереобусловленного метода CG в алгоритме Узавы ($\varepsilon = 1$, $\xi = 0$).

$\alpha \setminus h$	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512
0	0.168	0.201	0.225	0.241	0.245	0.242
16	0.250	0.274	0.298	0.309	0.310	0.308
32	0.288	0.308	0.320	0.335	0.333	0.334
64	0.330	0.356	0.362	0.364	0.364	0.371
128	0.398	0.415	0.425	0.418	0.418	0.413
256	0.474	0.491	0.500	0.488	0.497	0.479
512	0.551	0.584	0.581	0.570	0.587	0.562
1024	0.613	0.663	0.678	0.649	0.665	0.648
2048	0.667	0.731	0.744	0.733	0.739	0.741
4096	0.709	0.795	0.790	0.763	0.787	0.769

Система алгебраических уравнений, соответсвующая методу конечных элементов (2.106) имеет тот же вид, что и (3.87):

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{f} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.108}$$

Для её численного решения можно применять итерационные методы изложенные в разделе 3.5.1. Численные эксперименты будут приведены для метода Узавы-CG и переобусловленного метода MINRES.

Дополнение Шура $S := BA^{-1}B^T$, как и матрица системы (3.108), имеет одно-мерное ядро: $\ker(S) = \mathrm{span}\{\mathrm{e}\}$, где $\mathrm{e} := J_Q^{-1}1 = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^m$. Справедливо

$$(J_Q\mathrm{y}, 1)_M = 0 \;\Leftrightarrow\; (J_Q\mathrm{y}, J_Q\mathrm{e})_M = 0 \;\Leftrightarrow \langle \hat{M}_\nu \mathrm{y}, \mathrm{e}\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \langle \mathrm{y}, \hat{M}_\nu \mathrm{e}\rangle = 0 \tag{3.109}$$

Поэтому, определив подпространство

$$(\hat{M}_\nu \mathrm{e})^\perp := \{\, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^m \mid \langle \mathrm{y}, \hat{M}_\nu \mathrm{e}\rangle = 0 \,\} \tag{3.110}$$

имеем $M_h = \{\, J_Q\mathrm{y} \mid \mathrm{y} \in (\hat{M}_\nu \mathrm{e})^\perp \,\}$. Следовательно, матрично-векторная форма задачи (2.106) имеет вид:

$$\text{Найти } \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathrm{y} \in (\hat{M}_\nu \mathrm{e})^\perp \text{ удовлетворяющие системе (3.108).} \tag{3.111}$$

В переобусловленном методе MINRES или методе типа (неточного) Узавы необходимы переобуславливатели Q_A для A и Q_S для S. Известно, что если в качестве Q_A используется симметричный V-цикл многосеточного метода, то для Q_A выполнены оценки (3.91) (см. [47, 54, 163]), т.е.

$$(1-\sigma_A)Q_A \le A \le Q_A,$$

с константой $\sigma_A < 1$, не зависящей от h и ν.

3.6.1 Переобуславливатель для дополнения Шура.

В этом разделе доказывается, что матрица масс $\hat{M}_\nu$ является подходящим переобуславливателем для S.

Из леммы 1.15 и теоремы 2.6 следуют неравенства

$$C_2\|p_h\|_M \le \sup_{u_h\in\mathbb{V}_h} \frac{(\operatorname{div}\mathbf{u}_h, p_h)}{\|\mathbf{u}_h\|_\nu} \le \sqrt{d}\,\|p_h\|_M \quad \text{для} \quad p_h \in M_h \tag{3.112}$$

с константой $C_2 > 0$, не зависящей от h и от ν, если выполнено условие (2.114): $\mu_h \le C_1$. Из определения дополнения по Шуру следует, что для произвольной $\mathrm{y} \in \mathbb{R}^m$ справедливо

$$\langle S\mathrm{y}, \mathrm{y}\rangle = \sup_{\mathbf{u}_h\in\mathbb{V}_h} \frac{(\operatorname{div}\mathbf{u}_h, J_Q\mathrm{y})^2}{\|\mathbf{u}_h\|_\nu^2} \tag{3.113}$$

Прямым следствием (3.113) и (3.88) является

Теорема 3.12. *Предположим, что выполнено* (2.114), *тогда для всех* $\mathrm{y} \in (\hat{M}_\nu \mathrm{e})^\perp$ *справедливы неравенства*

$$C_2^2\langle \hat{M}_\nu \mathrm{y}, \mathrm{y}\rangle \le \langle S\mathrm{y}, \mathrm{y}\rangle \le d\,\langle \hat{M}_\nu \mathrm{y}, \mathrm{y}\rangle$$

с константой C_2 *из* (3.112).

Из теоремы следует, что спетральное число обусловленности матрицы $\hat{M}_\nu^{-1}S$ *равномерно ограничено на подпространстве* $(\hat{M}_\nu \mathrm{e})^\perp$.

Следующий актуальный вопрос – как эффективно вычислять $\hat{M}_\nu^{-1}\mathrm{y}$. Лемма ниже показывает, что либо матрица $\hat{M}_\nu$ может быть успешно заменена на некоторую диагональную матрицу, либо $\hat{M}_\nu^{-1}\mathrm{y}$ может быть эффективно подсчитано с помощью PCG метода с диагональной матрицей в качестве переобуславливателя.

Лемма 3.23. *Определим диагональную матрицу: $\bar{M}_\nu$ по формуле*

$$(\bar{M}_\nu)_{ii} = \sum_{j=1}^{m} (\hat{M}_\nu)_{ij}.$$

Теперь для всех $\mathrm{y} \in \mathbb{R}^m$ *справедливо*

$$C_3 \langle \bar{M}_\nu \mathrm{y}, \mathrm{y} \rangle \le \langle \hat{M}_\nu \mathrm{y}, \mathrm{y} \rangle \le C_4 \langle \bar{M}_\nu \mathrm{y}, \mathrm{y} \rangle$$

с константами $C_3 > 0$ *и* C_4*, не зависящими от* ν *и* h.

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно оценить собственные значения $(\bar{M}_\nu|_\tau)^{-1}\hat{M}_\nu|_\tau$, где $\bar{M}_\nu|_\tau$ и $\hat{M}_\nu|_\tau$ – локальные матрицы масс для каждого элемента триангуляции τ. На каждом отдельном элементе ν является константой, поэтому мы можем использовать результат из [157], который обеспечивает оценку на каждом элементе, не зависящую от ν и h.

□

Обратим также внимание на равенство:

$$\bar{M}_\nu \mathrm{e} = \hat{M}_\nu \mathrm{e} \tag{3.114}$$

Предположим, что задача (3.111) решается с помощью метода Узавы (3.92)–(3.94), а на шаге (3.93) используется PCG-метод с переобуславливателем $\hat{M}_\nu$ или $\bar{M}_\nu$. Тогда, повторяя рассуждения из раздела 3.5.1 и используя равенство (3.114), можно показать, что приближения, как и вектора ошибки, на каждом шаге PCG-метода лежат в подпространстве $(\hat{M}_\nu \mathrm{e})^\perp$, если начальное приближение y^0 принадлежит этому подпространству. Из теоремы 3.12 и леммы 3.23 следует, что матрицы $\hat{M}_\nu^{-1}S$ и $\bar{M}_\nu^{-1}S$ имеют на этом подпространстве число обусловленности, не зависящее от параметров ν и h.

Численные эксперименты будут проведены также с переобусловленным методом MINRES (см. § 3.5.1). В качестве Q_A будет использоваться стандартный многосеточный метод, а $Q_S = \bar{M}_\nu$. MINRES метод существенно “дешевле” алгоритма Узавы, и в тоже время из теории (см. теорему 3.12 и лемму 3.23 для оценки $\mathrm{cond}(Q_S^{-1}S)$ на подпространстве, результаты [47] для оценки $\mathrm{cond}(Q_A^{-1}A)$ и результаты [139] для блочного переобуславливания) следует, что его показатель сходимости оценивается константой (меньше единицы), не зависящей от ν и h.

3.6.2 Численные примеры

В этом разделе вы найдете результаты нескольких численных экспериментов иллюстирующих сходимость методов Узавы и MINRES при решении задачи Стокса с интерфейсом с использованием переобуславливателей из предыдущего параграфа.

Мы рассматриваем (1.121)-(1.123) с

$$\Omega = (0,1)^3, \quad \Omega_2 = (0, \frac{1}{2})^3$$

Дискретизация строилась следующим образом: самая грубая сетка состояла из правильных тетраэдров с $h = \frac{1}{2}$. Далее применялось равномерное измельчение. Таким образом, что всё семейство триангуляций отвечало условию (2.104). Использовались конечный элементы Тейлора-Худа $P_2 - P_1$, т.е. непрерывные кусочно-квадратичные для скоростей и непрерывные кусочно-линейные для давления. Вычисления проводились для $h = 1/16$, $h = 1/32$ и различных $\varepsilon \in (0,1]$. Заметим, что для $h = 1/32$ число неизвестных для скорости равно $7.5{\cdot}10^5$, для давления – $3.3{\cdot}10^4$ ($n \approx 7.5{\cdot}10^5$, $m \approx 3.3{\cdot}10^4$). В качестве решения системы (3.108) возьмем нулевое $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0$. Начальное приближение выбираем случайным образом $(\mathrm{x}^0, \mathrm{y}^0)$ так, что $\mathrm{y}^0 \in (\hat{M}_\nu)^\perp$.

Для проверки универсальности переобуславливания для дополнения Шура и универсальности многосеточного метода сначала рассмотрим метод Узавы (3.92)-(3.94). Линейные системы вида $A\mathrm{x} = \mathrm{r}$, которые встречаются на шагах 1,2 и 3 алгоритма, все решаются с помощью стандартного V-цикла с одним пред- и одним пост-сглаживанием симметричным методом Гаусса-Зейделя. Итерации для системы $A\mathrm{x} = \mathrm{r}$ прекращаются после k шагов, если для x^k выполняется

$$\frac{\|D^{-1}(A\mathrm{x}^k - \mathrm{r})\|}{\|D^{-1}(A\mathrm{x}^0 - \mathrm{r})\|} \le 10^{-10}\ , \quad D := \mathrm{diag}(A) \tag{3.115}$$

Система с дополнением Шура (3.93) решается с помощью PCG метода с переобуславливателем $\hat{M}_\nu$. Система $\hat{M}_\nu \mathrm{y} = \mathrm{w}$, в свою очередь, приближенно решается с помощью PCG метода с переобуславливателем $\bar{M}_\nu$, пока не достигнута точность

$$\frac{\|\bar{M}_\nu^{-1}(\hat{M}_\nu \mathrm{y}^k - \mathrm{w})\|}{\|\bar{M}_\nu^{-1}(\hat{M}_\nu \mathrm{y}^0 - \mathrm{w})\|} \le 10^{-10} \tag{3.116}$$

PCG метод для системы с дополнением Шура $S\mathrm{y} = \mathrm{c}$ останавливается при достижении точности:

$$\frac{\|\bar{M}_\nu^{-1}(S\mathrm{y}^k - \mathrm{c})\|}{\|\bar{M}_\nu^{-1}(S\mathrm{y}^0 - \mathrm{c})\|} \leq 10^{-6} \tag{3.117}$$

В таблице 3.17 показаны результаты при различных значениях h и ε. Использованы следующие обозначения: #-MG – среднее число итераций многосеточного метода для достижения точности (3.115), #-PCG-M – среднее число итераций PCG метода для достижения точности (3.116) и #-PCG-S – среднее число итераций PCG метода для достижения точности (3.117).

Таблица 3.17: Метод Узавы, переобуславливатель $\hat{M}_\nu$

h	1/16				1/32			
ε	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}
#-MG	13	13	14	14	14	14	14	14
#-PCG-M	24	25	25	26	24	25	25	25
#-PCG-S	22	29	31	34	21	29	30	34

Результаты в таблице ясно показывают универсальность относительно параметров h и ε многосеточного метода для подсистемы с матрицей A для скоростей, переобуславливателя $\hat{M}_\nu$ для S и переобуславливателя $\bar{M}_\nu$ для $\hat{M}_\nu$. Далее мы рассмотрим эффект, возникающий от замены матрицы масс для давления $\tilde{M}_\nu$ на диагональную матрицу $\bar{M}_\nu$ в качестве переобуславливателя дополнения Шура. В PCG методе используем критерий остановки (3.117). В таблице 3.18 показаны результаты вычислений для различных h и ε. Как и ожидалось, переобуславливатель

Таблица 3.18: Метод Узавы, переобуславливатель $\bar{M}_\nu$

h	1/16				1/32			
ε	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}
#-PCG-S	40	48	48	58	39	50	52	59

$\bar{M}_\nu$ является универсальным для S. Наконец, в заключительном эксперименте рассматривается блочно-переобусловленный метод MINRES. В качестве Q_A берем одну итерацию многосеточного метода , описанного выше, а диагональную матрицу $\bar{M}_\nu$, как переобуславливатель для дополнения Шура. В таблице 3.19 приведено число итераций k (обозначается через #-PMINRES), достаточное для выполнения критерия остановки:

$$\left\| \tilde{\mathcal{A}}^{-1}\mathcal{A}\begin{pmatrix}\mathrm{x}^k\\ \mathrm{y}^k\end{pmatrix}\right\|_{\tilde{\mathcal{A}}} \le 10^{-6}\left\| \tilde{\mathcal{A}}^{-1}\mathcal{A}\begin{pmatrix}\mathrm{x}^0\\ \mathrm{y}^0\end{pmatrix}\right\|_{\tilde{\mathcal{A}}}$$

(Напомним, что правая часть в системе выбиралась равной 0). Заметим,

Таблица 3.19: Метод MINRES с переобуславливателем $\bar{M}_\nu$

h	1/16				1/32			
ε	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}
#-PMINRES	62	68	98	157	50	58	85	116

что для $h = 1/32$ требуется меньше итераций, чем для $h = 1/16$.

3.6.3 Задача с полным тензором деформаций

Рассмотрим задачу с полным тензором деформаций $D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\big(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T\big)$ вместо $\nabla\mathbf{u}$ в (1.121). Соответствующая слабая постановка задачи состоит в нахождении $\{\mathbf{u}, p\} \in \mathbb{V}\times M$, удовлетворяющих соотношениям

$$\left\{\begin{array}{lll} \int_\Omega \nu D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v})\,dx - (\operatorname{div}\mathbf{v}, p) & = (\mathbf{f},\mathbf{v}) & \text{for}\ \ \mathbf{v}\in\mathbb{V},\\ (\operatorname{div}\mathbf{u}, q) & = 0 & \text{for}\ \ q\in M\ . \end{array}\right. \tag{3.118}$$

Заметим равенства

$$D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^{d} D(\mathbf{u})_{i,j}D(\mathbf{v})_{i,j} = \operatorname{tr}\big(D(\mathbf{u})D(\mathbf{v})\big)$$

Для $\mathbf{u}\in\mathbf{H}_0^1$ введем обозначение $\|\mathbf{u}\|_D^2 := \int_\Omega \nu\operatorname{tr}\big(D(\mathbf{u})^2\big)\,dx$.

Лемма 3.24. *Предположим, что выполняется* (1.139) *или* (1.140)*. Тогда существует константа $c > 0$, не зависящая от ν такая, что*

$$c\|\mathbf{v}\|_\nu \le \|\mathbf{v}\|_D \le \|\mathbf{v}\|_\nu \quad \forall\ \ \mathbf{v}\in\mathbf{H}_0^1 \tag{3.119}$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что

$$\operatorname{tr}\big(D(\mathbf{v})^2\big) = \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{d}\big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\big)^2 \le \sum_{i,j=1}^{d}\big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\big)^2$$

Это влечет

$$\|\mathbf{v}\|_D^2 = \int_\Omega \nu \operatorname{tr}\big(D(\mathbf{v})^2\big)\,dx \le (\nu\nabla\mathbf{v}, \nabla\mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\|_\nu^2,$$

следовательно, выполняется второе неравенство в (3.119). Для доказательства первого неравенства в (3.119) нам понадобится неравенство Корна, см. [13]. Предположим, что γ — часть границы $\partial\Omega$ с ненулевой мерой, тогда существует константа C такая, что

$$\|\nabla\mathbf{v}\|_\Omega^2 := \|\nabla\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 \le C\int_\Omega \operatorname{tr}\big(D(\mathbf{v})^2\big)\,dx$$

для любой $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d$, $\mathbf{v}_{|\gamma} = 0$. Предположим, что выполняется (1.139). Используя неравенство Корна в каждой из подобластей, получаем

$$\|\nabla\mathbf{v}\|_{\Omega_i}^2 \le C_i \int_{\Omega_i} \operatorname{tr}\big(D(\mathbf{v})^2\big)\,dx \quad \text{для} \quad i = 1, 2 \tag{3.120}$$

Поэтому можем оценить

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}\|_\nu^2 &= \|\nabla\mathbf{v}\|_{\Omega_1}^2 + \varepsilon\|\nabla\mathbf{v}\|_{\Omega_2}^2 \\ &\le \max\{C_1, C_2\}\int_\Omega \nu\operatorname{tr}\big(D(\mathbf{v})^2\big)\,dx = \max\{C_1, C_2\}\|\mathbf{v}\|_D^2,\end{aligned}$$

что влечет первое неравенство в (3.119). Теперь предположим, что выполняется (1.140). Тогда неравенство Корна в (3.120) выполняется для $i = 1$. Используя теорему о следах, получаем

$$\|\nabla\mathbf{v}\|_{\Omega_2}^2 \le c\,\|\mathbf{v}|_\Gamma\|_{H^{\frac12}(\Gamma)}^2 \le c\,\|\nabla\mathbf{v}\|_{\Omega_1}^2 \le c\int_{\Omega_1} \operatorname{tr}\big(D(\mathbf{v})^2\big)\,dx$$

Так как ε ограничена, мы получаем

$$\|\mathbf{v}\|_\nu^2 = \|\nabla\mathbf{v}\|_{\Omega_1}^2 + \varepsilon\|\nabla\mathbf{v}\|_{\Omega_2}^2 \le C\int_{\Omega_1} \operatorname{tr}\big(D(\mathbf{v})^2\big)\,dx \le C\,\|\mathbf{v}\|_D^2,$$

следовательно, первое неравенство в (3.119) выполнено. □

Предположим, что выполнено одно из условий (1.139) или (1.140). В силу доказанной леммы результаты леммы 1.15 и теорем 1.10 и 2.6 остаются справедливыми, если использовать $\|\cdot\|_D$ вместо $\|\cdot\|_\nu$. Как итог, можно сделать вывод, что результаты диссертации для задачи Стокса с интерфейсом переносятся на случай с полным тензором деформаций.

3.7 Система Осеена.

В этом разделе рассматриваются итерационные методы нахождения решения (стабилизированного) метода конечных элементов для обобщенной задачи Осеена, см. (2.129). Мы предположим, что соответствующая система линейных алгебраических уравнений сохраняет структуру (3.121), т.е. матрица является блочной 2×2, левый нижний и правый верхний блоки сопряжены, а правый нижний равен нулю. На практике такую структуру можно получить, если в стабилизационных членах слагаемые, связанные с давлением не учитываются, – равны нулю для кусочно-постоянной аппроксимации, либо вычисляются явно в нелинейных итерациях.

Особенности, связанные с определением функции давления с точностью до константы и детально рассмотренные в разделе 3.5, для системы линейных уравнений типа Стокса сохраняются и для более общей системы типа Осеена. Напомним только, что A и B – матрицы порождаемые методом конечных элементов (2.129). Например, в случае конвективной формы матрицы A и B могут быть определены через соотношения

$$\begin{aligned}\langle A\mathrm{x},\mathrm{y}\rangle &= \nu(\nabla\psi,\nabla\xi)+\xi(\operatorname{div}\psi,\operatorname{div}\xi)+(\alpha\psi+\mathbf{a}\cdot\nabla\psi,\xi)\\ &\quad+\sum_{\tau\in T_h}\sigma(\tau,\mathbf{a})(\mathbf{a}\cdot\nabla\psi,\mathbf{a}\cdot\nabla\xi)_\tau,\\ \langle B\mathrm{x},\mathrm{z}\rangle &= -(\operatorname{div}\psi,\phi)\qquad\forall\mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathbb{R}^n,\ \mathrm{z}\in\mathbb{R}^m\end{aligned}$$

для нодальных базисных функций $\psi := J_V\mathrm{x}, \xi := J_V\mathrm{y}$ из $\mathbf{V}_h$ и $\phi := J_Q z$ из $\mathbb{Q}_h$.

Необходимо найти решение системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathrm{f} \\ \mathrm{g} \end{pmatrix}. \tag{3.121}$$

Обратим внимание, что в отличии от (3.87) система (3.121) не симметрична. Более того, при малых ν и α несимметричность в блоке A может доминировать. Далее мы рассмотрим переобусловленный итерационный метод блочного типа для решения (3.121). Особое внимание будет уделено случаю малого ν. Многосеточные методы для (3.121), хотя и используются на практике, их теория применительно к (3.121) на данный момент отсутствует. Многосеточные методы для систем типа Осеена не рассматриваются в данной работе.

3.7.1 Переобусловленные методы.

Спектр матрицы из (3.121) содержит собственные значения как с положительной, так и с отрицательной вещественной частью, ее число обусловленности растет при уменьшении как шага сетки, так и ν. Для численного решения (3.121) с помощью итераций необходимо построить подходящий переобуславливатель. Некоторые из блочных итерационных методов для симметричных задач с седловой точкой были позже приспособлены и использованы для решения несимметричных систем типа (3.121) (см. [52], [76], [138]).

Далее будем использовать два метода. Один из них – это метод Узавы, описанный в разделе 3.5, он требует на каждой итерации (достаточно) точного решения подсистемы с матрицей A. Второй метод заключается в блочно-треугольном переобуславливании системы. Напомним, что Q_A обозначает переобуславливатель для A, Q_S для S. Блочно треугольный переобуславливатель для матрицы из (3.121) имеет вид

$$\mathcal{P}^{-1} = \begin{pmatrix} Q_A^{-1} & Q_A^{-1}B^TQ_S^{-1} \\ 0 & -Q_S^{-1} \end{pmatrix}. \tag{3.122}$$

Если $Q_A = A$ и $Q_S = S$, то переобусловленный метод на подпространствах Крылова для (3.121) сойдется к решению не более, чем за две итерации. В общем случае анализ сходимости метода GMRES для систем вида (3.121) с переобуславливанием (3.122) можно найти в [107]. В наших численных экспериментах будет использоваться итерационный метод BiCGstab [151] для решения следующей переобусловленной системы

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_A^{-1} & Q_A^{-1}B^TQ_S^{-1} \\ 0 & -Q_S^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathrm{x}} \\ \hat{\mathrm{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{f} \\ \mathrm{g} \end{pmatrix}. \tag{3.123}$$

Итак, необходимо построить два подходящих переобуславливателя: Q_A^{-1} и Q_S^{-1}. В качестве Q_A^{-1} может выступать многосеточный метод. Для задачи в конвективной форме такой метод рассмотрен в разделе 3.3, а для системы в вихревой форме в разделе 3.4. Построение и анализ переобуславливателя Q_S^{-1} для дополнения Шура рассматривается ниже.

Переобуславливатель дополнения Шура для вихревой формы.

Универсальный переобуславливатель для S должен учитывать эффект диффузии, реакции и конвекции в системе Осеена. Для построения переобуславливателя для всех типов течений рассмотрим вначале отдельно два случая: большую вязкость ($\nu \gg 1$) и малую ($\nu \ll 1$), и запишем дифференциальную задачу $Sp = F$ в смешанном виде:

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u} + \alpha\mathbf{u} + \mathbf{w}\times\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{0}, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= F, \\ \mathbf{u} &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.124}$$

Замечание 3.4. В (3.124), как и ранее, там где это не вызывает путаницы используем обозначения $\mathbf{u}$ и p для вспомогательных функций, возникающих при построении переобуславливателя. Однако, мы по-прежнему называем их ‘скорость’ и ‘давление’.

Известно, что для течений с большими значениями вязкости вклад конвективных членов в уравнение незначителен. Если в (3.124) пренебречь слагаемым $\mathbf{w}\times\mathbf{u}$, то подходящий переобуславливатель для дополнения по Шуру известен: $Q_S^{-1} = \nu I - \alpha\Delta_N^{-1}$. В разделе 3.5 была доказана оценка

$$cond(Q_S^{-1}S_0) \le c$$

с константой c, не зависящей от ν и α. Более того, напомним, что оператор Q_S $(= (\nu I - \alpha\Delta_N^{-1})^{-1})$ может быть получен как дополнение Шура обобщенной задачи Стокса с другими краевыми условиями: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0, (\operatorname{curl}\mathbf{u})\times\mathbf{n} = 0$ вместо $\mathbf{u} = 0$ в (3.124).

Рассмотрим теперь другой крайний случай: $\nu \ll 1$.

Если вязкость мала, то ей можно пренебречь почти всюду, кроме подобластей больших градиентов скорости, обычно в пограничных слоях. Помня об этом, перепишем уравнения (3.124), опуская диффузионные члены. Получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} \alpha\mathbf{u} + \mathbf{w} \times \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{0}, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= F, \\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} &= 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.125}$$

Заметим, что в виду отсутствия производных второго порядка для скоростей в (3.125) мы вынуждены сохранить только краевые условия на нормальную компоненту $\mathbf{u}$.

Вариационная формулировка (3.125) имеет вид: для заданной $F \in \mathbb{L}_2^0(\Omega)$ найти $\{\mathbf{u}, p\} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div}) \times \mathbb{L}_2^0(\Omega)$ такую, что для всех $\{\mathbf{v}, q\} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div}) \times \mathbb{L}_2^0(\Omega)$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{w} \times \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \operatorname{div}\mathbf{v}) &= 0, \\ (\operatorname{div}\mathbf{u}, q) &= (F, q). \end{aligned} \tag{3.126}$$

Легко заметить, что билинейная форма $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{w} \times \mathbf{u}, \mathbf{v})$ коэрцитивна на $\operatorname{Ker}(\operatorname{div})$ в $\mathbf{H}_0(\operatorname{div})$, и выполняется infsup условие

$$\inf_{p\in\mathbb{L}_2^0(\Omega)} \sup_{\mathbf{u}\in\mathbf{H}_0(\operatorname{div})} \frac{(p, \operatorname{div}\mathbf{u})}{||\mathbf{u}||_{H(\operatorname{div})}\,||p||} \geq c(\Omega) > 0.$$

Для непрерывности билинейной формы $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ на $\mathbf{H}_0(\operatorname{div})$ достаточно предположить, что $\mathbf{w}$ принадлежит $L_\infty(\Omega)^{2d-3}$. Теперь благодаря следствию 5.1 из [84] задача (3.126) имеет единственное решение.

Система (3.125) может быть рассмотрена, как смешанная формулировка эллиптического уравнения для давления. Действительно, можно формально исключить вектор скорости из системы (3.125) и получить следующую несимметричную задачу типа диффузии для давления с краевыми условиями Неймана:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\alpha}\operatorname{div}(\mathcal{G}(\mathbf{x})\nabla p) &= F, \\ \frac{\partial p}{\partial \tilde{\mathbf{n}}} &= 0, \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.127}$$

где $\mathcal{G}(\mathbf{x}) = \{g_{ij}(\mathbf{x})\}$, $i, j = 1, \ldots, d$ – матрица ‘диффузии’, определяемая ниже, и $\frac{\partial p}{\partial \tilde{\mathbf{n}}} = g_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_i} n_j$.

В терминах α и $\mathbf{w}$ матрица $\mathcal{G}(\mathbf{x})$ имеет вид

- 2D

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \mathbf{w}^2} I - \frac{\alpha}{\alpha^2 + \mathbf{w}^2}(\mathbf{w}\times). \qquad (3.128)$$

- 3D

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \mathbf{w}^2}(I + \alpha^{-2}(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w})) - \frac{\alpha}{\alpha^2 + \mathbf{w}^2}(\mathbf{w}\times). \qquad (3.129)$$

I – единичная матрица, обозначение $(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w})$ используется для матрицы с элементами равными $w_i(\mathbf{x})w_j(\mathbf{x})$, $(\mathbf{w}\times)$ обозначает матрицу, соответствующую векторному произведению с $\mathbf{w}$:

- 2D

$$(\mathbf{w}\times) = \begin{pmatrix} 0 & -w \\ w & 0 \end{pmatrix},$$

- 3D

$$(\mathbf{w}\times) = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Первый член в (3.128) или (3.129) является симметричной частью $\mathcal{G}(\mathbf{x})$, второй кососимметричной.

Изучим задачу (3.127). Заметим, что $|g_{ij}(\mathbf{x})| \le c < \infty$, $i, j = 1, \dots, d$, с некоторой константой c, независящей от $\mathbf{x}, \mathbf{w}, \alpha$. Следовательно, $g_{ij}(\mathbf{x}) \in L_\infty(\Omega)$. Рассмотрим вектор-функцию $\mathbf{v} = \mathcal{G}(\mathbf{x})\nabla p$ и предположим, что $p \in \mathbb{H}^1(\Omega)$. Тогда $g_{ij}(\mathbf{x}) \in L_\infty(\Omega)$ влечет $\mathbf{v} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$. Следующая вариационная формулировка (3.127) имеет смысл. Для заданной $F \in \mathbb{L}_2^0(\Omega)$ найти $p \in \mathbb{H}^1(\Omega) \cap \mathbb{L}_2^0(\Omega)$ такую, что

$$\frac{1}{\alpha}(\mathcal{G}(\mathbf{x})\nabla p, \nabla q) = (F, q), \quad \forall q \in \mathbb{H}^1(\Omega) \cap \mathbb{L}_2^0(\Omega). \qquad (3.130)$$

Соотношение (3.130) является отправной точкой для построения конечно-элементной дискретизации (3.127).

Почти всюду в области Ω матрица $\mathcal{G}(\mathbf{x})$ положительна, т.е.

$$(\mathcal{G}(\mathbf{x})\zeta, \zeta) > 0 \qquad (3.131)$$

для всех ненулевых $\zeta \in R^d$. Следовательно, задача является сильно эллиптической и имеет решение, удовлетворяющее (3.130) (см., например,

[14]). Дополнительное предположение $\mathbf{w} \in L_\infty(\Omega)^{2d-3}$ обеспечивает равномерную эллиптичность (3.130) и, как следствие, единственность слабого решения.

Справедлива лемма.

Лемма 3.25. *Предположим* $\mathbf{w} \in L_\infty(\Omega)^{2d-3}$. *Тогда задачи (3.125) и (3.127) имеют единственные решения в смысле (3.126) и (3.130), соответственно. Более того, компонента давления p решения (3.125) принадлежит* $\mathbb{H}^1(\Omega) \cap \mathbb{L}_2^0(\Omega)$ *и является решением (3.127).*

Доказательство. Предположим, что p из $\mathbb{H}^1(\Omega) \cap \mathbb{L}_2^0(\Omega)$ является решением (3.127) и рассмотрим $\mathbf{u} = \mathcal{G}(\mathbf{x})\nabla p$. Имеем $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$, $\operatorname{div} \mathbf{u} = F \in L_2(\Omega)$ и $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = \frac{\partial p}{\partial \tilde{\mathbf{n}}} = 0$. Следовательно, вектор-функция $\mathbf{u}$ принадлежит $\mathbf{H}_0(\operatorname{div})$. В силу определения $\mathbf{u}$ и (3.131) получаем

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{G}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\nabla p, \mathbf{v}) &= \mathbf{0} && \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div}),\\
(\mathbf{u}, \nabla q) &= (F, q), && \forall q \in \mathbb{H}^1(\Omega) \cap \mathbb{L}_2^0(\Omega)
\end{aligned}
$$

Благодаря интегрированию в этих равенствах по частям, краевым условиям $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0$ и явному выражению для $\mathcal{G}^{-1}(\mathbf{x})$ мы получаем

$$
\begin{aligned}
\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{w} \times \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) &= \mathbf{0} && \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div})\\
(\operatorname{div} \mathbf{u}, q) &= (F, q), && \forall q \in \mathbb{H}^1(\Omega) \cap \mathbb{L}_2^0(\Omega)
\end{aligned}
\tag{3.132}
$$

Второе равенство в (3.132) остается верным для произвольной $q \in \mathbb{L}_2^0(\Omega)$. Поэтому $\{p, \mathbf{u}\}$ является в точности слабым решением задачи (3.125). Обе задачи имеют единственное решение, если $\mathbf{w} \in L_\infty(\Omega)^{2d-3}$.
□

Замечание 3.5. Минимальные предположения о гладкости функции скорости в уравнениях Навье-Стокса $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ влекут, что $\mathbf{w}$ принадлежит $\mathbb{L}_2(\Omega)^{2d-3}$. Дополнительные предположения на данные задачи Навье-Стокса влекут дополнительную гладкость решения и, как следствие, $\mathbf{w} \in L_\infty(\Omega)^{2d-3}$ и, как отмечалось выше, эллиптичность формы $(\mathcal{G}(\mathbf{x})\nabla p, \nabla q)$, т.е.

$$
||\nabla p||^2 \le C\,(\mathcal{G}(\mathbf{x})\nabla p, \nabla p) \quad \forall p \in \mathbb{H}^1(\Omega) \cap \mathbb{L}_2^0(\Omega). \tag{3.133}
$$

Если рассматривается метод конечных элементов, то неравенство (3.133) выполняется в любом случае с некоторой константой C, которая может зависеть от h. Зависимость от h слабее для гладких $\mathbf{w}$.

Обозначим через $L(\mathbf{w})^{-1}$ $(L(\mathbf{w})^{-1} : \mathbb{L}_2^0(\Omega) \to \mathbb{H}^1(\Omega) \cap \mathbb{L}_2^0(\Omega))$ оператор решающий задачу (3.127), в скобках мы подчеркиванием зависимость от $\mathbf{w}$. Рассмотрим оператор

$$Q_S^{-1} = \nu I + L(\mathbf{w})^{-1} \tag{3.134}$$

в качестве переобуславливателя для S. С одной стороны, когда значения вязкости большие (мы можем пренебречь конвективными членами), то новый переобуславливатель совпадает с оптимальным $\nu I - \alpha\Delta_N^{-1}$. С другой стороны, в случае доминирующей конвекции члены диффузии не имеют существенного глобального влияния и $L(\mathbf{w})$ снова близок к S. Есть основания полагать, что выбор Q_S в (3.134) подходит и для промежуточных ситуаций. Более того, если в уравнении моментов присутствует $\nabla\mathrm{div}$-член, то в переобуславливатель аналогично ситуации с обобщенной задачей Стокса добавляется параметр ξ:

$$Q_S^{-1} = (\nu + \xi) I + L(\mathbf{w})^{-1} \tag{3.135}$$

Анализ Фурье далее в этом разделе и численные эксперименты подтверждают эффективность переобуславливателя (3.135).

Анализ Фурье.

Рассуждения данного параграфа направлены на поверку эффективности переобуславливателя Q_S из (3.135) с помощью анализа Фурье. Рассматривается двухмерная периодическая задача с постоянным $w(\mathbf{x}) = w \neq 0$.

Вычислим действие оператора S на гармонику $q(\mathbf{x}) = \exp(i(\mathbf{c}, \mathbf{x}))$, где $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in R^2$. Во-первых, имеем

$$\nabla q(\mathbf{x}) = \{i\, c_1 \exp(i(\mathbf{c}, \mathbf{x})), i\, c_2 \exp(i(\mathbf{c}, \mathbf{x}))\}.$$

Ищем $\mathbf{u}$ вида $u_1 = i\, k_1 \exp(i(\mathbf{c}, \mathbf{x}))$, $u_2 = i\, k_2 \exp(i(\mathbf{c}, \mathbf{x}))$, удовлетворяющую соотношениям

$$\begin{aligned}
-\nu\Delta u_1 - \xi \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + \alpha u_1 - w\, u_2 &= \frac{\partial q(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \\
-\nu\Delta u_2 - \xi \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + \alpha u_2 + w\, u_1 &= \frac{\partial q(\mathbf{x})}{\partial x_2}.
\end{aligned}$$

Находим значения коэффициентов

$$k_1 = \frac{(\alpha + \nu|\mathbf{c}|^2 + \xi c_2^2)c_1 + (\xi c_1 c_2 + w)\, c_2}{(\alpha + \nu|\mathbf{c}|^2 \xi c_1^2)(\alpha + \nu|\mathbf{c}|^2 \xi c_2^2) - \xi^2 c_1^2 c_2^2 + w^2},$$
$$k_2 = \frac{(\alpha + \nu|\mathbf{c}|^2 + \xi c_1^2)c_2 - (\xi c_1 c_2 + w)\, c_1}{(\alpha + \nu|\mathbf{c}|^2 \xi c_1^2)(\alpha + \nu|\mathbf{c}|^2 \xi c_2^2) - \xi^2 c_1^2 c_2^2 + w^2}.$$

Следовательно,

$$S \exp(i(\mathbf{c}, \mathbf{x})) = -\mathrm{div}\, \mathbf{u} = \frac{(\alpha + \nu|\mathbf{c}|^2)|\mathbf{c}|^2}{(\alpha + \nu|\mathbf{c}|^2)(\alpha + (\nu + \xi)|\mathbf{c}|^2) + w^2} \exp(i(\mathbf{c}, \mathbf{x})).$$

Случай $\alpha > 0$, $\xi = 0$. С помощью похожих рассуждений находим

$$Q_S(\mathbf{w})^{-1} \exp(i(\mathbf{a}, \mathbf{x})) = \left(\nu + \frac{\alpha}{|a|^2} + \frac{w^2}{\alpha |a|^2}\right) \exp(i(\mathbf{a}, \mathbf{x})).$$

Наконец, непосредственными вычислениями получаем

$$Q_S(\mathbf{w})^{-1} S_p \exp(i(\mathbf{a}, \mathbf{x})) = \left(1 + \frac{w^2 \nu \alpha^{-1} |a|^2}{(\alpha + \nu|a|^2)^2 + w^2}\right) \exp(i(\mathbf{a}, \mathbf{x})).$$

Обозначим

$$\rho(|a|^2) = \frac{w^2 \nu \alpha^{-1} |a|^2}{(\alpha + \nu|a|^2)^2 + w^2}.$$

Справедливо

$$|a|_m^2 = \arg \max_{|a| \geq 0} \rho(|a|^2) = \frac{\sqrt{\alpha^2 + w^2}}{\nu},$$

и

$$\rho_{max} = \max_{|a| \geq 0} \rho(|a|^2) = \frac{w^2}{2\alpha(\sqrt{\alpha^2 + w^2} + \alpha)} \tag{3.136}$$

Так как $\rho(|a|^2) \to 0$ при $|a|^2 \to \infty$, получаем

$$\mathrm{cond}(Q_S(\mathbf{w})^{-1} S_p) \sim 1 + \rho_{max}.$$

Следовательно, чем меньше коэффициент ρ_{max}, тем ближе к единичному оператор $Q_S(\mathbf{w})^{-1} S_p$.

Замечание 3.6. На модельном примере периодической задачи мы видим, что переобуславливатель обеспечивает число обусловленности, не зависящее от ν. Это не противоречит тому факту, что при $\nu = 0$ переобуславливатель становится 'точным'. Объяснением является неоднородная по h сходимость задачи к предельной при $\nu \to 0$. Более того, проделанный анализ предполагает, что наихудшим случаем является случай $h_w \sim |a|_m^{-1} < \sqrt{\alpha^{-1}\nu}$, поэтому $h_w \to 0$ для $\nu \to 0$.

Замечание 3.7. Если все параметры задачи, включая шаг сетки, фиксированы, то число обусловленности улучшается при $\nu \to 0$.

Замечание 3.8. Число обусловленности улучшается при $\alpha \to \infty$ (шаг по времени стремится к нулю).

Замечание 3.9. Введём обозначение $\zeta = w/\alpha$ и перепишем (3.136) как

$$\rho_{max} = \frac{\zeta^2}{2(\sqrt{1+\zeta^2}+1)}.$$

Последнее предсказывает некоторое ухудшение сходимости при $\zeta \to \infty$.

Те же вычисления могут быть проделаны с симметричным переобуславливателем $Q_S(0)^{-1}$ из раздела 3.5.2. Можно проверить

$$Q_S(0)^{-1}S_p \exp(i(\mathbf{a},\mathbf{x})) = \left(1 - \frac{w^2}{(\alpha+\nu|a|^2)^2 + w^2}\right)\exp(i(\mathbf{a},\mathbf{x})).$$

Вычисляем

$$\mathrm{cond}(Q_S(0)^{-1}S_p) \sim 1 + \frac{w^2}{(\alpha+\nu)^2} = 1 + \frac{\zeta^2}{(1+\nu/\alpha)^2}.$$

Если рассмотреть наибольшие числа обусловленности по ν и шагу сетки, то получим при $\zeta \to \infty$

$$\begin{aligned} \mathrm{cond}(Q_S(\mathbf{w})^{-1}S_p) &\sim 1 + O(\zeta), \\ \mathrm{cond}(Q_S(0)^{-1}S_p) &\sim 1 + O(\zeta^2). \end{aligned}$$

Из проведенных численных экспериментов, см. далее, мы увидим, что при увеличении значения ζ сходимость итерационного метода с переобуславливателем $Q_S^{-1}(\mathbf{w})$ ухудшается не сильно в то время, как сходимость того же метода с $Q_S^{-1}(0)$ ухудшается значительно, если ν мало.

Случай $\alpha = 0$**,** $\xi \geq 0$**.** При $\alpha = 0$ мы исключаем оператор $L(\mathbf{w})$ из определения Q_S^{-1} и для переобусловленной системы получаем:

$$Q_S^{-1} S \exp(i(\mathbf{c}, \mathbf{x})) = \frac{\nu(\nu+\xi)|\mathbf{c}|^4}{\nu(\nu+\xi)|\mathbf{c}|^4 + w^2} \exp(i(\mathbf{c}, \mathbf{x})). \tag{3.137}$$

Если шаг сетки достаточно мал ($|\mathbf{c}|^4$ может принимать большие значения), то

$$\xi = O(1): \quad \mathrm{cond}(Q_S^{-1} S) \sim 1 + O(\nu^{-1}), \quad \nu \to 0, \tag{3.138}$$
$$\xi = 0: \quad \mathrm{cond}(Q_S^{-1} S) \sim 1 + O(\nu^{-2}), \quad \nu \to 0. \tag{3.139}$$

Асимптотика в (3.139) согласуется с известными результатами для задачи Осеена из [76]. Сравним (3.138) и (3.139). Если вариационная постановка задачи включает ∇div стабилизацию, то для ее дополнение Шура удается построить существенно лучше, но по-прежнему простой, переобуславливатель. Этот результат согласуется с улучшением точности дискретного решения стабилизированого метода конечных элементов, см. раздел 2.6. Таким образом, *в то время как члены* ∇div *- стабилизации обращаются в ноль в уравнении моментов системы Навье-Стокса, их добавление приводит к появлению дополнительной вязкости в дополнении Шура.*

Продолжим делать выводы из соотношения (3.137). Через λ_n обозначим n-ое по порядку возрастания собственное значение оператора $Q_S^{-1} S$: $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \ldots$. Собственное значение λ_n может иметь кратность больше 1 и соответствует некоторому $|\mathbf{c}|^2 \geq n$. Рассмотрим раздельно два случая: $\nu(\nu+\xi)|\mathbf{c}|^4 \leq w^2$ и $\nu(\nu+\xi)|\mathbf{c}|^4 > w^2$. Легко проверить, что

$$\frac{1}{2} \min \left\{ 1, n^2 \frac{\nu(\nu+\xi)}{w^2} \right\} \leq \lambda_n \leq 1, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{3.140}$$

Таким образом, помимо различного порядка малости по ν наименьшего собственного значения для $\xi = 0$ и $\xi = O(1)$, оператор $Q_S^{-1} S$ имеет не более $O(\nu^{-\frac{1}{2}})$ малых собственных чисел при $\xi = O(1)$, в то время как при $\xi = 0$ оценка на их количество $O(\nu^{-1})$.

Случай $\alpha = 0$**,** $\xi = 0$**.** Из численных экспериментов мы узнали, что в этом случае имеет смысл включать оператор $L(\mathbf{w})^{-1}$ в определение переобуславливателя Q_S (см. (3.135)), выбирая некоторое вспомогательное $\bar{\alpha} > 0$ в определении $L(\mathbf{w})$. Анализ Фурье подтверждает сделанное наблюдение. Вычисляем:

$$Q_S^{-1} S \exp(i(\mathbf{c}, \mathbf{x})) = \left(\frac{\nu^2 |\mathbf{c}|^4}{\nu^2 |\mathbf{c}|^4 + w^2} + \frac{(\bar{\alpha}^2 + w^2)\nu |\mathbf{c}|^2}{\bar{\alpha}(\nu^2 |\mathbf{c}|^4 + w^2)} \right) \exp(i(\mathbf{c}, \mathbf{x})).$$

Полагая $\bar{\alpha} = |w|$, получаем

$$Q_S^{-1} S \exp(i(\mathbf{c}, \mathbf{x})) = \frac{\nu^2 |\mathbf{c}|^4 + w\nu |\mathbf{c}|^2}{\nu^2 |\mathbf{c}|^4 + w^2} \exp(i(\mathbf{c}, \mathbf{x})).$$

Следовательно,

$$\mathrm{cond}(Q_S^{-1} S) \leq 4 \frac{\nu^2 + w^2}{\nu^2 + w\nu} = O\left(\frac{w}{\nu}\right) \quad \text{при } \frac{w}{\nu} \to \infty.$$

Это лучше,чем (3.139) при $w = O(1)$.

Отметим, что в “настоящих” задачах функция w не является константой, а может иметь очень сложное поведение. Поэтому численные эксперименты необходимы для проверки сделанных в этом разделе выводов.

Переобуславливатель дополнения Шура конвективной формы.

В этом разделе в справочной форме указаны переобуславливатели для дополнения Шура конвективной формы уравнений Осеена, встречающиеся в литературе. Так самый простой переобуславливатель, масштабированная матрица масс $Q_S := \nu^{-1} M$, был изучен в [76]. Были получены оценки для вещественных и мнимых частей собственных значений, из которых следовало, что число итераций методов типа GMRES для переобусловленной системы необходимое для достижения заданной точности может расти как $O(\nu^{-1})$ при уменьшении ν, но имеет равномерную оценку по h. Следующий выбор переобуславливателя, имеющий цель уменьшить зависимость от ν, был предложен в [78]. В терминах составных блоков матрицы системы (3.121) переобуславливатель записывается в виде

$$Q_S^{-1} := (BB^T)^{-1}(BAB^T)(BB^T)^{-1}.$$

Как видно из формулы, каждое использование Q_S^{-1} в итерациях требует дважды решать системы с матрицами (BB^T). Принято считать, что данная задача похожа на дискретную задачу Пуассона. Напомним, что при

аппроксимации уравнения Пуассона смешанными конечными элементами система может быть сведена к виду $(BM_u^{-1}B^T)$, где M_u – матрица масс конечных элементов аппроксимирующих потоки. Математический анализ свойств такого переобуславливателя отсутствует, а численные эксперименты показали в общем случае зависимость итераций методов типа GMRES для переобусловленной системы от ν вида $O(\nu^{-\frac{1}{2}})$, а также некоторую зависимость от h.
Наконец, в [100] (см. также [101]) на основе анализа функции Грина непрерывной модельной задачи в $\mathbb{R}^2$ был предложен следующий переобуславливатель:

$$Q_S^{-1} := M^{-1}A_pL_p^{-1},$$

где M - матрица масс на $\mathbb{Q}_h$, A_p – аппроксимация оператора конвекции-диффузии на $\mathbb{Q}_h$, L_p – аппроксимация оператора Лапласа с краевыми условиями Неймана на $\mathbb{Q}_h$. Обратим внимание, что в данном случае оператор Q_S^{-1} легко реализуется, если $\mathbb{Q}_h \subset \mathbb{H}^1$, или для конечных разностей, но его построение не очевидно, например, для кусочно-постоянных аппроксимаций давления. Анализ переобуславливателя и опыт численных экспериментов [77] показывает, что число итераций методов типа GMRES для переобусловленной системы имеет оценку не зависящую от h, но возрастает как $O(\nu^{-\frac{1}{2}})$ при уменьшении ν.

3.7.2 Численные примеры.

Рассмотрим уравнения Навье-Стокса (1.145) с аналитическим решением $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ и p вида

$$\begin{aligned} u_1(x,y) &= \frac{r_2}{2\pi}\frac{e^{r_2 y}}{(e^{r_2}-1)}\sin\left(\frac{2\pi(e^{r_2 y}-1)}{e^{r_2}-1}\right)\left(1-\cos\left(\frac{2\pi(e^{r_1 x}-1)}{e^{r_1}-1}\right)\right), \\ u_2(x,y) &= -\frac{r_1}{2\pi}\frac{e^{r_1 x}}{(e^{r_1}-1)}\sin\left(\frac{2\pi(e^{r_1 x}-1)}{e^{r_1}-1}\right)\left(1-\cos\left(\frac{2\pi(e^{r_2 y}-1)}{e^{r_2}-1}\right)\right), \\ p(x,y) &= r_1 r_2\frac{e^{r_1 x}e^{r_2 y}}{(e^{r_1}-1)(e^{r_2}-1)}\sin\left(\frac{2\pi(e^{r_1 x}-1)}{e^{r_1}-1}\right)\sin\left(\frac{2\pi(e^{r_2 y}-1)}{e^{r_2}-1}\right), \end{aligned} \tag{3.141}$$

где $r_1 = 3, r_2 = 0.1$ и $\Omega = (0,1)\times(0,1)$. Подобное решение моделирует вращающийся вихрь. Центр вихря имеет координаты (x_0, y_0), $x_0 \sim 0.785, y_0 \sim 0.512$. Для уравнения в вихревой форме по данным $\mathbf{u}$ и p вычисляется давление Бернулли. Приведенное выше конкретное решение взято из статьи [42], где можно найти соответствующие значения ошибки метода конечных элементов для задачи Осеена и Навье-Стокса в конвективной форме при использовании полностью стабилизированной схемы и P1/P1 конечных элементов на равномерных и адаптивных сетках.

Ниже приводятся результаты расчетов для P2isoP1-P0 конечных элементов на равномерной сетке с шагом h. В таблицах 3.7.2–3.7.2 показаны результаты для системы Осеена в вихревой форме. В таблицах были использованы следующие обозначения: N_{outer} – число итераций переобусловленного метода BiCGstab для решения уравнения (3.121) с относительной точностью (10^{-6}), использовался блочно-треугольный переобуславливатель из (3.122); N_{inner} – число итераций многосеточного метода необходимого для "точного" обращения матрицы A на каждом шаге метода BiCGstab в том случае, когда $Q_A = A$ (результаты приведены в таблице 3.7.2); ψ_A – показатель сходимости многосеточного метода для решения системы с матрицей A. Во всех расчетах, за исключением таблицы 3.7.2, в качестве переобуславливателя Q_A мы использовали 4 итерации многосеточного метода. ψ_S – показатель сходимости многосеточного метода для решения системы с матрицей $L(\mathbf{w})$ из (3.134). В таблице 3.7.2 также приведена $\mathbb{L}_2$-норма ошибки.

Результаты численных экспериментов приводят к следующим выводам. Вихревая форма уравнений Навье-Стокса приводит к линеаризованным уравнениям которые могут быть эффективно решены с помощью переобусловленного метода BiCGstab. Так использование переобуславливателя из раздела 3.7.1 приводит к универсальным результатам сходимости, см. таблицы 3.7.2 и 3.7.2. Заметим, как и предсказывал анализ Фурье в разделе 3.7.1, чтобы добиться универсальности при $\alpha = 0$ необходим дополнительный стабилизирующий член ($\xi > 0$). Этот дополнительный член также улучшает точность метода конечных элементов (см. таблицу 3.7.2) для малых ν (это также следует из теории стабилизированных методов из раздела 2.6). В тоже время, если $\xi = O(1)$ и $\nu \to 0$, то используемые нами многосеточные методы для решения задачи с матрицей A уже не так эффективны (N_{inner} возрастает при $\nu \to 0$ в таблице 3.7.2). Для этого случая нам по-прежнему необходимы более эффективный метод для построения универсального переобуславливателя Q_A.

В данной работе не рассматривался метод конечных разностей для аппроксимации дифференциальных уравнений. Тем не менее мы сочли уместным привести в этом параграфе некоторые результаты расчетов

Таблица 3.20: Сходимость переобусловленного метода с “точным” обращением A и $\alpha = 0, \xi = 0.2$.

	Вязкость			
h=1/32	2e-2	5e-3	1e-3	1e-4
N_{outer}	5	5	6	6
N_{inner}	13	27	65	230
	Шаг сетки			
ν =1e-3	1/16	1/32	1/64	1/128
N_{outer}	5	6	6	6
N_{inner}	55	65	85	93

Таблица 3.21: Сходимость переобусловленного метода с приближенным обращением A и $\alpha = 1, \xi = 0$.

	Вязкость				
h=1/32	2e-2	5e-3	1e-3	1e-4	
N_{outer}	13	12	14	10	
ψ_A	0.05	0.05	0.05	0.02	
ψ_S	0.39	0.31	0.30	0.21	
	Шаг сетки				
ν =1e-3	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256
N_{outer}	10	14	16	18	18
ψ_A	0.05	0.05	0.04	0.04	0.05
ψ_S	0.23	0.30	0.41	0.51	0.70

Таблица 3.22: Влияние параметра ξ на значение ошибки и сходимость.

		Значение ξ				
Вязкость		0	0.05	0.2	0.5	1.0
	$\|u-u_h\|$	1.9e-2	1.3e-2	8.6e-3	9.0e-3	1.3e-2
1e-1	$\|p-p_h\|$	4.3e-2	4.4e-2	4.9e-2	6.7e-2	1.3e-1
	N_{outer}	11	9	6	6	4
	ψ_A	0.06	0.07	0.11	0.16	0.21
	$\|u-u_h\|$	1.8e-0	1.1e-1	8.0e-2	1.2e-1	1.4e-1
1e-3	$\|p-p_h\|$	3.3e-1	5.0e-2	4.6e-2	5.3e-2	6.0e-2
	N_{outer}	29*	11	10	19	30
	ψ_A	0.08	0.37	0.50	0.59	0.61

для систем алгебраических уравнений, полученных методом конечных разностей для задачи Осеена.

В области $\Omega = (0,1)\times(0,1)$ рассмотрим MAC схему – разностная схема на разнесенных сетках. Эта схема устойчива – выполняется конечно-разностный аналог LBB условия (детали можно найти, например, в [11]). Рассмотрим уравнение Осеена в вихревой форме с функцией вихря $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v}$, где $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$,

$$\begin{aligned} v_1 &= \kappa(2y-1)x(1-x), \\ v_2 &= \kappa(2x-1)y(1-y). \end{aligned} \tag{3.142}$$

Сила конвекции определяется значением параметра κ.

Для решения системы (3.121) применяется метод Узавы. В качестве внешних итераций применяется метод минимальных невязок с одним направлением поиска на каждой итерации. В качестве начального вектора давления берем вектор $p(\mathbf{x})$, принимающий случайное значение из [0,1] в каждом узле сетки, и нормированный так, что выполнено равенство $\langle p, 1\rangle = 0$. Критерий сходимости, как и ранее, $||res^n||/||res^0|| < 10^{-6}$, где res^i - невязка $Sp^i - F$.

Сходимость метода Узавы с переобуславливателем из (3.134) сравнивается в таблицах 3.23,3.24 со сходимостью того же метода, если используется симметричный переобуславливатель, как для обобщенной задачи

Таблица 3.23: Число итераций с новым несимметричным переобуславливаелем из (3.134), $\alpha = 20, \kappa = 10$.

	Шаг сетки				
Вязкость	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512
1	17	17	18	18	19
1e-1	18	21	23	23	23
1e-2	12	15	17	20	21
1e-4	4	5	8	11	12
1e-6	2	2	3	3	4

Таблица 3.24: Число итераций с симметричным переобуславливателем $\alpha = 20, \kappa = 10$.

	Шаг сетки				
Вязкость	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512
1	18	18	18	17	17
1e-1	29	20	22	21	19
1e-2	29	22	20	18	18
1e-4	78	79	57	31	21
1e-6	90	90	90	89	83

Стокса.

3.8 Система Навье-Стокса.

3.8.1 Нелинейные итерации.

В этом разделе рассмотрим нелинейные итерации типа метода неподвижной точки. Подобные итерационные методы давно применяются для расчета уравнений Навье-Стокса. Для описания стандартного метода будем использовать в этом параграфе “дифференциальные” обозначения. Когда детали реализации становятся важными, будем оперировать матрицами и векторами коэффициентов.

Рассмотрим нелинейный итерационный процесс вида: для заданных $\{\mathbf{u}^m, p^m\}$ и параметра $\omega > 0$ очередное приближение $\{\mathbf{u}^{m+1}, p^{m+1}\}$ находится из соотношения

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}^{m+1} \\ p^{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^m \\ p^m \end{pmatrix} \tag{3.143}$$
$$-\omega LNS(\mathbf{u}^m)^{-1} \begin{pmatrix} -\nu\Delta\mathbf{u}^m - \xi\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{u}^m + N(\mathbf{u}^m, \mathbf{u}^m) + \nabla p^m - \mathbf{f} \\ -\mathrm{div}\,\mathbf{u}^m \end{pmatrix},$$

где $N(\mathbf{u}^m, \mathbf{u}^m) = \mathrm{curl}\,\mathbf{u}^m \times \mathbf{u}^m$ или $= \mathbf{u}^m \cdot \nabla \mathbf{u}^m$. Если $\sigma > 0$, то дополнительные стабилизирующие члены включаются при вычислении невязки в (3.143). $LNS(\mathbf{u}^m)^{-1}$ – оператор решающий линеаризованную задачу Навье-Стокса. Заметим, что подобные итерации зарекомендовали себя довольно устойчивыми и эффективными при решении уравнений в конвективной форме [150], особенно при использовании SUPG стабилизации. Наши расчеты показали, что для уравнений в вихревой форме итерации (3.143) не так устойчивы при малых ν. Для расчета стационарной задачи в вихревой форме мы иногда используем неявный метод Эйлера. Тогда на каждом шаге по времени необходимо решать задачу типа стационарного уравнения Навье-Стокса с дополнительным членом вида $\frac{1}{\delta t}\mathbf{u}$ в уравнении для моментов. Для решения этой нелинейной задачи применяем (3.143), выбирая в качестве начального приближения скорость с предыдущего временного слоя.

Линейная задача, решение которой требуется на каждом шаге (3.143) имеет вид: для заданных $\mathbf{u}^m$ и $res^m_{\mathbf{u}}$ найти $\{\mathbf{v}, q\}$ удовлетворяющие системе

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t}\mathbf{v} - \nu\Delta\mathbf{v} - \xi\nabla\mathrm{div}\,\mathbf{v} + N(\mathbf{u}^m, \mathbf{v}) + \nabla q &= res^m_{\mathbf{u}} \quad \text{в } \Omega, \\ -\mathrm{div}\,\mathbf{v} &= -\mathrm{div}\,\mathbf{u}^m \quad \text{в } \Omega \end{aligned} \tag{3.144}$$

вместе с однородными краевыми условиями на $\partial\Omega$, здесь $N(\mathbf{u}^m, \mathbf{v}) = \mathrm{curl}\,\mathbf{u}^m \times \mathbf{v}$ для вихревой формы и $N(\mathbf{u}^m, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}^m \cdot \nabla)\mathbf{v}$ для конвективной. Если для дискретизации нелинейной задачи использовался SUPG метод, то стабилизирующие члены линеализуются :

$$\sum_\tau \sigma(\tau, \mathbf{u}^m)(\mathbf{u}^m \cdot \nabla \mathbf{v}_h, \mathbf{u}^m \cdot \nabla \mathbf{w}_h)_\tau,$$

и включаются в конечно-элементную постановку (3.144). Этот дополнительный член является симметричным и неотрицательно определенным.

Таблица 3.25: Сходимость итерационных методов при решении ур. Навье-Стокса в вихревой форме.

Вязкость		Шаг сетки			
		1/16	1/32	1/64	1/128
	N_{stp}	7	7	7	7
ν=2e-2	N_{iter}	45	50	50	52
	ψ_{outer}	0.13	0.15	0.16	0.16
	N_{stp}	73	78	81	83
ν=5e-3	N_{iter}	290	383	467	490
	ψ_{outer}	0.09	0.13	0.15	0.15

3.8.2 Численные примеры.

В таблице 3.8.2 показаны результаты сходимости линейных и нелинейных итерационных методов при расчете уравнений Навье-Стокса в вихревой форме с точным аналитическим решением (3.141). Использовались конечные элементы $P2isoP1/P0$. Здесь N_{stp} – число нелинейных итераций типа неподвижной точки для достижения относительной точности 10^{-6}. N_{iter} – *суммарное* число итераций метода BiCGstab затраченное для решения (с относительно низкой точностью) вспомогательной линейной задачи на каждом итерации метода неподвижной точки, ψ_{outer} – средний показатель сходимости итераций для линейной задачи.

В таблице 3.26 показаны результаты сходимости линейных и нелинейных итерационных методов при расчете задачи о движущейся каверне из § 2.7.2 при различных значениях числа Рейнольдса.

При расчете задачи о движущейся каверне при Re=5000 на сетке с $h = 1/256$ для достижения точности по невязки 10^{-7} потребовалось в общей сложности 904 линейных итераций при использовании конвективной формы и 2670 при использовании вихревой. В первом случае использовалась SUPG стабилизация и ∇div стабилизация. Во втором случае только ∇div стабилизация. Найденное решение оказывалось немного более точным во втором случае (см. § 2.7.2).

Таблица 3.26: Сходимость итерационных методов при решении задачи о каверне.

Число Рейнольдса, Метод, Параметр ξ		Шаг сетки			
		1/16	1/32	1/64	1/128
Вихревая форма					
	δt	1	0.25	0.166	0.1
Re=400	N_{stp}	18	87	148	246
BE	N_{iter}	178	504	633	791
$\xi = 0.2$	ψ_C	0.19	0.11	0.12	0.07
	δt	1	0.25	0.1	0.0625
Re=1000	N_{stp}	30	67	151	279
BE	N_{iter}	183	381	582	1290
$\xi = 0.2$	ψ_C	0.26	0.18	0.15	0.10
Конвективная форма					
Re=1000	N_{stp}	12	13	13	13
Fix-point	N_{iter}	301	581	903	1339
$\xi = 0$	ψ_C	0.88	0.92	0.93	0.95
Re=1000	N_{stp}	11	15	15	14
Fix-point	N_{iter}	78	151	202	225
$\xi = 0.2$	ψ_C	0.65	0.75	0.8	0.83

N_{stp} - число нелинейных итераций,
N_{iter}- суммарное число итераций BiCGstab,
ψ_C - средний показатель сходимости при решении
линеаризованной задачи Навье-Стокса.

3.9 Выводы

В этой главе были рассмотрены многосеточные и переобусловленные итерационные методы для уравнений и систем уравнений в частных производных, представленных в главе 1. Как уже отмечалось, эти уравнения имеют особенности при стремлении некоторых физических или численных параметров к своим критическим значениям. Поэтому в этой главе были предложены и изучались итерационные методы, имеющие не только оптимальную арифметическую сложность, но и достаточно быструю сходимость при всех допустимых значениях параметров. Для обоснования этих свойств для многосеточных методов были доказаны нетривиальные оценки на норму матриц итераций. Эти оценки являются равномерными по параметрам и шагу дискретизации или числу сеточных уровней, они были получены путем доказательства соответствующих свойств сглаживания и аппроксимации на матричном уровне, что, в свою очередь, существенно использовало результаты предыдущих глав. Для переобусловленных методов доказаны равномерные оценки на собственные значения переобусловленных матриц. Теоретические результаты главы проиллюстрированы данными численных экспериментов.

Заключение

В настоящей работе предложены и изучены многосеточные алгоритмы и переобуславливатели, обеспечивающие равномерную по параметрам задачи сходимость итерационных методов решения широкого круга задач математической физики. Оценки сходимости доказаны и приведены в виде теорем.

Как основные достижения работы отметим следующие результаты:

1. Доказательство равномерной сходимости W-цикла для устойчивой конечно-элементной аппроксимации модельной задачи конвекции диффузии с краевыми условиями Дирихле и смешанными краевыми условиями без предположений на малость самой грубой сетки. Доказательство базируется на “тонких” оценках для дифференциальной задачи и метода конечных элементов; в силу непериодических краевых условий и использования метода конечных элементов исследование не могло быть проведено с помощью анализа Фурье.

2. Для консервативной (квази-)линеаризации уравнений Навье-Стокса в вихревой форме предложен блочный переобуславливатель обеспечивающий универсальность итерационного метода для линейной задачи. Проведен его анализ в двумерном периодическом случае.

3. Доказательство универсальных оценок для переобуславливателя Кахун-Шабата для обобщенной задачи Стокса в областях, допускающих H^2 регулярность задачи Пуассона. Переобуславливатель был предложен в 1988 году. Вопрос получения универсальных оценок оставался открытым 10 лет.

4.Для системы уравнений с косо-симметрической реакцией, вспомогательной при решении уравнений Н.-С. в вихревой форме, доказаны равномерные по параметрам оценки устойчивости метода конечных элементов и предложен универсальный многосеточный метод. В случае $\Omega \in \mathbb{R}^2$ доказаны оценки сходимости W-цикла многосеточного метода, не зависящей от набора параметров при некоторых ограничениях на функцию вихря.

5. Для задачи Стокса с интерфейсом доказано равномерное (относительно скачка в коэффициенте вязкости) inf-sup условие устойчивости, как для дифференциальной задачи, так и для конечно-элементной. Получены оптимальные оценки сходимости метода конечных элементов в специально выбранных нормах. Предложен переобуславливатель для дополнения Шура дискретной задачи, для которого доказана оценка, не зависящая от ε и h. Это позволило построить блочные итерационные методы, обладающие свойством универсальности.

6. Впервые доказаны результаты о сходимости широко используемого на практике “сокращенного” стабилизированного метода конечных элементов (SUPG) для задачи Осеена.

7. Проведен единый анализ сходимости стабилизированных методов конечных элементов для линеаризованных уравнений Навье-Стокса как в конвективной, так и в вихревой форме.

8. Весь теоретический материал диссертации детально иллюстрирован многочисленными численными примерами.

Литература

[1] Бахвалов, Н.С.: О сходимости одного релаксационного метода для эллиптического оператора с естественными ограничениями,*ЖВМиМФ*, **6** (1966), С. 101–135.

[2] Бахвалов, Н.С., Кобельков Г.М., Чижонков, Е.В.: Итерационный метод решения эллиптических задач со скоростью сходимости, не зависящей от разброса коэффициентов, Препринт N 190, М.: ОВМ АН СССР, 1988.

[3] Бахвалов, Н.С., Богачев, К.Ю., Мэтр, Ж.Ф.: Эффективный алгоритм решения жестких эллиптических задач с приложениями к методу фиктивных областей,*ЖВМиМФ*, **39** (1999), С. 919–931.

[4] Бахвалов, Н.С.: Эффективные методы решения жестких многомерных многопараметрических задач,*ЖВМиМФ*, **39** (1999), С. 2019–2049.

[5] Бахвалов, Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М., *Численные методы*, Москва: Лаборатория Базовых Знаний, 2000.

[6] Богачев, К.Ю.: Эффективный алгоритм решения эллиптических задач с большими параметрами,*ЖВМиМФ*, **40** (2000), С. 402–415.

[7] Брусникин, М.Б.: *Применения метода фиктивных областей для решения задач математической физики в неодносвязном случае*, Дис. на соискание уч. степ. канд. Физ-мат. наук, мех-мат. МГУ им. Ломоносова, Москва, 2002.

[8] Дьяконов, Е.Г.: О некоторых прямых и итерационных методах, основанных на окаймлении матриц, *Числ. методы в мат. физ.* Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, **6** (1979), С. 45–68.

[9] Калпуш, Т. В., Шайдуров, В.В., Дифференциальная схема для уравнений конвекции-диффузии на ориентированной сетке, *Вычислительные технологии*, **4** (1999), С. 72–85.

[10] Кобельков Г.М. Разностная схема для расчетов нестационарных уравнений Навье-Стокса, *ЖВМиМФ*, **24** (1984), С. 294–304.

[11] Кобельков Г.М., О численных методах решения уравнений Навье-Стокса в переменных скорость-давление, *Вычислительные процессы и системы*, Выпуск 8, Москва: Наука, 1991, С. 204–237.

[12] Кобельков Г.М., Симметричные аппроксимации уравнений Навье-Стокса, *Мат. Сборник* **193** (2002), С. 87–108.

[13] Кондратьев, В.А., Олейник, О.А. (1988): Краевая задача для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенства Корна, Успехи Мат. Наук., **43**, С. 65–119

[14] Ладыженская О.А., *Краевые задачи математической физики,* Москва: Наука, 1973.

[15] Непомнящих, С.В.: Метод декомпозиции областей для разрывных коэффициентов, Техн. отчет N 891. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1990.

[16] Пальцев Б.В., Быстосходящиеся итерационные методы с полным расщеплением граничных условий для многомерных сингулярно возмущенных систем типа Стокса, *Мат. Сборник.* **185** (1994), N9, С. 109–138.

[17] Пальцев Б.В., Быстосходящиеся итерационные методы с неполным расщеплением граничных условий для многомерных сингулярно возмущенных систем типа Стокса, *Мат. Сборник.* **185** (1994), N4, С. 101–150.

[18] Пальцев Б.В., Чечель И.И., О релизации билинейными к онечными элементами итерационных методов с неточным расщеплением краевых условий для систем типа Стокса в прямоугольнике, *ЖВМиМФ*, **39** (1999), С. 1828–1854.

[19] Седов, Л.И., *Механика сплошной среды,* Наука, Москва, 1970

[20] Федоренко, Р.П., О скорости сходимости одного итерационного процесса,*ЖВМиМФ*, **4** (1964), С. 227–235.

[21] Чижонков, Е.В., О методе Эрроу-Гурвица с переменными итерационными параметрами, *Известия Вузов, Математика*, 1999, , no. 5, С. 65–72.

[22] Чижонков, Е.В., *Релаксационные методы решения седловых задач,* Москва: ИВМ РАН, 2002.

[23] Шайдуров, В.В., Многосеточный итерационный алгоритм для решения стационарной разностной задачи Стокса , *Вычислительные процессы и системы*, Выпуск 6, Москва: Наука, 1988, С. 264–270.

[24] Шайдуров, В.В., *Многосеточные методы конечных элементов,* Москва: Наука, 1989.

[25] Шишкин, Г.И., Сеточная аппроксимация сингулярно возмущенных краевых задач на локально переизмельчаемых сетках. Уравнения реакции-диффузии, *ЖВМиМФ*, **40** (2000), С. 680–691.

[26] Шишкин, Г.И., Аппроксимация сингулярно возмущенных уравнений реакции-диффузии на адаптивных сетках, *Математическое моделирование*, **13** (2001), С. 103–118.

[27] Armaly, B.F., Durst, F., Pereira, J.C., and Schonung, B., Experimental and theoretical investigation of backward-facing step, *J. Fluid Mech.,* **127** (1983), P. 473–496.

[28] Auteri, F., Parolini, N., Quartapelle, L., Numerical investigation on the stability of singular driven cavity flow, *J. Comput. Physics*, **183** (2002), P. 1–25.

[29] Axelsson, O., *Iterative solution methods*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994.

[30] Babuška, I., The finite element method with lagrangian multipliers, *Numer. Math.,* **20** (1973), P. 179–192.

[31] Babuška, I., The finite element method for elliptic problems with discontinuous coefficients, *Computing*, **5** (1970), P. 207–213.

[32] Babuška, I., Aziz, A.K. On the angle condition of the finite element method, *SIAM J. Numer. Anal.,* **13** (1976), P. 214–226.

[33] Babuška, I., Caloz, C., Osborn, J., Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients, *SIAM J. Numer. Anal.*, **31** (1994), P. 945–981.

[34] Bakhvalov, N.S., Solution of the Stokes nonstatonary problem by the fictitious domain method, *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, **10** (1995), P. 163–172.

[35] Bank, R.E., Dupont, T., Yserentant, H.: The hierarchical basis multigrid method. *Numer. Math.*, **52** (1988), P. 427–458.

[36] Bank, R.E., Welfert, B.D., and Yserentant, H., A class of iterative methods for solving saddle point problems, *Numer. Math.*, **56** (1990), P. 645–666.

[37] Bank R.E., Benbourenane M., The hierarchical basis multigrid method for convection-diffusion equations, *Numer. Math.*, **61** (1992), P. 7–37.

[38] Benzi, M., HSS preconditioning for the Oseen problem, in *Proc. of European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2004* (Eds. P. Neittaanmäki, etc.), 2004

[39] Benzi, M., Liu, J., An Efficient Solver for the Incompressible Navier-Stokes Equations in Rotation Form, Dept. of Math. and Comp. Sci., Emory University, Technical report TR-2006-006-A, 2006.

[40] Bercovier, M. , Pironneau, O., Error estimates for finite element method solution of the Stokes problem in primitive variables *Numer. Math.*, **33** (1979), P. 211–224.

[41] Bernardi, C., Verfürth, R., Adaptive finite element methods for elliptic equations with non-smooth coefficients, *Numer. Math.*, **85** (2000), P. 579–608.

[42] Berrone, S., Adaptive discretization of the Navier Stokes equations by stabilized finite element methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **190** (2001), P. 4435–4455.

[43] Bey J., Wittum G., Downwind numbering: robust multigrid for convection-diffusion problems, *Appl. Numer. Math.*, **23** (1997), P. 177–192.

[44] Blasco, J., Codina, R., Space and time error estimates for a first order, pressure stabilized finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations, *Appl. Numer. Math.,* **38** (2001), P. 475–497

[45] Brackbill, J.U., Kothe, D.B. and Zemach, C., A continuum method for modeling surface tension, *J. Comput. Physics*, **100** (1992), P. 335–354.

[46] Braess, D., Sarazin R., An efficient smoother for the Stokes problem, *Applied Numerical Mathematics*, **23** (1997), P. 3–19.

[47] Bramble, J.H., *Multigrid Methods*, Pitman Research Notes in Mathematics, V. 294, John Wiley, New York, 1993.

[48] Bramble, J.H. and King, J.T., A finite element method for interface problems in domains with smooth boundaries and interfaces, *Advances in Comp. Math.*, **6** (1996), P. 109–138.

[49] Bramble, J. and Xu, J. Some estimates for a weighted L^2 Projection, *Math. Comp.,* **56** (1991), P. 463–476.

[50] Bramble, J.H. and Pasciak, J.E., Iterative techniques for time dependent Stokes problems, *Comput. Math. Appl.* **33** (1997), P. 13–30.

[51] Bramble, J.H., Pasciak, J.E., and Vassilev, A.T., Analysis of the inexact Uzawa algorithm for saddle point problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, **34** (1997), P. 1072–1092.

[52] Bramble, J.H., Pasciak, J.E., Vassilev, A.T., Uzawa type algorithms for nonsymmetric saddle-point problems, *Math. Comput.*, **69** (2000), P. 667–689.

[53] Bramble, J.H., Pasciak, J.E., Vassilevski, P.S., Computational scales of Sobolev norms with application to preconditioning, *Math. Comput.*, **69** (2000), P. 463–480.

[54] Bramble, J.H., Pasciak, J.E., Wang, J., Xu, J., Convergence estimates for multigrid algorithms without regularity assumptions, *Math. Comp.*, **57** (1991), P. 23–45.

[55] Bramble, J.H., Pasciak, J.E., Xu, J., Parallel multilevel preconditioners, *Math. Comp.*, **55** (1990), P. 1–22.

[56] Bramble J.H., Pasciak J.E., Xu J. The analysis of multigrid algorithms for nonsymmetric and indefinite problems , *Math. Comp.*, **51** (1988), P. 389–414.

[57] Brandt, A.: Multi-level adaptive technique (MLAT) for fast numerical solution to boundary value problems, Proc. 3rd Int. Conf. on Numerical Methods in Fluid Mechanics, Vol.1, H.Cabannes and R.Temam (eds) in *Lecture Notes in Physics* V.18, Springer, Berlin, P. 82-89 (1973).

[58] Brandt, A.: Multi-level adaptive solutions to boundary value problems, *Math. Comput.*, **31** (1977), P. 333–390.

[59] Brezzi, F., On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers, *RAIRO Anal Numer.*, **8** (1974), P. 129–151.

[60] Brezzi, F., Fortin, M., *Mixed and hybrid finite element methods*, New-York: Springer-Verlag, 1991.

[61] Bruneau, Ch.H., Fabrie, P.Effective downstream boundary conditions for incompressible Navier-Stokes equations, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **19** (1994), P. 693–705.

[62] Bychenkov, Yu.V. and Chizonkov, E.V. Optimization of one three-parameter method of solving an algebraic system of Stokes type, *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model,* **14** (1999), P. 429–440.

[63] Cahouet J., Chabard J.P., Some fast 3D finite element solvers for the generalized Stokes problem, *Int. J. Numer. Methods Fluids.*, **8** (1988), P. 869–895.

[64] Chang, Y.C., Hou, T.Y., Merriman, B., Osher, S., Eulerian capturing methods based on a level set formulation for incompressible fluid interfaces, *J. Comput. Phys.*, **124** (1996), P. 449–464.

[65] Chen, Z. and Zou, J., Finite element method and its convergence for elliptic and parabolic interface problems, *Numer. Math.*, **79** (1998), P. 175–202.

[66] Ciarlet, P.G., *The Finit Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[67] Ciarlet, P.G., Basic error estimates for elliptic problems, *Handbook of numerical analysis*, V.2, Ciarlet, P.G., Lions J.L. eds., 1991, North-Holand, Amsterdam

[68] Codina, R. *A finite element formulation for viscous incompressible flows,* Centro Internac. Metodos Numer Ing., Politec. Cataluna, Barcelona, 1993.

[69] Codina, R., Finite element solution of the Stokes problem with dominating Coriolis force, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.,* **142** (1997), P. 215–234

[70] Ciarlet, P.G., A stabilized finite element method for generalized incompressible flows, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.,* **190** (2001), P. 2681–2706

[71] Dahlke, S., Dahmen, W., Urban, K., Adaptive wavelet methods for saddle point problems—optimal convergence rates. *SIAM J. Numer. Anal.*, **40** (2002), P. 1230–1262.

[72] Dahmen, W., Multiscale and wavelet methods for operator equations. *Multiscale problems and methods in numerical simulations*, P. 31–96, Lecture Notes in Math., 1825, Springer, Berlin, 2003.

[73] Dauge, M., Stationary Stokes and Navier-Stikoes systems on two- and three-dimentional domains with corners. Part I: Linearized equations, *SIAM J. Math. Anal.*, **20** (1983), P. 74–97.

[74] D'yakonov, E.G.: On triangulation in the finite element method and efficient iterative methods,*Topics in Numer. Analys III*, Acad. Press, 1979, P. 103–123.

[75] Elman, H.C. and Golub, G.H., Inexact and preconditioned Uzawa algorithms for saddle point problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, **31** (1994), P. 1645–1661.

[76] Elman, H.C., Silvester, D. Fast nonsymmetric iterations and preconditioning for Navier-Stokes equations, *SIAM J. Sci. Comp.*, **17** (1996), P. 33–46.

[77] Elman, H.C., Silvester, D., Wathen, A., Perfomance and analysis of saddle point preconditioners for discrete steady-state Navier-Stokes equations, *Numer. Mathem.*, **90** (2002), P. 665–688.

[78] Elman, H.C., Preconditioning of the steady-state Navier-Stokes equations with low viscosity *SIAM J. Sci. Comp.*, **20** (1999), P. 1299–1316.

[79] Eriksson, K., Johnson, C., Adaptive streamline diffusion finite element methods for stationary convection-diffusion problems, *Math. Comp.*, **60** (1993), P. 167–188

[80] Franca, L. P., Frey S. L., Stabilized finite element methods. II. The incompressible Navier-Stokes equations *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **99** (1992), P. 209–233.

[81] Garbey, M., Kuznetsov, Yu.A., Vassilevski, Yu.V. A parallel Schwarz method for convection-diffusion problem *SIAM J. Sci. Comp.*, **22** (2000), P. 891–916.

[82] Gartling, D.K., A test problem for outflow boundary conditions – flow over the back-facing step, *Int. J. Numer. Methods Fluids,* **11** (1990), P. 953–967.

[83] Ghia, U., Ghia, K.N., Shin, C.T., High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, *J. Comput. Phys.*, **48** (1982), P. 387–411.

[84] Girualt, V., Raviat, P.A.,*Finite element methods for Navier-Stokes equations*, Berlin: Springer-Verlag, 1986.

[85] Glowinski, R., and Le Tallec, P. *Augmented lagrangian and operator splitting methods in nonlinear mechanics,* SIAM, Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1989.

[86] Gresho, P.M., Incompressible fluid dynamics: some fundamental formulation issues, *Annual. Rev. Fluid Mech.* **23**(1991), P.413–453.

[87] Gresho, P.M., Sani, R.L., On pressure boundary conditions for incompressible Navier-Stokes equations, *Int. J. numer. methods fluids.* **7** (1987), P. 1111–1145.

[88] Gresho, P.M, Gartling, D.K., Torezynski, J., Cliffe, K.A., Winters, K.H., Garrat, T.J., Spence, A., Goodrich, J.W., Is the steady viscous incompressible two-dimensional flow over a backward facing step at Re=800 stable?, *Int. J. Numer. Methods Fluids,* **17** (1993), P. 501–541.

[89] Griebel, M., Oswald, P., Tensor product type subspace splittings and multilevel iterative methods for anisotropic problems, *Adv. Comput. Math.* **4** (1995), P. 171–206.

[90] Grisvard P., *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Boston: Pitman, 1985.

[91] Gross, S., Jorg, P., Reichelt, V., Reusken,A., The DROPS Package for Numerical Simulations of Incompressible Flows Using Parallel Adaptive Multigrid, IGPM RWTH-Aachen, Technical report No 211 (2002), (http://www.igpm.rwth-aachen.de/reports).

[92] Hackbusch, W., Ein iteratives Verfahren zur schnellen Auflösung elliptischer Randwertpromleme, Universität Köln, Report 77-8, 1977.

[93] Hackbusch, W., *Multi-grid Methods and Applications*, Berlin, Heidelberg: Springer, 1985.

[94] Hackbusch, W., *Iterative solution of large sparse systems of equations,* New-York, Berlin: Springer, 1994.

[95] Hackbusch W., Probst T., Downwind Gauss-Seidel smoothing for convection dominated problems, *Numer. Linear Algebra Appl.* **4** (1997) P. 85–102.

[96] Hakopian, Yu. R.; Kuznetsov, Yu. A., Algebraic multigrid/substructuring preconditioners on triangular grids, *Soviet J. Numer. Anal. Math. Modelling*, **6** (1991), P. 453–483.

[97] He, J., A fully discrete stabilized finite element method for the time-dependent Navier-Stokes problem, *IMA J. Numer. Anal.,* **23** (2003), P. 665–691

[98] Johannsen K. Robust smoothers for convection-diffusion problems. Preprint IWR, University of Heidelberg, 1999.

[99] Karki K.C., Sathyamurthy P.S., Patankar S.V., Performence of a multigrid method with an improved discretization scheme for three-dimensional fluid flow calculations, *Numer. Heat Transfer B,* **29** (1996), P. 275–288.

[100] D. Kay, D. Loghin, A Green's function preconditioner for the steady state Navier-Stokes equations, Oxford University Computing Lab., report 99/06 (1999).

[101] D. Kay, D. Loghin, A. Wathen A preconditioner for the steady-state Navier-Stokes equations, *SIAM J. Sci.Comput.*, **24** (2002), P. 237–256.

[102] Keskar, J., Lyn, D. A., Computation of a laminar backward-facing step at $Re = 800$ with a spectral domain decomposition method, *Intern. Journal Comput. Fluid Dynam.*, **29** (1999), P. 411 – 427.

[103] Kobelkov G.M. Fictitious domain method and the solution of elliptic equations with highly varying coefficients, *Sovet. J. Numer. Anal. Math. Model,* **6** (1987), P. 407–418.

[104] Kobelkov G.M. On solving the Navier-Stokes equations at large Reynolds numbers, *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model,* **10** (1995), P. 33–40.

[105] Kobelkov G.M. On the solution of the boundary value problem for the diffusion equation with highly varying coefficients, *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model,* **11** (1996), P. 487–495.

[106] M. Krizek, P. Neittaanaki, R. Glowinski, S. Korotov (eds), Conjugate Gradient Algorithms and Finite Element Methods,(Proceedings of Int.Conf. 50 years of CG) Scientific Computing, Springer-Verlag, Berlin, 2004

[107] A. Klawonn, G. Starke, Block triangular preconditioners for nonsymmetric saddle point problem, *Numer. Math.* **81** (1999), P. 577–594.

[108] Knobloch, P., Tobiska, L., A streamline diffusion method for nonconforming finite element approximations applied to the linearized incompressible Naver-Stokes equations, in: Proc. 4th Intern. Conf. Numer. Meths. Applic., Sofia 1998, World Sc., Singapore, P. 530-538, 1999.

[109] Kuznetsov, Yu.A., Multigrid domain decomposition method for elliptic problems, in: Proc. 8th Intern. Conf. Comput.Meth. for Appl. Sci. and Engng., 1997, V.2, P. 605-616.

[110] Lions J.L. *Quelques methods de resolution des problemes aux limites nonlineaires,* Dunod, 1968.

[111] Loghin, D., Analysis of preconditioned Picard iterations for the Navier-Stokes equations, Oxford Univ. Comput. Lab., Report no. 01/10, 2001.

[112] Lube G., Stabilized Galerkin finite element methods for convection dominated and incompressible flow problems, *Num. Anal. and Math. Modelling,* Banach Center publications, **29** (1994), P. 85-104.

[113] Mandel J., Multigrid convergence for nonsymmetric, indefinite variational problems and one smoothing step, *Appl. Math. Comput.*, **19** (1986), P. 201–216

[114] Marinova R.S., Christov C.I., Marinov T.T. A fully coupled solver for incompressible Navier-Stokes equations using operator splitting, *Intern. Journal Comput. Fluid Dynam.*, **17** (2003), P. 371–385.

[115] Moffatt H., Tsoniber A., Helicity in laminar and turbulent flow, Annual Review of Fluid Mechanics, **24** (1992), P. 281-312.

[116] Mulder W., A new multigrid approach to convection problems, *J. Comput. Phys.* **83** (1989), P. 303–323.

[117] Murphy, M.F., Golub, G.H., Wathen, A.J., A note on preconditioning for indefinite linear systems *SIAM J. Sci. Comput.,* **21** (2000), P. 1969–1972.

[118] Naik N.H., van Rosedale J., The improved robustness of multigrid elliptic solvers based on multiple semicoarsened grids, *SIAM Numer. Anal.*, **30** (1993), P. 215–229.

[119] Nepomnayaschikh, S.V.: Domain decomposition method for elliptic problems with discontinuous coefficients, Proc. 4-th Conf. Domain Decomposition Methods for Partial Differencial Equations. Philadelphia, PA, SIAM, 1991, P. 242–251.

[120] Niijima, K., Poinwise error estimates for a streamline diffusion finite element scheme. *Numer. Math.*, **56** (1990), P. 707–719.

[121] Osher, S., Fedkiw, R.P., Level set methods: An overview and some recent results, *J. Comput. Phys.*, **169** (2001), P. 463–502.

[122] Patankar S.V., Spalding D.B., A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimentional parabolic flows, *Int. J. Heat. Mass. Transfer*, **15** (1972), P. 1787–1806.

[123] Petzoldt, M., A posteriori error estimators for elliptic equations with discontinuous diffusion coefficients, *Advances in Computational Mathematics*, **16** (2002), P. 47–75.

[124] Persson I., Samuelsson K. , Szepessy A., On the convergence of multigrid methods for flow problems, *Electron. Trans. Num. Anal.*, **8** (1999), P. 46–87.

[125] Plum, M. and Wieners, C., Optimal a priori estimates for interface problems, *Numer. Math.*, **56** (2003), P. 735–759.

[126] Powell, C., Silvester, D., Black-box preconditioning for mixed formulation of self-adjoint elliptic PDEs. In: *Challenges in Scientific Computing - CISC 2002*, ed. E. Bänsch. Lecture Notes in Computational Science and Engineering, V. 35, 2003, P. 268–285.

[127] Quarteroni, A. and Valli, A. *Numerical approximation of partial differential equations* Springer, Berlin, 1997

[128] Ramage A., A multigrid preconditioner for stabilised discretization of advection-diffusion problem *J.Comput. Appl. Math.*, **110** (1999), P. 187–203.

[129] Rebholz L. G. , An energy and helicity conserving finite element scheme for the Navier-Stokes equations, Preprint, Department of Mathematics, University of Pittsburgh, 2006.

[130] Reusken A.: A new lemma in multigrid convergence theory, Report 91-07 of the Department of Mathematics and Numerical Analysis of Eindhoven University of Technology, May 1991.

[131] Reusken, A., On maximum norm convergence of multigrid methods for two-point boundary value problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, **29** (1992), P. 1569–1578

[132] Reusken A., Multigrid with matrix-dependent transfer operators for convection-diffusion problems, Multigrid Methods 4, Proceedings of the fourth multigrid conference (eds. P.W. Hemker, P. Wesseling), International series of Numerical Mathematics. 1994. V. 116. P. 269–280.

[133] Reusken A., Fourier analysis of a robust multigrid method for convection-diffusion equations, *Numer. Math.*, **71** 1995, P. 365–397.

[134] Reusken A., Convergence analysis of a multigrid method for convection-diffusion equations, *Numer. Math.*, **91** (2002), P. 323–349.

[135] Roos, H.-G., Stynes, M., and Tobiska, L.,*Numerical methods for singulary perturbed differential equations: convection diffusion and flow problems* Springer Ser. in Comp. Math. V.24, 1996, Springer, Berlin, Heidelberg.

[136] Rusten, T. and Winther, R., A preconditioned iterative method for saddlepoint problems, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **13** (1992), P. 887–904.

[137] Sani, R.L., Gresho P.M., Resume and remarks on open boundary conditions minisimposium. *Int.J.Numer.Meth.Fluids*, **18** (1994), P. 983–1008.

[138] Silvester, D., Elman, H.C., Kay, D., and Wathen,A., Efficient preconditioning of the linearized Navier-Stokes equations, *J. Comput. Appl. Math.*, **128** (2001), P. 261–279.

[139] Silvester, D. Wathen, A., Fast iterative solution of stabilised stokes systems. part II: using general block preconditioners. *SIAM J. Numer. Anal.*, **31** (1994), P. 1352–1367.

[140] Schöberl J., Zulehner W., On additive Schwarz-type smoothers for saddle point problems, Report 01-20 of the Inst. of Analysis and Computational Mathematics of Johannes Kepler University Linz, June 2001.

[141] Schöberl, J., Multigrid methods for a parameter dependent problem in primal variables, *Numer. Math.*, **84** (1999), P. 97–119.

[142] Shishkin, G. I. Optimal piecewise uniform grids for singularly perturbed equations of a convection-diffusion type. *Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling* **16** (2001), P. 157–174.

[143] Stevenson, R., A robust hierarhical basis preconditioner on general meshes, *Numer. Math.*, **78** (1997), P. 369–303.

[144] Stevenson, R.P., New estimates of the contraction number of V-cycle multi-grid with applications to anisotropic equations. In: Incomplete decompositions (W. Hackbusch and G. Wittum, eds.), Proceedings of the eight GAMM Seminar. Notes on Numerical Fluid Mechanics **41** (1993), P. 159–167.

[145] Stevenson, R., Robustness of multi-grid applied to anisotropic equations and equations with re-entered corners, *Numer. Math.*, **66** (1993), P. 373–398.

[146] Temam, R. , *Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis,* North-Holland, Amsterdam, 1977.

[147] Thompson, M.C., Ferziger J.H., An adaptive multigrid teqnique for the incompressible Navier-Stokes equations, *J. Comput. Phys.,* **82** (1989), P. 94–121.

[148] Tobiska, L., and Verfürth, R., Analysis of a streamline diffusion finite element method for the Stokes and Navier-Stokes equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 33 (1996), P. 107–127.

[149] Tornberg, A.-K., Engquist, B., A finite element based level-set method for multiphase flow applications, *Comput. Visual. Sci.*, **3** (2000), P. 93–101.

[150] Turek, S., *Efficient solvers for incompressible flow problems: An algorithmic approach in view of computational aspects,* LNCSE V.6., Springer, Berlin, Heildelberg, 1999.

[151] Vanka, S.P., Block-implicit multigrid solution of Navier-Stokes equations in primitive variables, *Journal of Computational Physics*, **65** (1986), P. 138–158.

[152] Verfürth, R., A combined conjugate gradient-multigrid algorithm for the numerical solution of the Stokes problem, *IMA J. Numer. Anal.*, **4** (1984), P. 441–455.

[153] Verürth, R., A multilevel algorithm for mixed problems,*SIAM J. Num. Anal.*, **21** (1984), P. 264–271.

[154] Schatz, A.H. and Wahlbin, L.B., On the finite element method for singularly perturbed reaction-diffusion problems in two and one dimensions,*Math. Comp.* **40** (1983), P. 47–89.

[155] Wahlbin, L.B., Local behavior in finite element methods. In: Handbook of Numerical Analysis, Vol.II Finite element methods (eds. P.G. Ciarlet, J.L. Lions), North-Holland, Amsterdam, 1991, P. 353–522

[156] Wang J., Convergence analysis of multigrid algorithms for nonselfadjoint and indefinite elliptic problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, **30** (1993), P. 275–285.

[157] Wathen, A., Realistic eigenvalues bounds for the Galerkin mass matrix, *IMA J. Numer. Anal.*, **7** (1987), P. 449–457.

[158] Wittum, G., On the robustness of ILU smoothing, *SIAM Journal on Scientific Computing,* **10** (1989), P. 699–717.

[159] Wittum, G., Multi-grid methods for Stokes and Navier-Stokes equations with transforming smoothers: algorithms and numerical results, *Numer. Math.*, **54** (1989), P. 543–563.

[160] Wittum, G., On the convergence of multi-grid methods with transforming smoothers, *Numer. Math.*, **57** (1990), P. 15–38.

[161] Xu, J., Iterative methods by space decomposition and subspace correction. *SIAM Review* **34** (1992), P. 581–613.

[162] Yserentant, H., Old and new convergence proofs for multigrid methods, Acta Numerica 1993, P. 285–326.

[163] Yserentant, H., Two preconditioners based on the multi-level splitting of finite element spaces, *Numer. Math.*, **58** (1990), P. 163–184.

[164] Zeeuw P.M. de, Matrix-dependent prolongations and restrictions in a blackbox multigrid solver, *J. Comput. Appl. Math.* **33** (1990), P. 1–27.

[165] Zhou, G., How accurate is the streamline diffusion finite element method, *Math. Comput.*, **66** (1997), P. 31–44.

[166] Zulehner, W., Analysis of iterative methods for saddle point problems: A unified approach, *Math. Comp.*, **71** (2001), P. 479–505.

Публикации автора по теме диссертации.

[167] Olshanskii M.A., Reusken A., Analisys of a Stokes interface problem, *Numerische Mathematik*, **103** (2006), P. 129–149.

[168] Ольшанский М.А., *Лекции и упражнения по многосеточным методам*, Физматлит, Москва, 2005.

[169] Gelhard T, Lube G., Olshanskii M.A., Starcke J.-H., Stabilized finite element schemes with LBB-stable elements for incompressible flows, *J. Comput. Appl. Math.*. **177** (2005), P. 243–267.

[170] Ольшанский М.А., Анализ многосеточного метода для уравнений конвекции-диффузии с краевыми условиями Дирихле, *ЖВМиМФ*, **44** (2004), С. 1462–1491.

[171] Olshanskii M.A., Reusken A., Convergence analysis of a multigrid solver for a finite element method applied to convection-dominated model problem, *SIAM J.Num.Anal.* **43** (2004), P. 1261–1291.

[172] Olshanskii M.A., Reusken A., A Stokes interface problem: stability, error estimate and a solver, in *Proc. of European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS 2004* (Eds. P. Neittaanmäki, etc.), 2004.

[173] Olshanskii M.A., Reusken A., Grad-Div stabilization for the Stokes equations, *Mathematics of Computation*, **73** (2004), P. 1699–1718.

[174] Olshanskii M.A., Preconditioned iterations for the linearized Navier–Stokes system in rotation form, in *Computational Fluid and Solid Mechanics 2003*, K.J. Bathe (Editor) , Elsevier, 2003, P. 1074–1077

[175] Olshanskii M.A., A low order Galerkin finite element method for the Navier-Stokes equations of steady incompressible flow: A stabilization issue and iterative methods, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.,* **191** (2002), P. 5515–5536

[176] Olshanskii M.A., Reusken A., Navier-Stokes equations in rotation form: a robust multigrid solver for the velocity problem, *SIAM J. Sci. Comp.,* **23** (2002), P. 1682–1706

[177] G.Lube, Olshanskii M.A., Stable finite element calculations of incompressible flows using the rotation form of convection, *IMA J. Num. Anal.,* **22** (2002), P. 437–461.

[178] Olshanskii M.A., Reusken A., On the convergence of a multigrid method for linear reaction-diffusion problems, *Computing*, **65** (2000), P. 193–202.

[179] Chizhonkov E.V., Olshanskii M.A., On the domain geometry dependence of the LBB condition. *Math. Modelling Numer. Anal.:* M^2AN, **34** (2000), P. 935–951.

[180] Ольшанский М.А., Чижонков Е.В., О наилучшей константе в inf-sup условии для вытянутых прямоугольных областей, *Математические заметки*, **67** (2000), С. 387–396.

[181] Kobelkov G.M., Olshanskii M.A., Effective Preconditioning of Uzawa Type Schemes for Generalized Stokes Problem, *Numerische Mathematik,* **86** (2000), P. 443–470.

[182] Olshanskii M.A., Staroverov V.M., On Simulation of the Outflow Boundary Conditions in FD Calculations for Incompressible Fluid, *Int. J. Numer. Meth. Fluids,* **33** (2000), P. 499–534.

[183] Olshanskii M.A., Iterative solver for Oseen problem and numerical solution of incompressible Navier-Stokes equations, *Num. Linear Algebra Appl.,* **6** (1999), P. 353–378.

[184] Olshanskii M.A., Two-Level Method and Some A Priori Estimates in Unsteady Navier-Stokes Calculations, *J. Comput. Appl. Math.*, **104** (1999), P. 173–191.

[185] Olshanskii M.A., A robust iterative solver in simulation of unsteady incompressible Navier-Stokes flow, *Proc. Fourth Europ. Comput. Fluid Dynamic Conf.,* V.1, (Eds. R.Papailiou, etc.), Willey, Chichester, etc., 1998, P. 1296–1301.

[186] Olshanskii M.A., On Preconditioning Techniques for Generalized Stokes Problem, *Proc. Conf. on Precond. Iter. Solution Meth. in Large Scale Probl. in Scientific Comp.,* eds. O.Axelsson, M.Neytcheva, B.Polman, Nijmegen, the Netherlands, 1997, P. 137–144

[187] Ольшанский М.А., О задаче Стокса с модельными краевыми условиями, *Математический сборник,* **188** (1997), С. 127–144.

[188] Ольшанский М.А., О задаче типа Стокса с параметром, *ЖВМиМФ,* **36** (1996), С. 75–86.