Математические заметки

том 67 выпуск 3 март 2000

УДК 517.984.5

О НАИЛУЧШЕЙ КОНСТАНТЕ В inf-sup-УСЛОВИИ ДЛЯ ВЫТЯНУТЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ОБЛАСТЕЙ

М. А. Ольшанский, Е. В. Чижонков

При анализе сходимости приближенных решений уравнений динамики жидкости к точным часто используется неравенство Ладыженской–Бабушки–Брецци (inf-sup-условие). Входящая в него константа зависит от формы области и определяет эффективность различных алгоритмов. В работе получена ее асимптотика и двусторонние оценки в прямоугольных областях. Для этого используется новый способ получения оценок собственных значений некоторой спектральной задачи с седловым оператором Стокса.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Рассмотрим первую краевую задачу для уравнений Стокса в переменных скорость–давление

$$\begin{aligned} -\Delta \boldsymbol{u} + \operatorname{grad} p = \boldsymbol{f} \quad &\text{в } \Omega, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \quad &\text{в } \Omega, \\ \boldsymbol{u} = 0 \quad &\text{на } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Уравнения (1) описывают движение вязкой несжимаемой однородной и изотропной жидкости при малых скоростях под воздействием внешних сил. Неизвестными здесь являются вектор-функция $\boldsymbol{u} = (u_1(x), \dots, u_s(x))$ (скорость жидкости) и скалярная функция $p = p(x)$ (давление). Нулевые граничные условия означают, как правило, что движение происходит в некотором неподвижном объеме с твердыми стенками, полностью заполненном жидкостью. Описанная модельная задача имеет самое разнообразное применение в вычислительной гидродинамике: начиная от построения дискретных аналогов и заканчивая сравнением эффективности численных алгоритмов.

При обосновании корректности постановки и приближенном решении (1) важную роль играет величина $\gamma = \gamma(\Omega)$, зависящая только от области $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ $(s = 2, 3)$ и определяемая равенством

$$\inf_{p \in P} \sup_{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}} \frac{|(p, \operatorname{div} \boldsymbol{u})|}{\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{U}} \|p\|_P} = \gamma. \tag{2}$$

Здесь и далее

$$P = \left\{ q \mid q \in L^2(\Omega),\ \int_\Omega q \, d\Omega = 0 \right\}, \qquad \boldsymbol{U} = \bigl(\mathring{W}_2^1(\Omega)\bigr)^s,$$

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{U}} = (\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{u})^{1/2}, \qquad \|p\|_P = (p, p)^{1/2}, \qquad (\phi, \psi) = \int_\Omega \phi \psi \, d\Omega.$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 96-01-01254 и № 96-01-01394.

Действительно, для ограниченных связных областей с кусочно-липшицевой границей, известно (см., например, [1], [2]), что $\gamma > 0$, и для обобщенного решения задачи (1) $(\boldsymbol{u}, p) \in \boldsymbol{U} \times P$ справедливы следующие априорные оценки:

$$\|p\|_P \leqslant 2\gamma^{-1}\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{U}^{-1}}, \quad \|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{U}} \leqslant \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{U}^{-1}}, \qquad \text{где } \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{U}^{-1}} = \sup_{\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{U}} \frac{|(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u})|}{\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{U}}}.$$

Кроме того, считающийся в настоящее время одним из наиболее эффективных для численного решения задачи Стокса метод Удзавы – сопряженных градиентов имеет асимптотический показатель скорости сходимости [3]

$$\kappa(\gamma) = \frac{1-\gamma}{1+\gamma}.$$

Зависимость подобного типа от γ установлена для скорости сходимости и других методов для (1), в которых основным элементом является многократное решение уравнения Пуассона (см., например, [4], [5]).

Отметим также, что константа γ тесно связана со своим дискретным аналогом γ_h (см., например, [2]). Последняя широко известна как константа из LBB или inf-sup-*условия* и имеет принципиальное значение при анализе схем метода конечных элементов для (1).

В связи с разнообразием задач вычислительной гидродинамики и широким распространением подходов к решению, основанных на разбиении исходной области на ряд более "простых" подобластей, представляется интересным анализ зависимости значений γ в (2) от геометрических характеристик области Ω.

Ранее предпринимались попытки определить величину γ (или тесно связанную с ней нижнюю границу конечнократного спектра Коссера [6]), но это всегда было связано с формой области Ω, допускающей применение метода разделения переменных (например, шаровой слой [7], кольцо [8]). В этом случае, решая аналитически некоторую вспомогательную спектральную задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, можно определить нижнюю границу собственных значений, откуда получается искомое значение γ.

В настоящей работе устанавливается справедливость следующего утверждения: пусть область Ω имеет прямоугольную форму

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_i < L_i,\ i = 1, 2\}$$

и $\ell = \max(L_1/L_2, L_2/L_1)$; тогда при $\ell \gg 1$ имеет место асимптотическое представление $\gamma = O(\ell^{-1})$. Следует отметить, что в данном случае описанный выше подход неприменим, и точное значение γ при фиксированном ℓ определить не удается, хотя содержательные оценки сверху и снизу также получены.

2. Дополнения по Шуру. Перепишем задачу (1) в следующем равносильном виде:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{u} = (\Delta)_0^{-1}(\operatorname{grad} p - \boldsymbol{f}),\\ A_0 p = \operatorname{div}(\Delta)_0^{-1} \operatorname{grad} p = \operatorname{div}(\Delta)_0^{-1}\boldsymbol{f},\end{gathered}$$

где выражение $(\Delta)_0^{-1}\boldsymbol{g}$ для $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{U}^{-1}$ обозначает вектор-функцию $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{U}$ такую, что $\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}$. Оператор $A_0\colon P \to P$, как правило, называют *дополнением по Шуру* для оператора задачи (1). Его замечательные свойства [6], [9], [10]: самосопряженность, положительная определенность, дискретность спектра, наличие полной ортонормированной в P счетной системы собственных функций – часто используются для анализа и обоснования методов решения задачи Стокса. Существует точка зрения [1], что методы, основанные на решении системы $A_0 p = \varphi$, являются в определенном смысле наилучшими. В частности, к таким методам относятся различные модификации алгоритма Удзавы (или метода окаймления) [3].

Для наших целей важной является связь минимального собственного значения оператора A_0 с постоянной γ из (2). Расмотрим следующую цепочку равенств, справедливых для произвольной функции $q \in W_2^1(\Omega) \cap P$:

$$\begin{aligned}(A_0 q, q) &= (\operatorname{div}(\Delta)_0^{-1} \operatorname{grad} q, q) = -((\Delta)_0^{-1} \operatorname{grad} q, \operatorname{grad} q)\\ &= -((\Delta)_0^{-1} \operatorname{grad} q, \Delta(\Delta)_0^{-1} \operatorname{grad} q) = (-\Delta \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})\big|_{\boldsymbol{v} = (\Delta)_0^{-1} \operatorname{grad} q}\\ &= \|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{U}}^2 = \sup_{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}} \frac{(-\Delta \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})^2}{\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{U}}^2} = \sup_{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}} \frac{(\operatorname{grad} q, \boldsymbol{u})^2}{\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{U}}^2} = \sup_{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}} \frac{(q, \operatorname{div} \boldsymbol{u})^2}{\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{U}}^2}.\end{aligned}$$

Множество функций из $W_2^1(\Omega)$ всюду плотно [11] в P, откуда следует корректность замыкания в равенствах

$$(A_0 q, q) = \|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{U}}^2 = \sup_{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}} \frac{(q, \operatorname{div} \boldsymbol{u})^2}{\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{U}}^2}. \tag{3}$$

Таким образом, равенства (3) справедливы для произвольной $q \in P$ и $\boldsymbol{v} = \Delta_0^{-1} \operatorname{grad} q \in \boldsymbol{U}$. В частности, из (2) и (3) следует, что

$$\lambda_{\min}(A_0) = \inf_{p \in P} \frac{(A_0 p, p)}{\|p\|_P^2} = \inf_{p \in P} \sup_{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}} \frac{(p, \operatorname{div} \boldsymbol{u})^2}{\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{U}}^2 \|p\|_P^2} = \gamma^2,$$

где $\lambda_{\min}$ – минимальное собственное значение оператора A_0.

Далее нам потребуются операторы A_p и A_m, родственные A_0. Здесь имеется в виду, что они являются дополнениями по Шуру для операторов задач типа (1), но с другими краевыми условиями. Начиная с этого момента будем считать, что область Ω – прямоугольник:

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_i < L_i,\ i = 1, 2\}. \tag{4}$$

Обозначим через A_p оператор $A_p \colon P \to P$ вида

$$A_p = \operatorname{div}(\Delta)_p^{-1} \operatorname{grad},$$

где выражение $(\Delta)_p^{-1} \boldsymbol{g}$ для $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{U}_p^{-1}$ обозначает вектор-функцию $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{U}_p$ такую, что

$$-(\nabla \boldsymbol{v}, \nabla \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{u}) \qquad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}_p, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{U}_p = \{\boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{u} \in (W_2^1(\Omega))^2,\ \boldsymbol{u} \cdot n = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$. Равенство (5) является определением обобщенного решения для векторного уравнения Пуассона с краевыми условиями следующего вида:

$$\boldsymbol{u} \cdot n = 0, \qquad \frac{\partial(\boldsymbol{u} \cdot \tau)}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega.$$

Здесь n и τ – нормальный и касательный векторы к $\partial\Omega$. Аналогичным образом можно сформулировать и задачу для уравнений Стокса с такими краевыми условиями. Отметим, что, с одной стороны, $A_p \equiv E$ [12] (E – тождественный оператор), а с другой – (как и в (3)) для произвольной $q \in P$ и $\boldsymbol{v} = \Delta_p^{-1} \operatorname{grad} q$ имеем

$$(A_p q, q) = \sup_{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}_p} \frac{(q, \operatorname{div} \boldsymbol{u})^2}{\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{U}}^2} = \|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{U}}^2. \tag{6}$$

Из равенств (6) следует, что верхняя грань в выражении

$$\sup_{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}_p} \frac{(q, \operatorname{div} \boldsymbol{u})^2}{\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{U}}^2}$$

достигается на функции $\boldsymbol{v} = \Delta_p^{-1} \operatorname{grad} q$. Этот факт будет использоваться нами в дальнейшем.

Придерживаясь той же схемы, обозначим через A_m оператор $A_m : P \to P$ вида

$$A_m = \operatorname{div}(\Delta)_m^{-1} \operatorname{grad},$$

где выражение $(\Delta)_m^{-1} \boldsymbol{g}$ для $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{U}_m^{-1}$ обозначает вектор-функцию $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{U}_m$ такую, что

$$-(\nabla \boldsymbol{v}, \nabla \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{u}) \qquad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}_m, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{U}_m = \{\boldsymbol{u} = (u_1, u_2) \mid \boldsymbol{u} \in (W_2^1(\Omega))^2,\ u_1 = 0,\ (0, u_2) \cdot n = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$. Равенство (7) соответствует определению обобщенного решения для векторного уравнения Пуассона с краевыми условиями смешанного типа

$$\begin{gathered} \boldsymbol{u} = 0 \qquad \text{при } x_2 = 0, L_2, \\ \boldsymbol{u} \cdot n = 0, \quad \frac{\partial(\boldsymbol{u} \cdot \tau)}{\partial n} = 0 \qquad \text{при } x_1 = 0, L_1. \end{gathered}$$

В данном случае также справедливо равенство для произвольной $q \in P$

$$(A_m q, q) = \sup_{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}_m} \frac{(q, \operatorname{div} \boldsymbol{u})^2}{\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{U}}^2}.$$

В заключение раздела отметим, что основной результат об асимптотике ($\gamma \approx \ell^{-1}$) следует из некоторого утверждения для минимальных собственных значений операторов A_i ($i = 0, p, m$). Приведем его, положив для определенности $\ell = L_1/L_2$.

Утверждение. *Существуют постоянные $\theta_i > 0$ ($i = 1, 2$), не зависящие от ℓ, такие, что при $\ell \geqslant 1$ справедливы неравенства*

$$\theta_1 \frac{1}{\ell^2} \lambda_{\min}(A_p) \leqslant \lambda_{\min}(A_0) \leqslant \lambda_{\min}(A_m) \leqslant \theta_2 \frac{1}{\ell^2}. \tag{8}$$

Доказательству соотношений (8) посвящены следующие два раздела, а пока напомним, что все $\lambda(A_p) = 1$ и $\gamma^2 = \lambda_{\min}(A_0)$.

3. Оценка сверху. Расмотрим в прямоугольной области Ω (4) следующую спектральную задачу $A_m p = \lambda p$: найти собственные значения λ и соответствующие собственные функции $p \in P$, удовлетворяющие системе уравнений

$$-\Delta \boldsymbol{u} + \operatorname{grad} p = 0, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = \lambda p, \tag{9}$$

и модельному набору краевых условий для $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2) \in \boldsymbol{U}_m$:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0 \qquad \text{при } x_2 = 0, L_2, \tag{10}$$

$$u_1 = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 \qquad \text{при } x_1 = 0, L_1. \tag{11}$$

Задача (9)–(11) имеет аналитическое решение, которое может быть найдено методом разделения переменных (методом Фурье) [13]. Имеет место

Лемма 1. *Оператор A_m в задаче (9)–(11) имеет собственное значение*

$$\lambda(A_m) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{\operatorname{sh} t}\right), \qquad \text{где } t = \pi \frac{L_2}{L_1}.$$

Доказательство. Рассмотрим спектральную задачу $A_m p = \lambda p$ в области $\Omega = (0, L_1) \times (-b, b)$ при $b = L_2/2$. Этот сдвиг исходного прямоугольника (4) не меняет собственных значений, но существенно облегчает проведение выкладок. Далее положим $r = \pi / L_1$ и непосредственной проверкой убедимся, что функции

$$u_1 = \frac{1}{2} \sin r x_1 \left[b \frac{\operatorname{sh} rb}{\operatorname{ch} rb} \operatorname{ch} r x_2 - x_2 \operatorname{sh} r x_2 \right],$$
$$u_2 = -\frac{1}{2} \cos r x_1 \left[b \frac{\operatorname{ch} rb}{\operatorname{sh} rb} \operatorname{sh} r x_2 - x_2 \operatorname{ch} r x_2 \right],$$
$$p = \cos r x_1 \operatorname{ch} r x_2$$

удовлетворяют соотношениям (9)–(11) вместе с указанным выше собственным значением. Лемма доказана.

Лемма 2. *Для любой области Ω прямоугольной формы имеет место неравенство*

$$\lambda_{\min}(A_0) \leqslant \lambda_{\min}(A_m).$$

Доказательство. Напомним функциональные определения нижних границ спектров операторов A_0 и A_m:

$$\lambda_{\min}(A_0) = \inf_{p \in P} \sup_{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}} \frac{(p, \operatorname{div} \boldsymbol{u})^2}{\|\boldsymbol{u}\|_U^2 \|p\|_P^2}, \qquad \lambda_{\min}(A_m) = \inf_{p \in P} \sup_{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}_m} \frac{(p, \operatorname{div} \boldsymbol{u})^2}{\|\boldsymbol{u}\|_U^2 \|p\|_P^2}.$$

Теперь справедливость утверждения леммы следует из того факта, что $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{U}_m$ (см. определения пространств в предыдущем разделе). Лемма доказана.

Сформулируем оценку сверху в неравенстве (8) в следующем виде. Имеет место

Теорема 1. *В рассматриваемой области* $\Omega = \{(x_1, x_2) |\, 0 < x_i < L_i,\ i = 1, 2\}$ *справедлива равномерная по* $\ell = L_1/L_2 \geqslant 1$ *оценка*

$$\lambda_{\min}(A_0) \leqslant \theta_2 \frac{1}{\ell^2}$$

с постоянной $\theta_2 = \pi^2/12$.

Доказательство. Из лемм 1 и 2 непосредственно следует цепочка неравенств

$$\lambda_{\min}(A_0) \leqslant \lambda_{\min}(A_m) \leqslant \lambda(A_m) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{\operatorname{sh} t}\right),$$

где $t = \pi L_2/L_1 = \pi/\ell$. Далее для формулы в правой части после элементарных преобразований получаем

$$\left(1 - \frac{t}{\operatorname{sh} t}\right) = \frac{t^2}{2 \cdot 3!} \, \frac{1 + \dfrac{t^2 3!}{5!} + \dfrac{t^4 3!}{7!} + \cdots}{1 + \dfrac{t^2}{3!} + \dfrac{t^4}{5!} + \cdots} \leqslant \frac{\pi^2}{12} \frac{1}{\ell^2}.$$

Теорема доказана.

4. Оценка снизу. Чтобы не загромождать изложение, в настоящем разделе рассуждения проводятся для прямоугольной области Ω вида $(0, \pi\ell) \times (0, \pi)$. Имеет место

Теорема 2. *В рассматриваемой области* Ω *справедлива равномерная по* $\ell \geqslant 1$ *оценка*

$$\theta_1 \frac{1}{\ell^2} \leqslant \lambda_{\min}(A_0)$$

с постоянной $\theta_1 = 1/60$.

Доказательство. Заметим, что искомая оценка непосредственно следует из справедливости следующего неравенства для произвольной функции $p \in P$:

$$\theta_1 \frac{1}{\ell^2} \sup_{\boldsymbol{U}_p} \frac{(p, \operatorname{div} \boldsymbol{u})^2}{\|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{U}}} \leqslant \sup_{\boldsymbol{U}} \frac{(p, \operatorname{div} \boldsymbol{u})^2}{\|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{U}}}. \tag{12}$$

Действительно, переходя к точной нижней грани по всем $p \in P$, будем иметь в правой части (12) $\lambda_{\min}(A_0)$, а в левой – указанную выше оценку в силу того, что $\lambda_{\min}(A_p) = 1$ $(A_p \equiv E)$.

Поэтому представляется удобным доказать соотношение (12). Рассмотрим для этого полную систему ортонормированных функций из P:

$$\boldsymbol{\Xi} = \left\{\psi_m : \psi_m = d_m \cos\frac{m_1 x_1}{\ell} \cos m_2 x_2\right\}, \qquad d_m = \frac{\sqrt{(1 + \operatorname{sign} m_1)(1 + \operatorname{sign} m_2)}}{\pi\sqrt{\ell}},$$

где $m = (m_1, m_2)$ – мультииндекс, m_i $(i = 1, 2)$ могут принимать значения $0, 1, 2, \ldots$, при этом $\max\{m_1, m_2\} > 0$.

Докажем сначала (12) для произвольных тригонометрических многочленов из P степени M с константой θ, не зависящей от M. Для этого рассмотрим функцию p следующего вида:

$$p = \sum_{m=0}^{M} p_m \psi_m, \qquad p_0 = 0, \quad \psi_m \in \boldsymbol{\Xi}.$$

Напомним (см. п. 1), что верхняя грань в выражении

$$\sup_{\boldsymbol{u}\in \boldsymbol{U}_p} \frac{(p, \operatorname{div} \boldsymbol{u})^2}{\|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{U}}}$$

достигается на функции $\widehat{\boldsymbol{u}} = \Delta_p^{-1}\nabla p$. Заметим также, что $\operatorname{div}\widehat{\boldsymbol{u}} = p$ в силу эквивалентности A_p тождественному оператору. В данном случае вектор-функцию $\widehat{\boldsymbol{u}} = (\widehat{u}_1, \widehat{u}_2)$, соответствующую выбранной p, можно записать в виде

$$\widehat{u}_k = \sum_{m=0}^{M} b^k_m p_m \phi^k_m, \qquad k = 1, 2,$$

где

$$b^1_m = \frac{m_1}{\ell(m_1^2\ell^{-2} + m_2^2)}, \qquad b^2_m = \frac{m_2}{(m_1^2\ell^{-2} + m_2^2)},$$
$$\phi^1_m = d_m \sin\frac{m_1 x_1}{\ell}\cos m_2 x_2, \qquad \phi^2_m = d_m \cos\frac{m_1 x_1}{\ell}\sin m_2 x_2.$$

Поэтому для доказательства неравенства (12) достаточно построить такую $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{U}$, что следующие неравенства будут справедливы с некоторыми положительными постоянными $c_1, c_2 < \infty$, не зависящими от $M, \ell, \widehat{\boldsymbol{u}}$:

$$(p, \operatorname{div}\widehat{\boldsymbol{u}})^2 \leqslant c_1 (p, \operatorname{div}\boldsymbol{u})^2, \qquad \|\boldsymbol{u}\|^2_{\boldsymbol{U}} \leqslant c_2\ell^2\|\widehat{\boldsymbol{u}}\|^2_{\boldsymbol{U}}. \tag{13}$$

Для этого, рассмотрим следующие наборы индексов:

$$M_1 = \{m : m_1 \geqslant m_2\}, \qquad M_2 = \{m : m_1 < m_2\}.$$

Заметим, что $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ и для любого индекса m существует $i \in \{1, 2\}$ такое, что $m \in M_i$. Представим функцию p в виде суммы двух ортогональных частей

$$p^{(i)} = \sum_{m\in M_i} p_m \psi_m, \qquad i = 1, 2.$$

Здесь и далее мы подразумеваем $p_m = 0$ при $\max(m_1, m_2) > M$.

Так как $\operatorname{div}\widehat{\boldsymbol{u}} = p = p^{(1)} + p^{(2)}$, существует $i \in \{1, 2\}$ такое, что

$$|(p^{(i)}, p)| \geqslant \frac{1}{2}|(p, p)| = \frac{1}{2}|(\operatorname{div}\widehat{\boldsymbol{u}}, p)|. \tag{14}$$

Пусть неравенство (14) справедливо для $i = 1$. Тогда определим вектор-функцию $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2) \in \boldsymbol{U}$ следующим образом:

$$u_1 = \sum_{m\in M_1} \frac{\ell}{m_1} p_m \phi^1_m - \sum_m \frac{\ell}{m_1}\rho^{(1)}_m \phi^1_m, \qquad u_2 \equiv 0,$$
$$\text{иначе} \qquad u_2 = \sum_{m\in M_2} \frac{1}{m_2} p_m \phi^2_m - \sum_m \frac{1}{m_2}\rho^{(2)}_m \phi^2_m, \qquad u_1 \equiv 0,$$

где коэффициенты $\rho^{(1)}_m$ и $\rho^{(2)}_m$ будут определены ниже.

Для произвольного m_i обозначим через $C(m_i)$ наименьшее четное целое число большее m_i, $i = 1, 2$. Если неравенство (14) справедливо для $i = 1$, то произвольному индексу $m = (m_1, m_2)$ поставим в соответствие индекс $\overline{m} = (\overline{m}_1, \overline{m}_2)$, где $\overline{m}_1 = m_1$, $\overline{m}_2 = m_2 \pmod{C(m_1)}$, а коэффициенты $\rho_m^{(1)}$ определим по формулам

$$\rho_m^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{1}{3} p_{\overline{m}}, & \text{если } \overline{m} \in M_1,\ m_2 < 3C(m_1), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Если же неравенство (14) справедливо для $i=2$, то произвольному индексу $m=(m_1, m_2)$ поставим в соответствие индекс $\widetilde{m} = (\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2)$, где $\widetilde{m}_2 = m_2$, $\widetilde{m}_1 = m_1 \pmod{C(m_2)}$, а коэффициенты $\rho_m^{(2)}$ определим по формулам

$$\rho_m^{(2)} = \begin{cases} \dfrac{1}{3} p_{\widetilde{m}}, & \text{если } \widetilde{m} \in M_2,\ m_1 < 3C(m_2), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Из приведенных выше построений следует, что $\boldsymbol{u}$ – тригонометрический многочлен степени не больше $3(M+2)$ и $\boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} = 0$.

Оценим $\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{U}}$ и $|(p, \operatorname{div} \boldsymbol{u})|$, при этом будем пользоваться тем, что системы функций $\{\phi_m^1\}$ и $\{\phi_m^2\}$ ортонормированы относительно скалярного произведения в L_2, а нормы функций $\boldsymbol{u}$, $\widehat{\boldsymbol{u}}$ и p выражаются явно через соответствующие коэффициенты Фурье. Обозначим $\rho^{(i)} = \sum_m \rho_m^{(i)} \phi_m^1$ для $i = 1, 2$ и рассмотрим отдельно оба случая. В первом случае – $\overline{m} \in M_1$ и $5m_1 \geqslant m_2$ – имеем

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right\|_P^2 &= \|p^{(1)}\|_P^2 - 2(p^{(1)}, \rho^{(1)}) + \|\rho^{(1)}\|_P^2 = \frac{1}{3}\|p^{(1)}\|_P^2 + \|\rho^{(1)}\|_P^2 \\ &\leqslant \frac{2}{3}\|p^{(1)}\|_P^2 \leqslant \frac{2}{3}\|p\|_P^2 = \frac{2}{3}\|\operatorname{div} \widehat{\boldsymbol{u}}\|_P^2 \leqslant \frac{2}{3}\|\widehat{\boldsymbol{u}}\|_{\boldsymbol{U}}^2. \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь мы воспользовались соотношениями

$$\begin{aligned} (p^{(1)}, \rho^{(1)}) &= \sum_{m \in M_1} p_m \rho_m^{(1)} = \frac{1}{3} \sum_{m \in M_1} p_m^2 = \frac{1}{3}\|p^{(1)}\|_P^2, \\ \|\rho^{(1)}\|_P^2 &= \sum_m [\rho_m^{(1)}]^2 = 3 \sum_{m \in M_1} \frac{1}{9} p_m^2 = \frac{1}{3}\|p^{(1)}\|_P^2. \end{aligned}$$

Далее

$$\left\| \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right\|_P^2 \leqslant \ell^2 \left[\|p^{(1)}\|_P^2 - 2(p^{(1)}, \rho^{(1)}) + \frac{35}{9}\|p^{(1)}\|_P^2 \right] = \frac{38}{9}\ell^2\|p^{(1)}\|_P^2 \leqslant \frac{38}{9}\ell^2\|\widehat{\boldsymbol{u}}\|_{\boldsymbol{U}}^2. \tag{16}$$

Выше мы воспользовались оценкой

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sum_m \frac{\ell}{m_1} \rho_m^{(1)} \phi_m^1 \right) \right\|_P^2 &= \ell^2 \sum_m \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2 [\rho_m^{(1)}]^2 \\ &\leqslant \ell^2 \frac{1}{9} \sum_{m \in M_1} (1 + 3^2 + 5^2) p_m^2 = \frac{35}{9}\|p^{(1)}\|_P^2. \end{aligned}$$

Вспоминая, что $|(p, p^{(1)})| \geqslant \frac{1}{2}|(p, \operatorname{div}\widehat{\boldsymbol{u}})|$, также получаем

$$\begin{aligned}|(p, \operatorname{div}\boldsymbol{u})| &= \left|\left(p, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)\right| = |(p, p^{(1)} - \rho^{(1)})| \geqslant |(p, p^{(1)})| - |(p, \rho^{(1)})| \\ &\geqslant \left(1 - \frac{2}{\sqrt{6}}\right)|(p, p^{(1)})| \geqslant \frac{\sqrt{6}-2}{2\sqrt{6}}|(p, \operatorname{div}\widehat{\boldsymbol{u}})|. \qquad (17)\end{aligned}$$

Выше мы воспользовались оценкой при $\varepsilon = \sqrt{3/2}$

$$\begin{aligned}|(p, \rho^{(1)})| &= \frac{1}{3}\sum_{m=0}^{M} p_m p_{\overline{m}} \leqslant \frac{\varepsilon}{6}\sum_{m=0}^{M} p_m^2 + \frac{1}{6\varepsilon}\sum_{m=0}^{M} p_{\overline{m}}^2 \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3}\sum_{m\in M_1} p_m^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{m\in M_1} p_m^2 = \frac{2}{\sqrt{6}}|(p, p^{(1)})|.\end{aligned}$$

Во втором случае – $\widetilde{m} \in M_2$ и $4m_2 \geqslant m_1$ – аналогичным образом получаем

$$\begin{gathered}\left\|\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right\|_P^2 \leqslant \frac{38}{9}\frac{1}{\ell}\|\widehat{\boldsymbol{u}}\|_{\boldsymbol{U}}^2, \qquad \left\|\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right\|_P^2 \leqslant \|p^{(2)}\|_P^2 + \|\rho^{(2)}\|_P^2 \leqslant \frac{2}{3}\|\widehat{\boldsymbol{u}}\|_{\boldsymbol{U}}^2, \\ |(p, \operatorname{div}\boldsymbol{u})| \geqslant \frac{\sqrt{6}-2}{2\sqrt{6}}|(p, \operatorname{div}\widehat{\boldsymbol{u}})|.\end{gathered} \qquad (18)$$

Из неравенств (15)–(18) непосредственно следует, что оценки (13) справедливы с константами $c_1 = 12$, $c_2 = 5$ при условии $\ell \geqslant 1$. Так как c_1 и c_2 не зависят от степени многочлена M, неравенство (12) справедливо для всех конечных тригонометрических многочленов с константой $\theta = (c_1 c_2)^{-1}$. А так как множество таких многочленов всюду плотно в P, переходя к замыканию в (12) мы доказываем теорему.

5. Основной результат. Оценки, полученные в предыдущих разделах, позволяют установить справедливость следующего утверждения. Имеет место

Теорема 3. *Для областей Ω прямоугольной формы, $\Omega = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_i < L_i, i = 1, 2\}$, обозначим $\ell = \max(L_1/L_2, L_2/L_1)$. Тогда для константы γ из*

$$\gamma = \inf_{p\in P}\sup_{\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{U}} \frac{|(p, \operatorname{div}\boldsymbol{u})|}{\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{U}}\|p\|_P}$$

имеет место асимптотика $\gamma = O(\ell^{-1})$, $\ell \to \infty$.

Доказательство. При $\ell = L_1/L_2 \geqslant 1$ из теорем 1 и 2 следуют равномерные по ℓ оценки

$$\theta_1\frac{1}{\ell^2} \leqslant \lambda_{\min}(A_0) \leqslant \theta_2\frac{1}{\ell^2},$$

откуда в силу равенства $\lambda_{\min}(A_0) = \gamma^2$ имеем искомую асимптотику.

Далее заметим, что для фиксированного прямоугольника одновременное сжатие (или растяжение) сторон с коэффициентом $\alpha \neq 0$ не меняет собственных значений оператора A_0. Это следует из замены независимых переменых в равенстве (3)

$$(A_0 q, q) = \sup_{\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{U}} \frac{(q, \operatorname{div}\boldsymbol{u})^2}{\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{U}}^2}$$

с последующим сокращением числителя и знаменателя на α^2. Кроме того, поворот прямоугольника на произвольный угол φ в плоскости $\mathbb{R}^2$ также приводит к аналогичному результату [11]. Отсюда немедленно следует, что для областей $(0,\ell)\times(0,1)$ и $(0,1)\times(0,\ell^{-1})$ при любом ℓ множества собственных значений операторов A_0 совпадают. Таким образом, указанная асимптотика справедлива и в случае $\ell = L_2/L_1 \geqslant 1$. Теорема доказана.

В заключение следует отметить, что вытянутые прямоугольники являются типичными вычислительными областями в математическом моделировании различных эффектов, связанных с движением жидкости (плазмы). Поэтому важным практическим приложением полученного результата является получение количественной информации о том, насколько трудоемко будет нахождение численного решения даже линейных уравнений в длинных каналах.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Дьяконов Е. Г. Минимизация вычислительной работы. Асимптотически оптимальные алгоритмы для эллиптических задач. М.: Наука, 1989.
[2] Girault V., Raviart P. A. Finite element methods for Navier-Stokes equations. Berlin: Springer, 1986.
[3] Langer U., Queck W. On the convergence factor of Uzawa's algorithm // J. Comp. Appl. Math. 1986. V. 15. P. 191–202.
[4] Чижонков Е. В. К сходимости метода искусственной сжимаемости. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1996. № 2. С. 13–20.
[5] Chizhonkov E. V. Application of the Cossera spectrum to the optimization of a method for solving the Stokes Problem // Russ. Journal of Numer. Analysis and Math. Modelling. 1994. V. 9. № 3. P. 191–199.
[6] Михлин С. Г. Спектр пучка операторов теории упругости. // УМН. 1973. Т. 28. № 3. С. 43–82.
[7] Cosserat E. et F. Sur la déformation infiniment petite d'une enveloppe sphérique élastique. // C. R. Acad. Sci. Paris. 1901. V. 133. P. 326–329.
[8] Chizhonkov E. V. On the Constant in the LBB condition for ring domains. Report No. 9537 (October 1995). The Netherlands: Dept. of Math. Univ. of Nijmegen, 1995.
[9] Crouzeix M. Etude d'une methode de linearisation. Resolution des equations de Stokes stationaries. Application aux equations des Navier–Stokes stationares // Cahiere de l'IRIA. 1974. № 12. P. 139–244.
[10] Михлин С. Г. Дальнейшее исследование спектра Коссера. // Вестн. ЛГУ. Сер. Матем. 1967. Т. 7. № 2. С. 96–102.
[11] Кобельков Г. М. Об эквивалентных нормировках подпространств L_2 // Anal. Math. 1977. № 3. С. 177–186.
[12] Ольшанский М. А. Задача Стокса с модельными краевыми условиями // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 4. С. 127–144.
[13] Aristov P. P., Chizhonkov E. V. On the Constant in the LBB condition for rectangular domains. Report No. 9534 (September 1995). The Netherlands: Dept. of Math. Univ. of Nijmegen, 1995.