УДК 519.63

М. А. Ольшанский

О задаче Стокса с модельными краевыми условиями

Для широкого класса двух- и трехмерных областей в работе приводится постановка краевых условий на векторное поле скоростей для задачи Стокса, обеспечивающая тождественное равенство дополнения по Шуру единичному оператору. Данные краевые условия позволяют "разделить" уравнения Стокса на задачу для давления и, отдельно, задачу для поля скоростей. В работе исследуется разрешимость задачи и регулярность решений. Рассматривается связь полученных результатов с некоторыми аспектами численных методов гидродинамики: условием LBB, численным решением обобщенной задачи Стокса.

Библиография: 23 названия.

Введение

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, рассмотрим систему уравнений в частных производных относительно вектор-функции $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ и функции p

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= g. \end{aligned} \tag{1}$$

Система уравнений (1) называется системой Стокса, а численное решение (1) является одной из основных проблем вычислительной гидродинамики. Для замыкания уравнений (1) необходимы некоторые краевые условия. В большинстве теоретических и прикладных исследований рассматриваются условия Дирихле на функцию скорости $\mathbf{u}$, которые мы будем считать однородными:

$$\mathbf{u}\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Подробное исследование вопросов разрешимости системы (1), (2) и регулярности решений можно найти, например, в [1].

Дополнением Шура (*оператором Шура*) системы (1), (2) называется оператор

$$\mathbf{A}_0 \equiv \operatorname{div} \Delta_0^{-1} \nabla,$$

который при достаточно общих предположениях на Ω является ограниченным, линейным, самосопряженным, положительно определенным оператором на $L_2(\Omega)/\mathbb{R}$. Здесь запись $\Delta_0^{-1}\mathbf{f}$ обозначает функцию $\mathbf{u}$ такую, что $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{f}$, $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01254).

© М. А. Ольшанский 1997

Функция давления p из (1), определенная с точностью до константы, удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{A}_0 p = g + \operatorname{div} \Delta_0^{-1} \mathbf{f}. \tag{3}$$

Замечательным является то, что уравнение (3) *не требует* каких-либо дополнительных граничных условий или предположений о гладкости для функции давления, в отличие от уравнения Пуассона для p, которое получается в результате формального применения оператора div к первому соотношению системы (1) (см., например, [2], [3]). Уравнение (3) может служить исходным при построении численных методов для решения системы (1), (2), а знание спектральных и других свойств оператора $\mathbf{A}_0$ и (или) его дискретного аналога является ключевым при анализе различных разностных схем для задачи Стокса и некоторых итерационных методов численного решения [4]–[6].

Благодаря свойствам спектра Коссера оператора теории упругости [7] и лемме 1 из [5] мы знаем, что спектр оператора $\mathbf{A}_0$ принадлежит отрезку $[c, 1], 0 < c \leqslant \frac{1}{2}$, причем единица есть изолированное собственное значение бесконечной кратности. Близость оператора $\mathbf{A}_0$ к единичному в конечно-разностном случае была исследована в [8]. Следующий факт говорит в пользу того, что "неединичность" оператора $\mathbf{A}_0$ носит в некотором смысле граничный характер. Рассмотрим прямоугольную область $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2)$ и краевые условия третьего рода для $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} \cdot \nu\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial \mathbf{u} \cdot \tau}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4}$$

где ν, τ – нормальный и касательный векторы к $\partial\Omega$. Дополнение Шура для системы (1), (4) совпадает с единичным оператором на $L_2(\Omega)/\mathbb{R}$. Действительно, для произвольного конечного тригонометрического полинома из $L_2(\Omega)/\mathbb{R}$ вида

$$\sum_{\substack{k,j=0 \\ k+j>0}}^{M} a_{k,j} \cos k\pi l_1^{-1} x \, \cos j\pi l_2^{-1} y$$

это утверждение проверяется непосредственно. Теперь, в силу полноты системы тригонометрических полиномов в $L_2(\Omega)/\mathbb{R}$, линейности и ограниченности дополнения Шура для (1), (4) его единичность устанавливается на всем пространстве $L_2(\Omega)/\mathbb{R}$.

В конечно-разностном случае при надлежащем выборе разностной схемы равенство дополнения Шура тождественному оператору для системы (1) с краевыми условиями (4) в прямоугольной области хорошо известно (см. [8]). Благодаря этому и возможности явного представления решений задачи в виде рядов Фурье краевые условия (4) находят существенное применение при анализе разностных схем и построении эффективных итерационных методов для задач с краевыми условиями Дирихле [8]–[14].

Достаточно долго оставался открытым вопрос: допускают ли краевые условия (4) обобщение на более широкий класс областей, сохраняя равенство дополнения Шура единичному оператору? В данной работе получен положительный ответ на этот вопрос для произвольных ограниченных, односвязных, липшицевых областей. Этими краевыми условиями будут

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}\cdot\nu\big|_{\partial\Omega}=0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{u}\big|_{\partial\Omega}=0, \qquad n=2;\\ &\mathbf{u}\cdot\nu\big|_{\partial\Omega}=0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{u}\times\nu\big|_{\partial\Omega}=0, \quad n=3; \end{aligned}$$

здесь и далее $\operatorname{rot}\mathbf{u}=\partial u_2/\partial x_1-\partial u_1/\partial x_2$ для $n=2$, $a\cdot b$, $a\times b$ – соответственно, скалярное и векторное произведения векторов a и b.

Более подробное обсуждение рассматриваемых краевых условий проводится в § 2. Пока отметим, что равенство нулю нормальной компоненты скорости является существенным краевым условием и сохраняется при определении функционального пространства, к которому принадлежит обобщенное решение. Условия на ротор скорости, напротив, являются естественными для рассматриваемой в § 2 обобщенной постановки задачи. Однако, при дополнительных предположениях о регулярности данных обобщенное решение обладает повышенной гладкостью, и условия на $\operatorname{rot}\mathbf{u}$ выполняются в обычном смысле.

В работе используются достаточно слабые предположения о гладкости границы области, "платой" за отказ от дополнительных условий на $\partial\Omega$ является необходимость поиска обобщенного решения $\mathbf{u}$ в более широком пространстве чем $W_2^1(\Omega)^n$, а именно, в пространстве вектор-функций из $L_2(\Omega)^n$, дивергенция и ротор которых также принадлежат $L_2(\Omega)^r$, $r=r(n)$. Такие функции принадлежат $W_2^1(\Omega)^n$ лишь локально. Однако большие требования к гладкости границы области позволяют нам рассматривать обобщенную постановку задачи в пространстве вектор-функций из $W_2^1(\Omega)^n$ с нулевой нормальной составляющей на $\partial\Omega$ и гарантируют принадлежность обобщенного решения этому пространству. В данной работе этими требованиями будут следующие: либо $\partial\Omega\in C^2$, либо Ω – выпуклый многоугольник ($n=2$) или выпуклый многогранник ($n=3$).

В § 1 даны необходимые определения и вспомогательные утверждения. В § 2 вводятся модельные краевые условия, доказывается разрешимость в обобщенном смысле соответствующей системы с векторным оператором Лапласа и системы Стокса, доказывается основная теорема о дополнении Шура. В § 3 доказываются некоторые результаты о регулярности решения задачи Стокса с модельными краевыми условиями. В § 4 приводятся некоторые следствия теоремы о дополнении Шура. В § 5 проводятся обобщения для задачи Стокса с параметром.

§ 1. Основные определения и вспомогательные утверждения

Рассмотрим ограниченную, односвязную, липшицеву область $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n=2,3$. В некоторых случаях мы будем предполагать для Ω выполнение условия

I) *Либо граница области $\partial\Omega$ из класса C^2, либо область является выпуклым многоугольником ($n=2$) или многогранником ($n=3$).*

Почти всюду на $\partial\Omega$ можем определить единичный вектор внешней нормали, который мы обозначим через $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_n)$. В случае $n=2$ через $\tau=(-\nu_2,\nu_1)$ будем обозначать касательный вектор к $\partial\Omega$. В случае $n=3$ в тех точках $P\in\partial\Omega$, где определен ν, рассмотрим касательную гиперплоскость с линейно независимой системой $\{\tau_i(P)\}$, $i = 1, 2$, касательных векторов к $\partial\Omega$. Через τ_i, $i = 1, 2$, будем обозначать векторное поле на $\partial\Omega$ такое, что $\tau_i = \tau_i(P)$ для тех $P \in \partial\Omega$, где определен ν.

Нам понадобятся следующие функциональные пространства:

$$L_2/\mathbb{R} \equiv \left\{ q \in L_2(\Omega) : \int_\Omega q \, d\Omega = 0 \right\},$$

$$\mathbf{H}_0 \equiv W^1_{2,0}(\Omega)^n,$$

$$\mathbf{H}_\nu \equiv \{ \mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in W^1_2(\Omega)^n : \mathbf{u} \cdot \nu = 0 \text{ на } \partial\Omega \},$$

$$\mathbf{R}_\nu \equiv \{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}_\nu : \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0 \},$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_1 = (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_{L_2}, \quad \|\mathbf{u}\|_1 = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_1^{1/2}, \qquad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0 \cup \mathbf{H}_\nu \cup \mathbf{R}_\nu,$$

а также пространство

$$\mathbf{H}(\operatorname{div}) \equiv \{ \mathbf{u} \in L_2(\Omega)^n, \ \operatorname{div} \mathbf{u} \in L_2(\Omega) \}$$

с нормой

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\operatorname{div})} = \left(\|\mathbf{u}\|_0^2 + \| \operatorname{div} \mathbf{u}\|_0^2 \right)^{1/2},$$

здесь и далее $\| \cdot \|_0$ – L_2-норма, пространство

$$\mathbf{H}(\operatorname{rot}) \equiv \{ \mathbf{u} \in L_2(\Omega)^n, \ \operatorname{rot} \mathbf{u} \in L_2(\Omega)^r \},$$

где $r = 1$ для $n = 2$ и $r = 3$ для $n = 3$, с нормой

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\operatorname{rot})} = \left(\|\mathbf{u}\|_0^2 + \| \operatorname{rot} \mathbf{u}\|_0^2 \right)^{1/2},$$

и $\mathbf{H}_0(\operatorname{div}) \equiv \overline{(C_0^\infty(\Omega)^n)}^{\mathbf{H}(\operatorname{div})}$ – замыкание относительно нормы $\mathbf{H}(\operatorname{div})$ множества $C_0^\infty(\Omega)^n$ финитных вектор-функций с носителем в Ω.

Через $\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ обозначим пространство следов функций из $W^1_2(\Omega)^n$ на $\partial\Omega$ с нормой

$$\|\mu\|_{1/2} = \inf_{\substack{\mathbf{v} \in W^1_2(\Omega)^n \\ \mathbf{v} = \mu \text{ на } \partial\Omega}} \|\mathbf{v}\|_{W^1_2}, \qquad \mu \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega),$$

а через $\mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$ сопряженное пространство к $\mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$.

Нам понадобятся следующие утверждения относительно определенных выше пространств.

Лемма 1 [15]. *Отображения* $\gamma_\nu \colon \mathbf{u} \to \mathbf{u} \cdot \nu\big|_{\partial\Omega}$ *и* $\gamma_\tau \colon \mathbf{u} \to \mathbf{u} \cdot \tau\big|_{\partial\Omega}$, $n = 2$, $\gamma_\tau \colon \mathbf{u} \to \mathbf{u} \times \nu\big|_{\partial\Omega}$, $n = 3$, *определенные на* $C^\infty(\overline{\Omega})^n$, *могут быть продолжены по непрерывности до непрерывных линейных отображений* γ_ν *из* $\mathbf{H}(\operatorname{div})$ *в* $\mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$ *и* γ_τ *из* $\mathbf{H}(\operatorname{rot})$ *в* $\mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega)^r$, $r = 1$ *для* $n = 2$, $r = 3$ *для* $n = 3$, *причем*

$$\mathbf{H}_0(\operatorname{div}) = \operatorname{Ker}(\gamma_\nu) = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}) : \mathbf{u} \cdot \nu\big|_{\partial\Omega} = 0 \}.$$

Определим, далее, пространства

$$\mathbf{U} \equiv \mathbf{H}_0(\operatorname{div}) \cap \mathbf{H}(\operatorname{rot}) \quad \text{и} \quad \mathbf{V} \equiv \{ \mathbf{u} \in \mathbf{U} : \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0 \}$$

со скалярным произведением

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{U}} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L_2} + (\operatorname{div} \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{v})_{L_2} + (\operatorname{rot} \mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{v})_{L_2}, \qquad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{U},$$

и соответствующей нормой $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{U}} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{U}}^{1/2}$. Справедлива

Лемма 2. *Пространство* $\mathbf{U}$ *является гильбертовым и*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{U}} \cong \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_0 + \|\operatorname{rot} \mathbf{u}\|_0, \qquad \mathbf{u} \in \mathbf{U}. \tag{5}$$

Доказательство. Пространство $\mathbf{U}$ гильбертово, так как пространства $\mathbf{H}_0(\operatorname{div})$ и $\mathbf{H}(\operatorname{rot})$ гильбертовы [15]. Эквивалентность (5) двух нормировок следует из оценки $\|\mathbf{u}\|_0 \leqslant c(\Omega)(\|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_0 + \|\operatorname{rot} \mathbf{u}\|_0)$ для $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ [15, лемма 3.6].

Здесь и далее $c(\Omega)$ или c, c_0, c_1 – константы, зависящие только от области Ω.

Лемма 3. *Отображение* $\operatorname{div}\colon \mathbf{V} \to L_2/\mathbb{R}$ *является изоморфизмом.*

Доказательство. Так как $\mathbf{V}$ является подпространством $\mathbf{U}$, то $\operatorname{Ker}(\operatorname{div}) = \{0\}$ в силу (5). Пусть φ – произвольная функция из $L_2/\mathbb{R}$, рассмотрим задачу Неймана

$$\begin{aligned} &\Delta\psi = \varphi \quad \text{в} \quad \Omega, \\ &\frac{\partial\psi}{\partial\nu} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \end{aligned}$$

Решение данной задачи из $W_2^1(\Omega)/\mathbb{R}$ существует, единственно и $\|\psi\|_{W_2^1} \leqslant c\|\varphi\|_0$. Пусть $\mathbf{u} = \nabla\psi$, тогда $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$, $\operatorname{div} \mathbf{u} = \varphi$ и $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{U}} \leqslant c_1\|\varphi\|_0$. Лемма доказана.

Через $\mathbf{U}^{-1}$ обозначим пространство ограниченных линейных функционалов на $\mathbf{U}$ с нормой

$$\|\mathbf{f}\|_{-1} \equiv \sup_{0 \neq \mathbf{v} \in \mathbf{U}} \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{U}}}, \qquad \mathbf{f} \in \mathbf{U}^{-1},$$

где $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle : \mathbf{U}^{-1} \times \mathbf{U} \to \mathbb{R}$, причем $\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{L_2}$ для $\mathbf{f} \in L_2$, $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$.

Для $p \in L_2/\mathbb{R}$ мы можем рассмотреть ∇p как элемент $\mathbf{U}^{-1}$. Действительно, полагая по определению $\langle \nabla p, \mathbf{u} \rangle = -(p, \operatorname{div} \mathbf{u})$ для произвольных $p \in L_2/\mathbb{R}$, $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$, имеем $\langle \nabla p, \mathbf{u} \rangle \leqslant \|p\|_0\|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_0 \leqslant \|p\|_0\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{U}}$, следовательно $\|\nabla p\|_{-1} \leqslant \|p\|_0$.

В сделанных предположениях на Ω мы можем утверждать, что $\mathbf{U} \subset W_{2,\mathrm{loc}}^1(\Omega)^n$ (см. [15]), т.е. произвольная функция $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ принадлежит W_2^1 в любой строго внутренней подобласти Ω. Предположим теперь, что граница области обладает *большей* регулярностью, а именно выполнено условие I), тогда (см. [15]) пространство $\mathbf{U}$ непрерывно вкладывается в $W_2^1(\Omega)^n$, причем

$$\|\mathbf{u}\|_{W_2^1} \cong \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_0 + \|\operatorname{rot} \mathbf{u}\|_0, \qquad \mathbf{u} \in \mathbf{U}.$$

Как следствие справедливо вложение $\mathbf{U}$ в $\mathbf{H}_\nu$, вложение $\mathbf{H}_\nu \subset \mathbf{U}$ тривиально, следовательно равенства

$$\mathbf{H}_\nu = \mathbf{U}, \qquad \mathbf{R}_\nu = \mathbf{V} \tag{6}$$

выполняются алгебраически и топологически.

§ 2. Задача с модельными краевыми условиями

Вернемся к минимальным предположениям на Ω: ограниченность, односвязность, липшицевость. Будем говорить, что функция $\mathbf{u} \in W_2^2(\Omega)^n \cap \mathbf{U}$ удовлетворяет на $\partial\Omega$ *модельным* краевым условиям, или писать $\mathscr{R}\mathbf{u}\big|_{\partial\Omega} = 0$, если

$$\begin{gathered} \operatorname{rot}\mathbf{u} = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega \ \text{ при } \ n = 2, \\ \text{или} \\ \operatorname{rot}\mathbf{u}\cdot\tau_i = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega, \quad i = 1,2, \quad \text{при } \ n = 3. \end{gathered} \tag{7}$$

Так как в случае $n = 3$ векторы τ_i, $i = 1,2$, образуют базис в касательном пространстве к $\partial\Omega$ в произвольной точке границы области (за исключением множества точек меры нуль), то краевые условия $\mathscr{R}\mathbf{u}\big|_{\partial\Omega} = 0, n = 3$, означают ортогональность вектора $\operatorname{rot}\mathbf{u}$ к $\partial\Omega$ во всех точках $\partial\Omega$ и могут быть записаны в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{u}\times\nu = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega \ \text{ при } \ n = 3.$$

Отсюда, в частности, следует, что условия $\mathscr{R}\mathbf{u}\big|_{\partial\Omega} = 0$, $n = 3$, инвариантны относительно конкретного выбора базиса $\tau_i(P)$, $i = 1,2$, из касательных векторов в произвольной точке $P \in \partial\Omega$. Легко видеть, что соотношения (7) задают одно краевое условие для $\mathbf{u}$ при $n = 2$ и два краевых условия для $\mathbf{u}$ при $n = 3$.

Пусть $\mathbf{u}$ – произвольная функция из $W_2^2(\Omega)^n \cap \mathbf{U}$ и $\mathscr{R}\mathbf{u} = 0$, тогда равенство

$$-(\Delta\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\operatorname{div}\mathbf{u},\operatorname{div}\mathbf{v}) + (\operatorname{rot}\mathbf{u},\operatorname{rot}\mathbf{v}) \tag{8}$$

выполняется для любой $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$. Справедливо и обратное, если для некоторой $\mathbf{u} \in W_2^2(\Omega)^n \cap \mathbf{U}$ и произвольной $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$ выполнено (8), то $\mathscr{R}\mathbf{u} = 0$. Справедливость обоих утверждений легко проверить, принимая во внимание равенства

$$\begin{aligned} &(\nabla p,\mathbf{v}) + (p,\operatorname{div}\mathbf{v}) = 0 && \forall\,\mathbf{v}\in\mathbf{U}, \quad p \in W_2^1(\Omega), \\ &(\operatorname{rot}\mathbf{u},\mathbf{v}) + (\mathbf{u},\operatorname{rot}\mathbf{v}) = \langle\mathbf{u},\gamma_\tau\mathbf{v}\rangle && \forall\,\mathbf{v}\in\mathbf{U}, \quad \begin{matrix} \mathbf{u}\in W_2^1(\Omega), \quad n = 2, \\ \mathbf{u}\in W_2^1(\Omega)^3,\ n = 3, \end{matrix} \end{aligned}$$

где $\gamma_\tau\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\tau \in \mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$ для $n = 2$ и $\gamma_\tau\mathbf{v} = \mathbf{v}\times\nu \in \mathbf{H}^{-1/2}(\partial\Omega)^3$ для $n = 3$ (см. лемму 1).

Для $\mathbf{f} \in \mathbf{U}^{-1}$ рассмотрим задачу нахождения функции $\mathbf{u}$ такой, что

$$\begin{gathered} -\Delta\mathbf{u} = \mathbf{f}, \\ \mathbf{u}\cdot\nu\big|_{\partial\Omega} = \mathscr{R}\mathbf{u}\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Благодаря (8) задача (9) допускает следующую обобщенную формулировку: найти $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ такую, что

$$(\operatorname{div}\mathbf{u},\operatorname{div}\mathbf{v}) + (\operatorname{rot}\mathbf{u},\operatorname{rot}\mathbf{v}) = \langle\mathbf{f},\mathbf{v}\rangle \qquad \forall\,\mathbf{v}\in\mathbf{U}. \tag{10}$$

Справедлива

Лемма 4. *Пусть* $\mathbf{f} \in \mathbf{U}^{-1}$, *тогда задача* (9) *имеет единственное обобщенное решение* $\mathbf{u}$ *из* $\mathbf{U}$, *причем справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{U}} \leqslant c(\Omega)\|\mathbf{f}\|_{-1}.$$

Доказательство. Рассмотрим билинейную форму

$$a(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\operatorname{div}\mathbf{u},\operatorname{div}\mathbf{v}) + (\operatorname{rot}\mathbf{u},\operatorname{rot}\mathbf{v}), \qquad \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{U},$$

из обобщенной формулировки (10).

Из оценки $a(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leqslant \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{U}}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{U}}$ следует непрерывность, а из леммы 2 коэрцитивность формы $a(\mathbf{u},\mathbf{v})$ на $\mathbf{U}$. Теперь утверждение леммы о существовании и единственности обобщенного решения является следствием теоремы Лакса–Милграма, а априорная оценка вытекает из леммы 2 и соотношений

$$a(\mathbf{u},\mathbf{u}) = \langle\mathbf{f},\mathbf{u}\rangle \leqslant \|\mathbf{f}\|_{-1}\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{U}}.$$

Лемма доказана.

Для произвольной $\mathbf{f}\in\mathbf{U}^{-1}$ обобщенное решение задачи (9), существование и единственность которого гарантируется леммой 4, мы будем далее обозначать через $\Delta_\nu^{-1}\mathbf{f}$.

Рассмотрим теперь задачу Стокса: для заданных $\mathbf{f}\in\mathbf{U}^{-1}$, $g\in L_2/\mathbb{R}$ найти $\mathbf{u}$, p такие, что

$$\begin{gathered} -\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = g, \\ \mathbf{u}\cdot\nu\big|_{\partial\Omega} = \mathscr{R}\mathbf{u}\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{gathered} \tag{11}$$

Обобщенная постановка задачи (11) состоит в нахождении пары $\{\mathbf{u},p\}$ из $\mathbf{U}\times L_2/\mathbb{R}$ такой, что

$$\begin{gathered} (\operatorname{div}\mathbf{u},\operatorname{div}\mathbf{v}) + (\operatorname{rot}\mathbf{u},\operatorname{rot}\mathbf{v}) - (p,\operatorname{div}\mathbf{v}) = \langle\mathbf{f},\mathbf{v}\rangle \qquad \forall\,\mathbf{v}\in\mathbf{U}, \\ (\operatorname{div}\mathbf{u},q) = (g,q) \qquad \forall\,q\in L_2/\mathbb{R}. \end{gathered} \tag{12}$$

Разрешимость задачи (11) устанавливается следующей леммой.

Лемма 5. *Пусть $\mathbf{f}\in\mathbf{U}^{-1}$, $g\in L_2/\mathbb{R}$, тогда задача* (11) *имеет единственное обобщенное решение из $\mathbf{U}\times L_2/\mathbb{R}$.*

Доказательство. Коэрцитивность билинейной формы

$$(\operatorname{div}\mathbf{u},\operatorname{div}\mathbf{v}) + (\operatorname{rot}\mathbf{u},\operatorname{rot}\mathbf{v})$$

на пространстве соленоидальных функций из $\mathbf{U}$ следует из коэрцитивности формы на $\mathbf{U}$, которая была установлена при доказательстве леммы 4. Для билинейной формы $b(\mathbf{u},p) = (\operatorname{div}\mathbf{u},p)$, $b(\,\cdot\,,\cdot\,)\colon \mathbf{U}\times L_2/\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, infsup-условие эквивалентно неравенству

$$\|p\|_0 \leqslant c(\Omega)\|\nabla p\|_{-1}, \qquad p\in L_2/\mathbb{R}.$$

Для доказательства этого неравенства заметим, что для произвольной $p\in L_2/\mathbb{R}$ имеет место цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \|p\|_0 &\leqslant c_0 \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{H}_0}\frac{(p,\operatorname{div}\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_1} \leqslant \sqrt{2}\,c_0 \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{H}_0}\frac{(p,\operatorname{div}\mathbf{v})}{\|\operatorname{div}\mathbf{v}\|_0 + \|\operatorname{rot}\mathbf{v}\|_0} \\ &\leqslant \sqrt{2}\,c_0 \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{U}}\frac{(p,\operatorname{div}\mathbf{v})}{\|\operatorname{div}\mathbf{v}\|_0 + \|\operatorname{rot}\mathbf{v}\|_0} \leqslant c_1 \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{U}}\frac{(p,\operatorname{div}\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{U}}} \equiv c(\Omega)\|\nabla p\|_{-1}. \end{aligned}$$

Первое неравенство из цепочки хорошо известно (см., например, [16], [17]), далее мы пользовались очевидным равенством $\|\mathbf{v}\|_1^2 = \|\operatorname{div}\mathbf{v}\|_0^2 + \|\operatorname{rot}\mathbf{v}\|_0^2$ для $\mathbf{v}\in\mathbf{H}_0$, вложением $\mathbf{H}_0\subset\mathbf{U}$ и леммой 2. Теперь следствие 4.1 из [15] влечет утверждение леммы.

Априорные оценки для решения задачи (11) будут получены позже. Рассмотрим теперь оператор Шура $\mathbf{A}_\nu\colon L_2/\mathbb{R}\to L_2/\mathbb{R}$ для системы (11)

$$\mathbf{A}_\nu p = \operatorname{div}\Delta_\nu^{-1}\nabla p,$$

в силу леммы 4 оператор $\mathbf{A}_\nu$ определен для любой $p\in L_2/\mathbb{R}$ и $\mathbf{A}_\nu p\in L_2/\mathbb{R}$. Справедлива

Теорема 1. *Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n=2,3$, – ограниченная односвязная липшицева область, тогда оператор $\mathbf{A}_\nu$ совпадает с тождественным оператором на $L_2/\mathbb{R}$, т.е.*

$$\mathbf{A}_\nu p = p \qquad \forall\, p\in L_2/\mathbb{R}.$$

Доказательство. Пусть p – произвольная функция из $L_2/\mathbb{R}$, и $q=\mathbf{A}_\nu p\in L_2/\mathbb{R}$. Обозначим через $\mathbf{u}$ вектор-функцию $\Delta_\nu^{-1}\nabla p$ из $\mathbf{U}$, тогда в силу определения (10) обобщенного решения задачи (6) и определения оператора $\mathbf{A}_\nu$ имеем

$$\begin{gathered}(p,\operatorname{div}\mathbf{v}) = (\operatorname{div}\mathbf{u},\operatorname{div}\mathbf{v}) + (\operatorname{rot}\mathbf{u},\operatorname{rot}\mathbf{v}) \qquad \forall\,\mathbf{v}\in\mathbf{U},\\ q=\operatorname{div}\mathbf{u}.\end{gathered}\tag{13}$$

Умножим скалярно последнее равенство из (13) на $\operatorname{div}\mathbf{v}$ и рассмотрим $\mathbf{v}$ такие, что $\operatorname{rot}\mathbf{v}=0$, т.е. $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$. Затем в (13) вычтем второе равенство из первого, получим

$$(p,\operatorname{div}\mathbf{v}) - (q,\operatorname{div}\mathbf{v}) = 0 \qquad \forall\,\mathbf{v}\in\mathbf{V}.$$

В силу леммы 3 имеем $(p,r)=(q,r)$ для всех $r\in L_2/\mathbb{R}$, а так как пространство $L_2/\mathbb{R}$ гильбертово, то из последнего равенства следует $p=q$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Обобщенное решение из $\mathbf{U}\times L_2/\mathbb{R}$ задачи (11) можно записать в виде:*

$$\mathbf{u}=\Delta_\nu^{-1}(\nabla p-\mathbf{f}), \qquad p = g+\operatorname{div}\Delta_\nu^{-1}\mathbf{f},\tag{14}$$

для него справедливы априорные оценки

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{U}}\leqslant \mathrm{c}(\Omega)(\|g\|_0+\|\mathbf{f}\|_{-1}), \qquad \|p\|_0\leqslant \mathrm{c}(\Omega)(\|g\|_0+\|\mathbf{f}\|_{-1}).$$

Доказательство. Равенства (14) следуют из утверждения теоремы и обобщенных постановок (10) и (12) соответствующих задач. Априорные оценки для решения следуют из равенств (14), оценки из леммы 4 и неравенства $\|\nabla p\|_{-1}\leqslant\|p\|_0$. Следствие доказано.

Замечание. Поясним на простом примере, почему для произвольных липшицевых областей приведенные выше рассуждения не могут быть проведены в рамках пространства $W_2^1(\Omega)^n$.

Рассмотрим область $\Omega = \{x = \rho e^{i\theta},\ 0 < \rho < 1,\ 0 < \theta < \pi + \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Очевидно, что Ω – ограниченная односвязная липшицева область из $\mathbb{R}^2$, но условие I) не выполнено. Возьмем функцию q из $L_2/\mathbb{R}$ такую, что обобщенное решение $\psi \in W_2^1(\Omega)/\mathbb{R}$ задачи $\Delta\psi = q$, $\partial\psi/\partial\nu\big|_{\partial\Omega} = 0$, не принадлежит $W_2^2(\Omega)$ (см., например, [18]). Рассмотрим вектор-функцию $\mathbf{u} = \nabla\psi$. Легко видеть, что $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$, но $\mathbf{u} \notin W_2^1(\Omega)$, более того, справедливо

$$(\operatorname{div}\mathbf{u}, \operatorname{div}\mathbf{v}) + (\operatorname{rot}\mathbf{u}, \operatorname{rot}\mathbf{v}) = (q, \operatorname{div}\mathbf{v}) \qquad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{U},$$

т.е. $\mathbf{u} = \Delta_\nu^{-1}\nabla q$ для некоторой $q \in L_2/\mathbb{R}$.

§ 3. О регулярности решения

Для задачи Стокса в ограниченной области с краевыми условиями Дирихле в настоящее время существует сформировавшаяся теория в пространствах $W_p^m(\Omega)$, из которой, в частности, следует (см., например, [1], [19]), что если $\mathbf{f} \in W_2^{m-2}(\Omega)^n$, $g \in W_2^{m-1}(\Omega) \cap L_2/\mathbb{R}$, $m \geqslant 1$, и $\partial\Omega \in C^m$, то для обобщенного решения $\{\mathbf{u}, p\}$ справедливо: $\mathbf{u} \in W_2^m(\Omega)^n$, $p \in W_2^{m-1}(\Omega) \cap L_2/\mathbb{R}$ и

$$\|\mathbf{u}\|_m + \|p\|_{m-1} \leqslant c(m, \Omega)(\|\mathbf{f}\|_{m-2} + \|g\|_{m-1}).$$

В этом параграфе мы получим априорные оценки гладкости и нормы обобщенного решения задачи (11) с модельными краевыми условиями.

Предположим вначале, что для ограниченной односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, выполняется условие I) из § 1, тогда в силу (6) результаты § 1 и § 2 остаются справедливыми, если пространства $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ заменить на $\mathbf{H}_\nu$ и $\mathbf{R}_\nu$, а норму $\|\cdot\|_{\mathbf{U}}$ на $\|\cdot\|_1$. Более того, обобщенные постановки задач можно рассматривать в терминах пространства $\mathbf{H}_\nu$. Таким образом, справедлива

Лемма 6. *Пусть Ω – ограниченная односвязная область из $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, и выполняется условие* I). *Если $\mathbf{f} \in \mathbf{H}_\nu^{-1}$, то существует единственное обобщенное решение $\mathbf{u}$ из $\mathbf{H}_\nu$ задачи* (9) *и*

$$\|\mathbf{u}\|_1 \leqslant c(\Omega)\|\mathbf{f}\|_{-1};$$

если $\mathbf{f} \in \mathbf{H}_\nu^{-1}$, $g \in L_2/\mathbb{R}$, то существует единственное обобщенное решение $\{\mathbf{u}, p\}$ из $\mathbf{H}_\nu \times L_2/\mathbb{R}$ задачи (11), *для него справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}\|_1 \leqslant \mathrm{c}(\Omega)(\|g\|_0 + 2\|\mathbf{f}\|_{-1}), \qquad \|p\|_0 \leqslant \mathrm{c}(\Omega)(\|g\|_0 + \|\mathbf{f}\|_{-1});$$

оператор $\mathbf{A}_\nu$ совпадает с тождественным оператором на $L_2/\mathbb{R}$.

В силу теоремы 3.1.1.1 из [18] и теоремы 3.9 из [15] для выпуклых Ω неравенство

$$(\operatorname{div}\mathbf{u}, \operatorname{div}\mathbf{u}) + (\operatorname{rot}\mathbf{u}, \operatorname{rot}\mathbf{u}) \geqslant \alpha\|\mathbf{u}\|_1^2, \qquad \mathbf{u} \in \mathbf{H}_\nu,$$

справедливо с $\alpha = 1$, поэтому для таких областей константу $c(\Omega)$ из леммы 6 можно положить равной 1.

Перейдем к вопросу о регулярности решений при дополнительных ограничениях на регулярность правой части и границы области. Нам понадобится следующая лемма из [20]:

Лемма 7. *Пусть Ω – ограниченная область из $\mathbb{R}^n$, $n = 2,3$, и $\partial\Omega \in C^{m+1}$, $m \geqslant 1$. Тогда*

$$W_2^m(\Omega)^n = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega)^n : \operatorname{div}\mathbf{u} \in W_2^{m-1}(\Omega),\ \operatorname{rot}\mathbf{u} \in W_2^{m-1}(\Omega)^r,\ \mathbf{u}\cdot\nu \in W_2^{m-1/2}(\partial\Omega)\},$$
$$\|\mathbf{u}\|_m \leqslant c(m,\Omega)\big(\|\mathbf{u}\|_0 + \|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{m-1} + \|\operatorname{rot}\mathbf{u}\|_{m-1} + \|\mathbf{u}\cdot\nu\|_{m-1/2,\partial\Omega}\big),$$

где $r = 1$ для $n = 2$, $r = 3$ для $n = 3$.

Из следствия 1 теоремы 1 мы видим, что информация о гладкости обобщенного решения задачи (12) может быть полностью получена из априорного знания гладкости функций $\mathbf{f}$, g и гладкости решений задачи (9). Поэтому для нас важна

Лемма 8. *Пусть $m \geqslant 1$, Ω – ограниченная односвязная область из $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^r$, $r = \max(m,2)$, $\mathbf{f} \in W_2^{m-2}(\Omega)^n$. Тогда существует единственное решение $\mathbf{u}$ задачи (9) из $W_2^m(\Omega)^n \cap \mathbf{H}_\nu$, причем*

$$\|\mathbf{u}\|_m \leqslant c(m,\Omega)\|\mathbf{f}\|_{m-2}. \tag{15}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $n = 2$. Проведем доказательство леммы с помощью индукции по m. Для $m = 1$ утверждение доказываемой леммы следует из утверждения леммы 6. Предположим, что лемма доказана для $m = 1,\dots,k-1$, докажем теперь для $m = k \geqslant 2$.

Так как $\partial\Omega \in C^k$, то векторное поле ν принадлежит к классу $C^{k-1}(\partial\Omega)^2$ и может быть продолжено до векторного поля из $C^{k-1}(\overline{\Omega})^2$, которое мы будем обозначать через $\overline{\nu} = (\overline{\nu}_1, \overline{\nu}_2)$. Отметим справедливость вложений $C^{k-1}(\overline{\Omega})^2 \subset W_\infty^{k-1}(\Omega)^2 \subset W_2^k(\Omega)^2$ (см. [21]).

Пусть $\mathbf{u}$ – решение (9), которое по предположению индукции принадлежит $W_2^{k-1}(\Omega)^2 \cap \mathbf{H}_\nu$, и для которого справедлива оценка (15) с $m = k-1$. Обозначим через Ω_σ, $\sigma > 0$, множество точек Ω, расстояние от которых до $\partial\Omega$ меньше σ. Нам достаточно доказать, что утверждение леммы выполняется для ограничения функции $\mathbf{u}$ на Ω_σ для некоторого $\sigma > 0$. Действительно, если это так, то рассмотрим область Ω' такую, что $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, $\overline{\Omega \setminus \Omega_\sigma} \subset \Omega'$ и $\partial\Omega' \in C^k$. Функция $\mathbf{u}$ в Ω' является решением векторного уравнения Лапласа с краевыми условиями Дирихле на $\partial\Omega'$, при этом $\mathbf{u}|_{\partial\Omega'} \in W_2^{k-1/2}(\partial\Omega')^2$ и

$$\|\mathbf{u}|_{\partial\Omega'}\|_{k-1/2,\partial\Omega'} \leqslant c(\Omega,\Omega',\sigma)\|\mathbf{u}\|_{k,\Omega_\sigma} \leqslant c\|\mathbf{f}\|_{k-2}.$$

Теперь в силу классических результатов о регулярности решений эллиптических уравнений $\mathbf{u} \in W_2^k(\Omega')^2$ и $\|\mathbf{u}\|_{k,\Omega'} \leqslant c\|\mathbf{f}\|_{k-2,\Omega'}$, что вместе с предположением о принадлежности $\mathbf{u}$ к $W_2^k(\Omega_\sigma)^2$ и оценкой $\|\mathbf{u}\|_{k,\Omega_\sigma} \leqslant c\|\mathbf{f}\|_{k-2,\Omega_\sigma}$ влечет утверждение леммы.

Итак, нам достаточно доказать, что $\mathbf{u} \in W_2^k(\Omega_{\sigma_0})^2$ и $\|\mathbf{u}\|_{k,\Omega_{\sigma_0}} \leqslant c\|\mathbf{f}\|_{k-2}$ при некотором $\sigma_0 > 0$. Рассмотрим функцию $q = \mathbf{u}\cdot\overline{\nu} = u_1\overline{\nu}_1 + u_2\overline{\nu}_2$, $q \in W_2^{k-1}(\Omega) \cap W_{2,0}^1(\Omega)$. Из определения q следует, что

$$\begin{aligned} \Delta q = \mathbf{f}\cdot\overline{\nu} + \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,\frac{\partial \overline{\nu}_i}{\partial x_j}\,, \\ q\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Так как $\mathbf{f} \in W_2^{k-2}(\Omega)^2, \overline{\nu} \in W_2^k(\Omega)^2$ и по предположению индукции $\mathbf{u} \in W_2^{k-1}(\Omega)^2$, то правая часть системы (16) принадлежит $W_2^{k-2}(\Omega)$, а следовательно, $q \in W_2^k(\Omega)$ и

$$\|q\|_k \leqslant c\left\|\mathbf{f} \cdot \overline{\nu} + \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{\nu}_i}{\partial x_j}\right\|_{k-2} \leqslant c_1(\|\mathbf{f}\|_{k-2} + \|\mathbf{u}\|_{k-1}) \leqslant c_2\|\mathbf{f}\|_{k-2}. \quad (17)$$

Теперь для функции

$$\varphi = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\overline{\nu}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\overline{\nu}_2, \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\overline{\nu}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\overline{\nu}_2\right) = \nabla q - \mathbf{u}^t \cdot (\nabla \overline{\nu})$$

мы имеем $\varphi \in W_2^{k-1}(\Omega)$ и в силу (17)

$$\|\varphi\|_{k-1} \leqslant c(\Omega)\|\mathbf{f}\|_{k-2}. \quad (18)$$

Рассмотрим также функцию

$$\psi = \left(-\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\overline{\nu}_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\overline{\nu}_1 - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\overline{\nu}_2 - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\overline{\nu}_1, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\overline{\nu}_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\overline{\nu}_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\overline{\nu}_1 - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\overline{\nu}_2\right).$$

Из уравнений (9) и предположения индукции непосредственно следует, что $\operatorname{div}\psi, \operatorname{rot}\psi \in W_2^{k-2}(\Omega), \psi \cdot \nu\big|_{\partial\Omega} = 0$ и

$$\|\psi\|_0 + \|\operatorname{div}\psi\|_{k-2} + \|\operatorname{rot}\psi\|_{k-2} \leqslant c(\Omega)\|\mathbf{f}\|_{k-2},$$

следовательно, в силу леммы 7 $\psi \in W_2^{k-1}(\Omega)^2$ и

$$\|\psi\|_{k-1} \leqslant c(\Omega)\|\mathbf{f}\|_{k-2}. \quad (19)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(\overline{\nu}_1^2 + \overline{\nu}_2^2) = \varphi_1\overline{\nu}_1 - \varphi_2\overline{\nu}_2 - \psi_1\overline{\nu}_2 \in W_2^{k-1}(\Omega).$$

Аналогично получаем для всех остальных частных производных

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\overline{\nu}_1^2 + \overline{\nu}_2^2) \in W_2^{k-1}(\Omega), \qquad i,j = 1,2, \quad (20)$$

причем из (18) и (19) следует

$$\left\|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\overline{\nu}_1^2 + \overline{\nu}_2^2)\right\|_{k-1} \leqslant c(\Omega)\|\mathbf{f}\|_{k-2}. \quad (21)$$

Рассмотрим теперь функцию $\overline{\nu}_1^2 + \overline{\nu}_2^2 \in C^{k-1}(\overline{\Omega}), \overline{\nu}_1^2 + \overline{\nu}_2^2\big|_{\partial\Omega} = 1$, и выберем $\sigma_0 > 0$ такое, что $\overline{\nu}_1^2 + \overline{\nu}_2^2 \geqslant \frac{1}{2}$ в Ω_{σ_0}. Из (20) и (21) получаем

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \in W_2^{k-1}(\Omega_{\sigma_0})^2,$$

$$\left\|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right\|_{k-1,\Omega_{\sigma_0}} \leqslant c(\Omega)\|\mathbf{f}\|_{k-2}, \qquad i,j = 1,2.$$

Следовательно, $\mathbf{u} \in W_2^k(\Omega_{\sigma_0})^2$ и $\|\mathbf{u}\|_{k,\Omega_{\sigma_0}} \leqslant c(\Omega)\|\mathbf{f}\|_{k-2}$ для некоторого $\sigma_0 > 0$. Мы доказали лемму для $n = 2$.

В случае $n = 3$ лемма доказывается аналогично. В этом случае достаточно рассмотреть функцию $q = \mathbf{u} \cdot \overline{\nu}$ и вектор-функции

$$\psi_1 = (-n_2, n_1, 0) \cdot (\nabla \mathbf{u}) - \big(-[\overline{\nu} \cdot (\nabla \mathbf{u})]_2, [\overline{\nu} \cdot (\nabla \mathbf{u})]_1, 0\big),$$
$$\psi_2 = (-n_3, 0, n_1) \cdot (\nabla \mathbf{u}) - \big(-[\overline{\nu} \cdot (\nabla \mathbf{u})]_3, 0, [\overline{\nu} \cdot (\nabla \mathbf{u})]_1\big),$$

где $[\,\cdot\,]_i$ – i-я компонента соответствующего вектора. Лемма доказана.

Теперь из леммы 8 и следствия 1 теоремы 1 непосредственно вытекает

Теорема 2. *Пусть $m \geqslant 1$, Ω – ограниченная односвязная область из $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^r$, $r = \max(m,2)$, $\mathbf{f} \in W_2^{m-2}(\Omega)^n$, $g \in W_2^{m-1}(\Omega) \cap L_2/\mathbb{R}$. Тогда существует единственное решение $\{\mathbf{u}, p\}$ задачи* (11) *из $(W_2^m(\Omega)^n \cap \mathbf{H}_\nu) \times (W_2^{m-1}(\Omega) \cap L_2/\mathbb{R})$, причем*

$$\|\mathbf{u}\|_m \leqslant c(m,\Omega)(\|g\|_{m-1} + \|\mathbf{f}\|_{m-2}),$$
$$\|p\|_{m-1} \leqslant c(m,\Omega)(\|g\|_{m-1} + \|\mathbf{f}\|_{m-2}).$$

§ 4. Некоторые замечания и следствия

Для двумерных ограниченных односвязных областей с гладкой границей задача (11) с неоднородными условиями на $\operatorname{rot}\mathbf{u}$ была рассмотрена в [6], где использовалась для построения алгоритма типа Узавы численного решения задачи (1), (2). Приведенная ниже теорема является следствием теоремы 1 и аналогична соответствующему результату из [6].

Теорема 3. *Пусть Ω – ограниченная односвязная область, удовлетворяющая условию* I), *пусть $\mathbf{f} \in L_2(\Omega)^n$, $g \in W_2^1(\Omega) \cap L_2/\mathbb{R}$. Тогда решение p задачи* (11) *принадлежит $W_2^1(\Omega) \cap L_2/\mathbb{R}$ и удовлетворяет в обобщенном смысле системе*

$$\Delta p = \Delta g + \operatorname{div}\mathbf{f},$$
$$\frac{\partial p}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega} = \left(\frac{\partial g}{\partial \nu} + \mathbf{f}\cdot\nu\right)\bigg|_{\partial\Omega}. \tag{22}$$

Доказательство. Благодаря теореме 2 мы знаем, что в сделанных предположениях на Ω, $\mathbf{f}$ и g решение p задачи (11) принадлежит $W_2^1(\Omega) \cap L_2/\mathbb{R}$. Из следствия 1 имеем $p = g + \operatorname{div}\mathbf{w}$, $\mathbf{w} = \Delta_\nu^{-1}\mathbf{f}$, для функции $\mathbf{w}$ из $W_2^2(\Omega)^n \cap \mathbf{H}_\nu$, справедливо

$$(\nabla \operatorname{div}\mathbf{w}, \mathbf{v}) + (\operatorname{rot}\mathbf{w}, \operatorname{rot}\mathbf{v}) + \langle \operatorname{rot}\mathbf{w}, \gamma_\tau \mathbf{v}\rangle = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \qquad \forall\, \mathbf{v} \in W_2^1(\Omega)^n.$$

Так как $\mathscr{R}\mathbf{w}\big|_{\partial\Omega} = 0$, то $\langle \operatorname{rot}\mathbf{w}, \gamma_\tau \mathbf{v}\rangle = 0$. Далее получаем

$$(\nabla p, \mathbf{v}) = (\nabla g, \mathbf{v}) + (\operatorname{rot}\mathbf{w}, \operatorname{rot}\mathbf{v}) + (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \qquad \forall\, \mathbf{v} \in W_2^1(\Omega)^n.$$

Для произвольной $\psi \in W_2^2(\Omega)$, положив в последнем равенстве $\mathbf{v} = \nabla\psi$, имеем

$$(\nabla p, \nabla\psi) = (\nabla g, \nabla\psi) + (\mathbf{f}, \nabla\psi).$$

Переходя в полученном равенстве к замыканию по ψ относительно нормы пространства $W_2^1(\Omega)$, получаем (22) в обобщенной постановке. Теорема доказана.

Приведем еще два результата, являющихся следствием теоремы 1. Обозначим через $\mathbf{W}$ следующее подпространство $\mathbf{U}$:

$$\mathbf{W} \equiv \{\mathbf{u} \in \mathbf{U} : \exists p \in L_2/\mathbb{R} \text{ такая, что } \mathbf{u} = \Delta_\nu^{-1}\nabla p\}.$$

Теорема 4. *В предположениях теоремы* 1 *справедливо равенство*

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}$$

как равенство подпространств $\mathbf{U}$, *более того, оператор* $\Delta_\nu^{-1}\nabla$ *осуществляет изоморфизм пространств* $L_2/\mathbb{R}$ *и* $\mathbf{V}$ *и*

$$\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_0 = \|p\|_0$$

для $\mathbf{u} = \Delta_\nu^{-1}\nabla p$.

Доказательство. Напомним, что равенство $\mathbf{u} = \Delta_\nu^{-1}\nabla p$ означает выполнение соотношения

$$(p, \operatorname{div}\mathbf{v}) = (\operatorname{div}\mathbf{u}, \operatorname{div}\mathbf{v}) + (\operatorname{rot}\mathbf{u}, \operatorname{rot}\mathbf{v}) \qquad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{U}. \tag{23}$$

Включение $\mathbf{V} \subset \mathbf{W}$ становится очевидно из (23), если взять $p = \operatorname{div}\mathbf{u}$. Для доказательства включения $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ заметим, что для произвольной $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$ из (23) и теоремы 1 следует

$$(\operatorname{rot}\mathbf{u}, \operatorname{rot}\mathbf{v}) = 0 \qquad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{U}.$$

Положим в последнем равенстве $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, тогда $\|\operatorname{rot}\mathbf{u}\|_0^2 = 0$, а следовательно, $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$. Равенство $\mathbf{W} = \mathbf{V}$ доказано. Вторая часть утверждения теоремы следует из соотношений

$$\|p\|_0 = \|\mathbf{A}_\nu p\|_0 = \|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_0 \leqslant \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{U}},$$

справедливых для произвольной $p \in L_2/\mathbb{R}$ и $\mathbf{u} = \Delta_\nu^{-1}\nabla p$. Теорема доказана.

Рассмотрим неравенство

$$\|p\|_0 \leqslant c_0(\Omega) \sup_{0 \neq \mathbf{u} \in \mathbf{H}_0} \frac{(p, \operatorname{div}\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|_1} \qquad \forall\, p \in L_2/\mathbb{R}. \tag{24}$$

Как уже отмечалось при доказательстве леммы 5, неравенство (24) выполняется с некоторой константой $1 < c_0(\Omega) < \infty$, зависящей только от области. Отметим равенство (см., например, [6]) $c_0(\Omega) = \lambda_{\min}^{-1/2}$, где $\lambda_{\min}$ – минимальное собственное значение оператора $\mathbf{A}_0$ (см. введение). Дискретный аналог (24) широко известен как LBB (или infsup)-условие (см., например, [15], [22]). Обозначим через $\mathscr{H}_\nu$ подпространство $\mathbf{U}$:

$$\mathscr{H}_\nu \equiv \{\mathbf{u} \in \mathbf{U} : \Delta\mathbf{u} = 0\}.$$

Определим оператор $\mathbf{D}\colon \mathbf{V} \to \mathscr{H}_\nu$ следующим образом: $\mathbf{v} = \mathbf{D}\mathbf{u}$, если $\gamma_\nu \mathbf{v}\big|_{\partial\Omega} = 0$, $\gamma_\tau \mathbf{v}\big|_{\partial\Omega} = \gamma_\tau \mathbf{u}\big|_{\partial\Omega}$ и $\mathbf{v} \in \mathscr{H}_\nu$. При заданной функции $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ функция $\mathbf{v} = \mathbf{D}\mathbf{u}$ определяется однозначно как решение задачи

$$\begin{gathered} \mathbf{v} = \mathbf{r} + \mathbf{u}, \qquad \mathbf{r} \in \mathbf{H}_0, \\ -(\nabla \mathbf{r}, \nabla \mathbf{w}) = (\operatorname{div} \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{w}) + (\operatorname{rot} \mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{w}) \qquad \forall\, \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0. \end{gathered} \tag{25}$$

Для функций $\mathbf{u}$ из $\mathbf{U}$ будем использовать обозначение

$$|\mathbf{u}|_{\mathbf{U}} \equiv \big(\|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_0^2 + \|\operatorname{rot} \mathbf{u}\|_0^2\big)^{1/2}.$$

Для $\mathbf{v} = \mathbf{D}\mathbf{u}$ из (25) непосредственно следует

$$|\mathbf{v}|_{\mathbf{U}}^2 = (\operatorname{div} \mathbf{v}, \operatorname{div} \mathbf{u}) + (\operatorname{rot} \mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{u}), \tag{26}$$

$$|\mathbf{v}|_{\mathbf{U}} \leqslant c_1(\Omega) |\mathbf{u}|_{\mathbf{U}} \tag{27}$$

с константой $c_1(\Omega) \leqslant 1$. Справедлива

Теорема 5. *В предположениях теоремы* 1 *выполнение неравенства* (24) *эквивалентно выполнению неравенства*

$$|\mathbf{D}\mathbf{u}|_{\mathbf{U}}^2 \leqslant \big(1 - c_0^{-2}(\Omega)\big) \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_0^2 \qquad \forall\, \mathbf{u} \in \mathbf{V}, \tag{28}$$

причем равенства в (24) *и* (28) *могут иметь место лишь одновременно на функциях* $p \in L_2/\mathbb{R}$ *и* $\mathbf{u} = \Delta_\nu^{-1}\nabla p \in \mathbf{V}$, *соответственно, а константа* $c_0(\Omega)$ *одинаковая для* (24) *и* (28).

Доказательство. Из теоремы 4 следует, что для произвольной $p \in L_2/\mathbb{R}$ и $\mathbf{u} = \Delta_\nu^{-1}\nabla p \in \mathbf{V}$ выполняется

$$\|p\|_0 = \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_0. \tag{29}$$

С другой стороны,

$$\sup_{0 \neq \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0} \frac{(p, \operatorname{div} \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{v}\|_1^2} = \sup_{0 \neq \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0} \frac{(\Delta_0^{-1}\nabla p, \mathbf{v})_1^2}{\|\mathbf{v}\|_1^2} = \|\mathbf{w}\|_1^2 = |\mathbf{w}|_{\mathbf{U}}^2, \tag{30}$$

где $\mathbf{w} = \Delta_0^{-1}\nabla p$ – решение задачи Дирихле: $\Delta \mathbf{w} = \nabla p$, $\mathbf{w}\big|_{\partial\Omega} = 0$. Рассмотрим функцию $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{w}$. Имеем $\gamma_\nu \mathbf{v}\big|_{\partial\Omega} = \gamma_\nu \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$, $\gamma_\tau \mathbf{v}\big|_{\partial\Omega} = \gamma_\tau \mathbf{u}\big|_{\partial\Omega}$ и $\Delta \mathbf{v} = 0$, следовательно, $\mathbf{v} = \mathbf{D}\mathbf{u}$. Теперь

$$|\mathbf{w}|_{\mathbf{U}}^2 = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|_{\mathbf{U}}^2 = |\mathbf{u}|_{\mathbf{U}}^2 + |\mathbf{v}|_{\mathbf{V}}^2 - 2\big((\operatorname{div} \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{v}) + (\operatorname{rot} \mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{v})\big).$$

В силу (26) получаем

$$|\mathbf{w}|_{\mathbf{U}}^2 = |\mathbf{u}|_{\mathbf{U}}^2 - |\mathbf{v}|_{\mathbf{U}}^2 = \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_0^2 - |\mathbf{D}\mathbf{u}|_{\mathbf{U}}^2. \tag{31}$$

Равенства (31) вместе с (29) и (30) доказывают, что из выполнения (28) следует выполнение (24). А так как по теореме 4 оператор $\Delta_\nu^{-1}\nabla$ осуществляет изоморфизм пространств $L_2/\mathbb{R}$ и $\mathbf{V}$, то из (29)–(31) следует справедливость утверждения теоремы и в другую сторону. Теорема доказана.

Из неравенств (24), (27) и равенства $\|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_0^2 = |\mathbf{u}|_{\mathbf{U}}^2$, $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$, немедленно получаем

Следствие 2. *Константы* $c_0(\Omega)$ *в* (24) *и* $c_1(\Omega)$ *в* (27) *связаны соотношением* $c_0^2(\Omega) = (1 - c_1^2(\Omega))^{-1}$.

Отметим, что в принятых нами ранее обозначениях модельные краевые условия (7) могут быть записаны в виде

$$
\begin{aligned}
&\tau^t \cdot (\nabla \mathbf{u}) \cdot \nu - \nu^t \cdot (\nabla \mathbf{u}) \cdot \tau = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega \ \text{ при } \ n = 2;\\
&\tau_i^t \cdot (\nabla \mathbf{u}) \cdot \nu - \nu^t \cdot (\nabla \mathbf{u}) \cdot \tau_i = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega, \ i = 1, 2, \ \text{ при } \ n = 3.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

В случае $n = 2$ эквивалентность (7) и (32) проверяется непосредственно, а в случае $n = 3$ векторы τ_i в (7) надо положить равными $\tau_i' \times \nu$, если τ_i', $i = 1, 2$, – касательные векторы из (32).

Для многоугольника слагаемое $\tau^t\,(\nabla \mathbf{u})\,\nu$ из (32) соответствует условной записи $\partial(\mathbf{u} \cdot \tau)/\partial\nu$, используемой для постановки периодических краевых условий в прямоугольнике (4), а $\nu^t(\nabla \mathbf{u})\tau = \partial(\mathbf{u} \cdot \nu)/\partial\tau = 0$. Запись модельных краевых условий в виде (32) делает наглядным их обобщение на случай $n > 3$.

§ 5. Задача Стокса с параметром

Рассмотрим в ограниченной, односвязной, липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, задачу Стокса с параметром и модельными краевыми условиями

$$
\begin{gathered}
-\Delta \mathbf{u} + \alpha \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f},\\
\operatorname{div} \mathbf{u} = g,\\
\mathbf{u} \cdot \nu\big|_{\partial\Omega} = \mathscr{R}\mathbf{u}\big|_{\partial\Omega} = 0,
\end{gathered}
\tag{33}
$$

где $\alpha \in [0, \infty)$, $\mathbf{f} \in \mathbf{U}^{-1}$, $g \in L_2/\mathbb{R}$.

Задача с параметром возникает в вычислительной гидродинамике, например, при рассмотрении полу-неявных схем для уравнений Стокса и Навье–Стокса. В этом случае $\alpha \sim (\upsilon\,\delta t)^{-1}$, где υ – кинематическая вязкость жидкости, а δt – шаг по времени.

Обобщенная постановка (33) состоит в нахождении пары $\{\mathbf{u}, p\}$ из $\mathbf{U} \times L_2/\mathbb{R}$ такой, что

$$
\begin{gathered}
(\operatorname{div} \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{v}) + (\operatorname{rot} \mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{v}) + \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle\,,\\
(\operatorname{div} \mathbf{u}, q) = (g, q) \qquad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{U}, \quad \forall\, q \in L_2/\mathbb{R}.
\end{gathered}
$$

Результаты разрешимости и регулярности для задачи (33) дословно повторяют аналогичные результаты для задачи (11). Рассмотрим дополнение Шура

$$
\mathbf{A}_\nu(\alpha) \equiv \operatorname{div}(\Delta - \alpha \mathbf{I})_\nu^{-1} \nabla,
$$

где $\mathbf{I}$ – тождественный оператор. Следующая теорема обобщает теорему 1.

Теорема 6. *В предположениях теоремы* 1 *для произвольных* $\alpha \in [0, \infty)$, $p \in L_2/\mathbb{R}$ *и* $q = \mathbf{A}_\nu(\alpha)p$, $q \in L_2/\mathbb{R}$, *справедливо равенство*

$$
p = q - \alpha \Delta_N^{-1} q,
\tag{34}
$$

где $r = \Delta_N^{-1} q$ *– решение задачи Неймана*

$$
\Delta r = q, \qquad \frac{\partial r}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega} = 0.
$$

Доказательство. Для $\alpha = 0$ утверждение теоремы совпадает с теоремой 1. Предположим теперь, что $\alpha > 0$, тогда произвольная функция p из $L_2/\mathbb{R}$ и $q = \mathbf{A}_\nu(\alpha)p$ связаны соотношениями

$$\begin{aligned} -\Delta\mathbf{u} + \alpha\mathbf{u} + \nabla p &= 0, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= q, \\ \mathbf{u}\cdot\nu\big|_{\partial\Omega} = \mathscr{R}\mathbf{u}\big|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \tag{35}$$

Рассмотрим функции $p_1 = -\alpha\Delta_N^{-1}q$ и $\mathbf{u}_1 = \alpha^{-1}\nabla p_1$. Определим вектор-функцию $\mathbf{u}_2 \in \mathbf{U}$ из системы

$$-\Delta\mathbf{u}_2 = \nabla q, \qquad \mathbf{u}_2\cdot\nu\big|_{\partial\Omega} = \mathscr{R}\mathbf{u}_2\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Имеем $\Delta\mathbf{u}_1 = \nabla\operatorname{div}\mathbf{u}_1 = -\nabla q = \Delta\mathbf{u}_2$, а так как $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{U}$ и $\mathscr{R}\mathbf{u}_1\big|_{\partial\Omega} = 0$, то $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$.

Положим $\widetilde{p} = q + p_1$, тогда для $\widetilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ и $\widetilde{p}$ выполняется

$$\begin{aligned} -\Delta\widetilde{\mathbf{u}} + \alpha\widetilde{\mathbf{u}} + \nabla\widetilde{p} &= 0, \\ \operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} &= q, \\ \widetilde{\mathbf{u}}\cdot\nu\big|_{\partial\Omega} = \mathscr{R}\widetilde{\mathbf{u}}\big|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \tag{36}$$

В силу единственности решения (33) и соотношений (35), (36) получаем $p = \widetilde{p} = q - \alpha\Delta_N^{-1}q$. Теорема доказана.

Отметим, что справедливость равенства (34) позволяет обобщить на широкий класс областей построение и анализ эффективного переобуславливания алгоритма Узавы численного решения задачи Стокса с параметром и с краевыми условиями Дирихле (см. [9], [14], [23]).

Теорему 3 обобщает

Теорема 7. *Пусть Ω – ограниченная односвязная область, удовлетворяющая условию* I). *Пусть $\mathbf{f} \in L_2(\Omega)^n$, $g \in W_2^1(\Omega) \cap L_2/\mathbb{R}$. Тогда решение p задачи* (33) *из $W_2^1(\Omega) \cap L_2/\mathbb{R}$ удовлетворяет в обобщенном смысле уравнению*

$$\begin{aligned} &\Delta p = \Delta g - \alpha g + \operatorname{div}\mathbf{f}, \\ &\frac{\partial p}{\partial\nu} = \frac{\partial g}{\partial\nu} + \mathbf{f}\cdot\nu. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 7 повторяет доказательство теоремы 3.

Заключение

С вариационной точки зрения функцию давления в уравнениях Стокса можно рассматривать как лагранжев множитель, соответствующий ограничению на поле скоростей: $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$. Поэтому вполне обоснована общепринятая точка зрения, что при наличии условия несжимаемости функции скорости и давления принципиально неразделимы в задаче Стокса. Пример задачи с модельными краевыми условиями показывает, что из этого правила есть исключение. Следствие 1 и теорема 3 показывают, что в задаче Стокса с модельными краевыми условиями нахождение давления требует решения одного векторного уравнения Пуассона с однородными условиями третьего рода или одного скалярного уравнения Пуассона с неоднородными условиями Неймана. Нахождение поля скоростей происходит отдельно и требует дополнительно решения векторного уравнения Пуассона.

Снижение требований к области до минимально, как нам кажется, возможных потребовало дополнительных математических "усилий", в частности, рассмотрения менее "привычных" функциональных пространств, чем пространства Соболева. Этим была достигнута большая полнота результатов.

Наконец, естественное обобщение результатов для задачи с параметром представляется важным для дальнейшего исследования данной задачи с краевыми условиями Дирихле с точки зрения численных методов.

Автор выражает благодарность Г. М. Кобелькову за постановку задачи и Е. В. Чижонкову за ряд полезных замечаний.

Список литературы

1. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.
2. *Gresho P. M., Sani R. L.* On pressure boundary conditions for incompressible Navier–Stokes equations // Internat. J. Numer. Methods Fluids. 1987. V. 7. P. 1111–1145.
3. *Gresho P. M.* Incompressible fluid dynamics: some fundamental formulatio issues // Annual Review of Fluid Mechanics. 1991. V. 23. P. 413–453.
4. *Brezzi F., Fortin M.* Mixed and Hybrid Finite Element Methods. New York: Springer-Verlag, 1991.
5. *Chizhonkov E. V.* Application of the Cossera spectrum to the optimization of a method for solving the Stokes problem // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1994. V. 9. № 3. P. 191–199.
6. *Crouzeix M.* Etude d'une methode de linearisation. Resolution des equations de Stokes stationaries. Application aux equations des Navier–Stokes stationaries // Cahiere de l'IRIA. 1974. № 12. P. 139–244.
7. *Михлин С. Г.* Спектр пучка операторов теории упругости // УМН. 1973. Т. 28. № 3. С. 43–82.
8. *Кобельков Г. М.* О численных методах решения уравнений Навье–Стокса в переменных скорость-давление // Вычислительные процессы и системы. Выпуск 8. М.: Наука, 1991. С. 204–237.
9. *Ольшанский М. А.* Об одной задаче типа Стокса с параметром // ЖВМ и МФ. 1996. Т. 36. № 2. С. 75–86.
10. *Aristov P. P., Chizhonkov E. V.* On the constant in the LBB condition for rectangular domains // Report № 9534, Dep. Math. Univ. Nijmegen, 1995.
11. *Bakhvalov N. S.* Solution of the Stokes nonstationary problems by the fictious domain method // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1995. V. 10. № 3. P. 163–172.
12. *Kobel'kov G. M.* On solving the Navier–Stokes equations at large Reynolds numbers // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1995. V. 10. № 1. P. 33–40.
13. *Kobel'kov G. M.* To numerical solution of nonstationary Stokes problem // Report № 9536, Dep. Math. Univ. Nijmegen, 1995.
14. *Ol'shanskii M. A.* On numerical solution of nonstationary Stokes equations // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1995. V. 10. № 1. P. 81–92.
15. *Girault V., Raviart P. A.* Finite element methods for Navier–Stokes equations. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
16. *Nečas J.* Equations aux derivees partielles. Montreal: Presses de l'Universite de Montreal, 1965.
17. *Kobel'kov G. M., Valedinskiy V. D.* On the inequality $\|p\| \leqslant c\|\operatorname{grad} p\|_{-1}$ and its finite dimensional image // Soviet J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1986. V. 1. № 3. P. 189–200.
18. *Grisvard P.* Elliptic Problems in Nonsmooth Domains. Boston: Pitman Publ., 1985.

19. *Cattabriga L.* Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes // Sem. Mat. Univ. Pavoda. 1961. V. 31. P. 308–340.
20. *Foias C., Temam R.* Remarques sur les equations de Navier–Stokes et les phenomenes successifs de bifurcation // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci (4). 1978. V. 5. №1. P. 29–63.
21. *Никольский С. М.* Приближение функции многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
22. *Gunsburger M. D.* Finite element methods for viscous incompressible flows: London, 1989.
23. *Cahouet J., Chabart J. P.* Some fast 3D finite element solvers for the generalized Stokes problem // Internat. J. Numer. Methods Fluids. 1988. V. 8. P. 869–895.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
13.05.1996