Proc. Univ. of Houston
Lattice Theory Conf..Houston 1973

Modulare Verbände von Länge $n \le 6$

Christian Herrmann

1. Einführung

Für einen Verband L wird die Länge $l(L)$ erklärt als das Supremum aller $|K|-1$ (K Kette in L) und die Breite $b(L)$ als das Supremum aller n, für die es eine Abbildung ψ des Booleschen Verbandes $\mathbf{2}^n$ in L gibt, bei der für beliebige $a,b \in \mathbf{2}^n$ $\psi a \le \psi b$ genau dann gilt, wenn $a \le b$. Ist L atomistisch und modular, so gilt $l(L)=b(L)$. Ist L modular von endlicher Länge und $b(L) \le 2$, so heiße **L** quasiplanar.

In [4] wurde für einen modularen Verband $M=(M,+,\cdot)$ endlicher Länge das Skelett $S(M)$ als die Menge der kleinsten Elemente der maximalen atomistischen Intervalle von M eingeführt. Es wurde gezeigt, daß $S(M) = \{x \mid x \in M \text{ und } x^{*+}=x\}$, wobei

$$a^* = \begin{cases} \sup\{b \mid b \succ a\} & \text{für } a<1 \\ 1 & \text{für } a=1 \end{cases} \qquad a^+ = \begin{cases} \inf\{b \mid b \prec a\} & \text{für } a>0 \\ 0 & \text{für } a=0 \end{cases}$$

($a \prec b$ bedeute stets, daß a unterer Nachbar von b ist).

$S(M)$ ist $+$Unterhalbverband von M und ein Verband $(S(M),\vee,\wedge)$ mit $x \vee y = x+y$ und $x \wedge y = (x \cdot y)^{**}$, mit kleinstem Element 0 und größtem Element 1^+. Es gilt offenbar $l(S(M))<l(M)$ und $b(S(M)) \le b(M)$. Das duale Skelett $S^\delta(M) = \{x^* \mid x \in S(M)\}$ ist zu $S(M)$ isomorph

mit dem Isomorphismus $x \longmapsto x^*$.

Gemäß dem Hauptsatz von [4] erhält man M aus den Intervallen $M_x = [x,x^*]$ zurück durch die Konstruktion der S-verklebten Summe mit $S=S(M)$.

B. JÓNSSON hat in [8] die modularen Verbände von Länge $n \leq 4$ klassifiziert. Mit dem Begriff des Skeletts läßt sich eine Klassifikation auch für größere n gewinnen:

<u>Satz 1:</u> Ist M ein modularer Verband von Länge ≤ 6 so gilt entweder

a) $S(M)$ ist quasiplanar oder

b) $S(M)$ hat einen modularen Unterverband $S_m(M)$ von Länge 3 so daß die Elemente von $S(M)-S_m(M)$ gleichzeitig Atome und Koatome von $S(M)$ sind.

Hat nun M zusätzlich Breite ≤ 3, so sind alle M_x modulare Verbände von Länge ≤ 3. Daher erhält man durch Satz 1 eine Reduktion von Einbettungsproblemen für solche Verbände - zu einer Klasse $\mathfrak{K}$ von Verbänden ein Verfahren anzugeben, das für jeden endlichen partiellen Verband entscheidet, ob er in einen Verband aus $\mathfrak{K}$ eingebettet werden kann - auf Einbettungsprobleme für modulare Verbände von Breite ≤ 2 (die nach [5] lösbar sind) bzw. von Länge ≤ 3 - hier führt die Konstruktion freier projektiver Ebenen zu einer Lösung.

Satz 2: Zu jedem $n \leq 6$ und $m \leq 3$ ist das Einbettungsproblem für die Klasse ${}_mM_s^n$ aller modularen Verbände von Länge $\leq n$ und Breite $\leq m$ lösbar.

Die Klasse ${}_mM_s^n$ ist stabil im Sinne von BAKER [2], also ist jeder Verband in der von ${}_mM_s^n$ erzeugten gleichungsdefinierten Klasse ${}_mM^n$ subdirektes Produkt von Verbänden aus ${}_mM_s^n$. Daher ist auch für ${}_mM^n$ das Einbettungsproblem lösbar. Da für gleichungsdefinierte Klassen nach EVANS [3] das Einbettungsproblem zum Wortproblem äquivalent ist, erhalten wir:

Korollar 3: Zu jedem $n \leq 6$ und $m \leq 3$ ist das Wortproblem für ${}_mM^n$ lösbar.

HUTCHINSON [7] hat jedoch bewiesen, daß das Wortproblem für eine gleichungsdefinierte Klasse modularer Verbände schon dann unlösbar ist, wenn sie den Verband aller Untermoduln eines Moduls R^I (R nichttrivialer Ring, I unendlich) enthält.

Der Vollständigkeit halber konstatieren wir noch, daß nach [6] die Klasse ${}_mM^n$ durch endlich viele Gleichungen definiert werden kann (n,m beliebig) und daß sie für $m \geq 3$, $n \geq 6$ unendlich viele obere Nachbarn im Verband der gleichungsdefinierten Klassen modularer Verbände hat - nämlich die von den Verbänden L_p^n aus Fig. 1 erzeugten.

2. Das Skelett eines modularen Verbandes von Länge ≤ 6

Wir geben zunächst einige Formeln an, die wir später zur Bestimmung von Skeletten benötigen (M sei modular von endlicher Länge):

(1) Sei $x \in S(M)$ und $a \in M$. a ist genau dann oberer Nachbar von x in $S(M)$, wenn a minimal ist bezüglich der Eigenschaft $x < a \leq x^* < a^*$.

(2) Für jedes $x \in S(M)$ gilt $\sup\{y \mid y \succ x \text{ in } S(M)\} \leq x^*$.

(3) Für jede Kette K aus $S(M)$ und jedes $x \in K$ gilt $l(K) + l([x, \sup\{y \mid y \succ x \text{ in } S(M)\}]) \leq l(M)$.

(4) Ist $S(M)$ modular, so gilt $l(S(M)) + b(S(M)) \leq l(S(M)) + b(M) \leq l(M)$.

(5) Wird M von n Elementen erzeugt und ist $S(M)$ modular, so wird $S(M)$ von $n + l(M)$ Elementen erzeugt.

Beweis zu (1): Sei a minimal bzgl. der Eigenschaft $x < a \leq x^* < a^*$. Für jedes $y \in S(M)$ mit $x < y \leq a$ gilt $x < y \leq a \leq x^* < y^*$, also wegen der Minimalität von a $y = a$; da es ein solches y gibt ($y := a^{**}$), folgt $a \in S(M)$ und $x \prec a$ in $S(M)$. Gilt umgekehrt $x \prec a$ in $S(M)$, so $a \leq x^*$ nach [4; Lemma 6.3] und $x^* \prec a^*$ in $S^\delta(M)$. Für jedes $b \in M$ mit $x < b \leq a \leq x^* < b^*$ gilt $b^* \leq a^*$ und $b^* \in S^\delta(M)$, also $b^*=a^*$ und $b \geq b^{*+}=a^{*+}=a$. Daher ist a in der gewünschten Weise minimal.

(2) folgt unmittelbar aus (1). Sei K die Kette $x_0<x_1<\ldots<x_i=x<\ldots<x_n$. Dann ergibt sich (3) aus (2) und aus $x_0<x_1<\ldots<x_i=x<x^*<x^*_{i+1}<\ldots<x^*_n$. Ist schließlich $S(M)$ modular, so wähle man $x\varepsilon S(M)$ so, daß $b(M_x)$ maximal ist, und eine maximale Kette K von $S(M)$ mit $x\varepsilon K$. Wie in (3) folgt $l(K)+b(M_x)\leq l(M)$. Nach [4; Folg. 6.7] gilt jedoch $b(M)=b(M_x)$ und wegen der Modularität $l(S(M))=l(K)$, woraus sich (4) sofort ergibt.

(5) Seien $e_1, \ldots ,e_n$ die Erzeugenden von M und $e_i\varepsilon M_{x_i}$ für $i=1,\ldots,n$. Man wähle nun eine maximale Kette K von $S(M)$ und betrachte den von $K\cup\{x_1,\ldots,x_n\}$ erzeugten Unterverband S' von $S(M)$. Wegen $l(S(M))=l(S')$ gilt $x\prec y$ in S' genau dann, wenn es in $S(M)$ gilt. Daher bilden die Verbände $M_x(x\varepsilon S')$ ein monotones S'-verklebtes System von atomistischen Unterverbänden von M und es folgt aus Korollar 5.4 sowie Lemma 7.1 in [4] , daß $M' = \{M_x|x\varepsilon S'\}$ ein Unterverband von M ist und $S(M')=S'$. Aber $e_1,\ldots,e_n\varepsilon M'$ und deshalb $M'=M$.

<u>Beweis von Satz 1.</u> Sei M ein modularer Verband von Länge ≤ 6 . $S(M)$ muß genau eine der drei folgenden Eigenschaften haben:

A: $S(M)$ modular und $b(S(M))\leq 2$

B: $S(M)$ modular und $b(S(M))\geq 3$

C: $S(M)$ nicht modular.

Der Beweis des Satzes (und weitere zur Lösung der Einbettungsprobleme wesentliche Information) ergibt sich dann aus den aus A,B,C abgeleiteten Folgerungen:

Aus A folgt:

(A1) $S(M)$ ist quasiplanar von Länge ≤ 5 und Kette, falls $l(S(M))=5$.

(A2) Hat M Breite ≥ 3, so ist $S(M)$ planar von Länge ≤ 3.

(A3) Ist M endlich erzeugt, so auch $S(M)$.

(A4) Es gibt eine berechenbare Funktion f so, daß für alle M mit n Erzeugenden $|S(M)|\leq f(n)$ gilt.

Aus B folgt:

(B1) $S(M)$ ist modularer atomistischer Verband von Länge 3.

(B2) $S(M)$ ist Unterverband von M_0 mit größtem Element $1^{+}=0^{*}$.

(B3) $l(M)=6$ und $b(M)=l(M_x)=3$ für alle $x\varepsilon S(M)$.

Die Verbände M , für die alle M_x irreduzible projektive Ebenen sind und $S(M)=M_0$, $S^{\delta}(M)=M_1$ gilt, sind gerade die Verbände von uniformen projektiven Hjelmslev-Ebenen im Sinne von ARTMANN [1] .

Aus C folgt:

(C1) $l(S(M))=3$, $S(M)$ hat einen größten modularen Unterverband $S_m(M)$, $l(S_m(M))=3$, alle $x \varepsilon I(M) := S(M)-S_m(M) \neq \emptyset$ sind zugleich Atome und Koatome von $S(M)$.

(C2) $S(M) \subsetneq M_o$, $S_m(M)$ ist Unterverband von M_o , $0^* = 1^+$ und $x \prec 0^* \prec x^*$ in M für alle $x \varepsilon I(M)$.

(C3) $l(M)=6$, $b(M)=l(M_x)=3$ für alle $x \varepsilon S_m$, $b(M_x)=2$ für alle $x \varepsilon I(M)$.

(C4) $M' = \bigcup \{M_x \mid x \varepsilon S_m(M)\}$ ist Unterverband von M und $S(M')=S_m(M)$

(C5) Jedes $a \varepsilon M-M'$ ist irreduzibel und von Rang 3; zu a gibt es genau ein $x \varepsilon I$ mit $a \varepsilon M_x$.

(C6) Für $x \varepsilon I(M)$ hat M_x die Form von Fig. 2 mit $a_i \varepsilon M-M'$.

(C7) Wird M von n Elementen erzeugt, so hat I(M) höchstens n Elemente und wird $S_m(M)$ von 2n+6 Elementen erzeugt.

Ein Beispiel für einen Verband von Typ B bzw. C findet man in Fig. 3 bzw. 4.

Nun zum Beweis von (A1) - (C7):

(A1) und (A2) folgen sofort aus (3), (A3) und (A4) aus (5) und der Tatsache, daß die Elementanzahl eines quasiplanaren Verbandes aus der Länge und der

Erzeugendenanzahl mit einer berechenbaren Funktion abgeschätzt werden kann ([5; Satz 3.1]).

Zu B. Nach (4) gilt $l(S(M))\leq 3$, also $b(S(M)) = l(S(M)) = 3$ und $S(M)$ ist atomistisch. Hieraus folgt wegen (2) $S(M)\subseteq[0,0^*]=M_o$; also gilt für jede maximale Kette $0\prec x\prec y\prec 1^+$ von $S(M)$ $1^+\leq 0^*<x^*<y^*<1^{*+} = 1$ und somit $0\prec x\prec y\prec 1^+ = 0^*\prec x^*\prec y^*\prec 1$ in M.
Man liest ab, daß $l(M)=6$, $l(M_x)=3$ für alle $x\in S(M)$ und $b(M)=3$ - nach [4; 6.7]. Daß $S(M)$ in M_o auch gegen Schnitte abgeschlossen ist, folgt aus "Platzmangel" : sind $x,y\in S(M)$ unvergleichbar, so ist $x\wedge y$ unterer Nachbar von x oder y in $S(M)$, also auch in M_o und somit $x\cdot y=x\wedge y\in S(M)$.

Zu C. Da $S(M)$ nicht modular ist, gibt es einen zu N_5 isomorphen Unterverband U von $S(M)$ - es sei $U=\{u,x,y,z,v\}$, $u<x<y<v$ und $y\wedge z=u$, $x\vee z=v$.
U läßt sich so wählen, daß jedes echte Teilintervall von $[u,v]$ (in $S(M)$) modular ist, daß für alle y',z' mit $y<y'<v$ und $z<z'<v$ gilt $y'\wedge z>u$ und $y\wedge z'>u$ und daß $x\prec y$ in $S(M)$. Es soll nun zunächst gezeigt werden, daß y und z untere Nachbarn von v in $S(M)$ sind.

Wenn y nicht unterer Nachbar von v wäre, gäbe es y' mit $y \prec y' < v$. Dann ist $y' \wedge z > u$, also $y \nleq y \wedge z$ und somit $y \vee (y' \wedge z) = y'$. Da $[u, y']$ modular ist, folgt $y' > x \vee (y' \wedge z) > y' \wedge z$, also hat man einen zu N_5 isomorphen Unterverband $\{y' \wedge z, x \vee (y' \wedge z), z, y', v\}$ in $[y' \wedge z, v]$ im Widerspruch zur Annahme über U.

Sei nun angenommen, daß z nicht unterer Nachbar von v ist. Dann gibt es z' mit $z \prec z' < v$. Es gilt $y \wedge z' > u$. Wäre $x \wedge z' > u$, so folgte aus der Modularität von $[x \wedge z', v]$, daß $x \wedge z' < y \wedge z'$, und man hätte einen zu N_5 isomorphen Unterverband $\{u, x \wedge z', y \wedge z', z, z'\}$ von $[u, z']$ im Widerspruch zur Annahme über U. Also gilt $x \wedge z' = u$. Wegen $x \prec y$ und $z \prec z'$ ergibt sich $x \vee (y \wedge z') = y$ und $z \vee (y \wedge z') = z'$, d.h. $\{u, x, y \wedge z', z, y, z', v\}$ bilden einen Unterverband von $S(M)$ wie in Fig. 5.
Seien schließlich $u_1, u_2, u_3 \in S(M)$ mit $u \prec u_1 \leq x$, $u \prec u_2 \leq y \wedge z'$ und $u \prec u_3 \leq z$ sowie $v' = u_1 \vee u_2 \vee u_3$, und sei $S' = [u, v']_{S(M)}$. Dann ist $M_x (x \in S')$ ein S'-verklebtes System, also $S' = S(M')$ mit $M' = \bigcup_{x \in S'} M_x$ nach [4; 7.1]. Wäre $l(S') \leq 2$, so würde $v = u_1 \vee u_2 \leq y$ und $v = u_2 \vee u_3 \leq z'$, also $u_1 \leq v \leq y \wedge z'$ und somit $u_1 = x \wedge y \wedge z'$ folgen. Daher gilt $l(S') \geq 3$ und man kann mit Lemma (3) schließen, daß $u = 0$ und $v' = v = 1^+$, also $S' = S(M)$ ist. Mit (1) folgt

$0<z<z'<v\leq 0^*<z^*<z'^*<v^*$ und $0<x<y<v\leq 0^*<x^*<y^*<v^*$, also wegen $l(M)\leq 6$ insbesondere $u\prec x$, $u\prec z$ und $v=0^*$. Hieraus ergibt sich durch die Modularität von M_o der Widerspruch $x\vee z=x+z<v$.

Wir haben somit in $S(M)$ einen zu N_5 isomorphen Unterverband $\{u,x,y,z,v\}$ mit $u<x<y<v$, $z\prec v$, $y\wedge z=u$ und $x\vee z=v$ erhalten. Man folgert $u^*<x^*<y^*\prec v^*$, $z^*\prec v^*$, $y^*\wedge z^*=u^*$, $x^*\vee z^*=v^*$ in $S^\delta(M)$ und mit der zu (1) dualen Aussage $v^*>y^*>x^*>u^*\geq v^{**}=v>y>x>u$. Damit muß $l(M)=6$, $u=0\prec x\prec y\prec v=1^+=0^*$ und $l(M_o)=l(M_{1^+})=3$ gelten, also $S(M)\subseteq M_o$ von Länge 3 sein.

Sei nun $I(M)$ definiert als die Menge aller $z\varepsilon S(M)$ zu denen es $x,y\varepsilon S(M)$ gibt mit $0<x<y<1^+$ und $y\wedge z=0$, $x\vee z=1^+$. Dann gilt für alle $z\varepsilon I(M)$
(*) $0\prec z$ in $S(M)$ und $z\prec {}^*\!\prec z^*$ in M .
Gäbe es nämlich $z'\varepsilon S(M)$ mit $0<z'<z$, so würde $0^*<z'^*<z^*<1$ und $0^*<x^*<y^*<1$, also y^*,z^* 1 und somit $0^*=(y\wedge z)^*=(y\cdot z)^{*+*}=(y\cdot z)^*=y^*\cdot z^*>0^*$ folgen (nach [4; 6.1 und 6.2]). Wegen $0\prec x$, hat man $x\cdot z=0$ und $x+z=x\vee z=0^*$, also auch $z\prec 0^*$ aus der Modularität von M . Aus $y^*\prec 1^*$, $y^*+z^*=1^*$, $y^*\cdot z^*=y^*\wedge z^*=0^*$ folgt ebenso $z^*\succ 0^*$.

Da nach (*) alle $z\varepsilon I$ in $S(M)$ irreduzibel sind, ist $S_m(M):=S(M)-I(M)$ ein Unterverband von $S(M)$. $S_m(M)$ ist nach der Definition von $I(M)$ der größte modulare Unterverband von $S(M)$. Aus (*) und $l(S(M))=3$ folgt ferner $l(S_m(M))=3$ und wie unter 3, daß $S_m(M)$ Unterverband von M_o ist. Damit sind zunächst (C1) und (C2) voll bewiesen.

Daß M' Unterverband von M und $S_m(M)=S(M')$ ist, ergibt sich aus [4; 5.4 und 7.1] wie im Beweis von (5). Für jede maximale Kette $0 \prec x \prec y \prec 1^+$ in $S_m(M)$ gilt $0 \prec x \prec y \prec 1^+ = 0^* \prec x^* \prec y^* \prec 1$ in M und somit $l(M_x)=3$ für jedes $x \in S_m(M)$.

Ist $x \in I(M)$, so gilt $l(M_x) \leq 2$ nach (*), insgesamt also $b(M)=3$. Sei nun $a \in M$ mit $x \prec a \prec x^*$. Ist $a=z+b$ mit $a \succ b \neq z$, so folgt $z > a^+ \in S(M)$, also $a^+=0$, $a \leq a^{+*} \leq 0^*$ und $a=0^*$. Mit dem dualen Schluß ergibt sich, daß a nur dann reduzibel in M ist, wenn $a=0^*$. Ist $a \neq 0^*$, so gehört a zu keinem M_y mit $y \neq x$: $a \notin M_o$ und $a \notin M_1$ sind schon gezeigt und aus $a \in M_y$ für ein y, das zu x unvergleichbar ist, würde $0^*=1^+=x \vee y \leq a$, also $a=0^*$ folgen. Umgekehrt muß aber auch jedes $a \in M-M'$ zu einem M_x mit $x \in I(M)$ gehören, und $a \nparallel x, x^* \in M_o \cup M_1$ sein. Damit sind auch (C3) - (C6) nachgewiesen und es bleibt (C7) zu zeigen.

Dazu sei M von der n-elementigen Menge E erzeugt. Für $z \in I(M)$ sei $E_z=\{a \mid a \in M, z\ a \neq 0^*\}$. Wegen $E_z \subseteq E$, $|E_z| \geq 1$ und $E_z \cap E_{z'} = \emptyset$ für $z \neq z'$ folgt, daß $I(M)$

höchstens n Elemente hat. Ist $a \in E_z$, so zieht für jedes $b \in M$ $b \leq a$ schon $b+a=b+z^*$ und $b \geq a$ schon $b \cdot a = b \cdot z$ nach sich. Daher ist $E' = E \cap M' \cup I(M) \cup \{z^* \mid z \in I(M)\}$ eine Erzeugendenmenge von M'. Da $|E'| \leq 2n$ gilt, wird $S_m(M)$ nach (5) von $2n+6$ Elementen erzeugt.

<u>Satz 4</u>: Jeder nach A,B und C mögliche Verband tritt als Skelett eines modularen Verbandes von Länge ≤ 6 auf.

<u>Beweis</u>: Für den Fall A entnimmt man dies unschwer aus der Charakterisierung der quasiplanaren Verbände von Länge ≤ 4 in JONSSON [8]. Sei nun S ein beliebiger atomistischer modularer Verband von Länge 3. Wir setzen $M_x = \{x\} \times S$ für $x = 0,1 \in S$ und $M_x = \{x\} \times S^\delta$ $x \in S$ sonst, wobei S^δ den zu S dualen Verband bezeichne. Für jedes Paar x,y aus S mit $x \prec y$ sei ein Isomorphismus ψ_{yx} gegeben so, daß

$\psi_{yo}: [(0,y),(0,1)]_{M_o} \longrightarrow [(y,1),(y,y)]_{M_y}$ mit

$\qquad \psi_{oy}(0,z) = (y,z)$ für alle $z \succ y$

$\psi_{yx}: [(x,y),(x,0)]_{M_x} \longrightarrow [(y,1),(y,x)]_{M_y}$ mit

$\qquad \psi_{yx}(x,x) = (y,y)$

$\psi_{1x}: [(x,x),(x,0)]_{M_x} \longrightarrow [(1,0),(1,x)]_{M_1}$ mit

$\qquad \psi_{1x}(z,x) = (1,z)$ für alle z x

Für $0 = x_1 \wedge x_2 \prec x_1, x_2 \prec y = x_1 \vee x_2$ und $a \in M_o$ ist $\psi_{yx_i} \circ \psi_{x_i o}(a)$ genau dann definiert, wenn $a=(0,y)$ bzw. $(0,1)$, und

hat dann den Wert $(y,1)$ bzw. (y,y) .
Ebenso ist für $x=y_1 \wedge y_2 \prec y_1, y_2 \prec y = y_1 \vee y_2$ und $a \varepsilon M_x$ $\psi_{yy_i} \bullet \psi_{y_i x}(a)$ genau dann erklärt, wenn $a=(x,x)$ bzw. $(x,0)$, und zwar mit dem Wert $(1,0)$ bzw. $(1,x)$. Daher liegt eine lokal S-verbundene Summe im Sinne von [4; Satz 4.3] vor und man erhält einen modularen Verband M mit $S(M)=S$ (nach [4; 7.1]).

Ist schließlich S ein unter C als Skelett zugelassener Verband, so kann man stets einen modularen atomistischen Verband T finden so, daß $S \subseteq T$, der größte modulare Unterverband S_m von S Unterverband von T ist und für alle $z \varepsilon S - S_m$ $z \prec 1_T$ gilt und $x \leq z$ für $x \varepsilon S_m$ schon $x=0$ impliziert.
Nach Fall B können wir annehmen, daß $T=S(L)$ ist für einen Verband vom Typ B. Für jedes $x \varepsilon S - S_m$ sei eine Menge $J_x \neq \emptyset$ mit $J_x \cap L' = \emptyset$ und $J_x \cap J_y = \emptyset$ für $x \neq y$ gegeben. Wählt man $M_x = L_x$ für $x \varepsilon S_m$ und M_x als den Verband mit kleinstem Element x, größtem Element x^* und Atommenge $\{0^*\} \cup J_x$ für $x \varepsilon S - S_m$, so erhält man ein monoton S-verklebtes System im Sinne von [4]. Die S-verklebte Summe M ist dann ein Verband vom Typ C mit $S=S(M)$ und $S_m(M) = S_m$.

3. Zum Einbettungsproblem

Unter einem schwachen <u>partiellen Verband</u> verstehen wir eine Menge L mit partiellen Operationen + und $\cdot$, auf der es eine Halbordnung $\leq$ gibt so, daß gilt: Ist $a+b=c$, so $c=\sup(a,b)$; ist $a\cdot b=c$, so $c=\inf(a,b)$. Dann gibt es auch eine kleinste solche Halbordnung (und diese werden wir stets benutzen). Jeder partielle Verband ist in einen Verband (schwach) einbettbar, nämlich in seinen Idealverband. Umgekehrt ist jede partielle algebraische Struktur $(L,+,\cdot)$, die in einen partiellen Verband (schwach) einbettbar ist, selbst ein solcher. Es liegt auf der Hand, daß es ein Verfahren gibt, um für jedes endliche $(L,+,\cdot)$ zu entscheiden, ob es ein partieller Verband ist, aber auch ob es in einen (modularen) Verband von Länge 1 bzw. 2 eingebettet werden kann.

<u>Lemma 5</u>. Es gibt ein Verfahren, um für jeden endlichen partiellen Verband L und gegebene Elemente $a\varepsilon L$ und Zahlen r_a zu entscheiden, ob L in einen modularen Verband M der Länge 3 eingebettet werden kann, so daß a in M den Rang r_a hat.

<u>Beweis</u>. Ist L in ein M einbettbar, so besteht L aus zwei disjunkten Teilmengen P und G und gegebenenfalls noch den Elementen 0 und 1 derart, daß $(P,G,<)$ eine Inzidenzstruktur ist (d.h. daß

die Elemente aus P bzw. G jeweils untereinander unvergleichbar sind und es zu $a \neq b \in P$ höchstens ein $c \in G$ gibt mit $a,b<c$ und zu $a \neq b \in G$ höchstens ein $c \in P$ gibt mit $c<a,b$) und daß für $a \neq b \in P$ bzw. $c \neq d \in G$ gilt: ist $a+b$ bzw. $c \cdot d$ in L erklärt, so $a+b \in G$ bzw. $c \cdot d \in P$. Man wähle einfach P als die Menge aller Atome von M , die zu L gehören, und G als die Menge aller in L enthaltenen Koatome von M .

Sei umgekehrt zu einem partiellen Verband L eine Inzidenzstruktur der beschriebenen Art gegeben. Dann ist diese Unterstruktur einer projektiven Ebene $(P',G',<')$ - z.B. der von ihr erzeugten freien projektiven Ebene (s.G.PICKERT [9]) - d.h. insbesondere, daß $P \subseteq P'$, $G \subseteq G'$ und für $a \in P$ und $b \in G$ $a<'b$ genau dann gilt, wenn $a<b$. Durch Hinzunahme von größtem und kleinstem Element entsteht aus $(P' \cup G', \leq')$ ein modularer Verband M , in den $(L,\leq)$ eingebettet ist. Sind a und b aus L unvergleichbar und $a+b=c \in L$ definiert, so gilt $c=\sup_M(a,b)$: sind $a,b \in P$, so $c \in G \subseteq G'$, also $c=\sup_M(a,b)$; ist $a \in P$ $b \in G$ und $a \nless b$, so $c=1=\sup_M(a,b)$; sind $a,b \in G$, so ebenfalls $c=1=\sup_M(a,b)$. Mit der dualen Aussage hinsichtlich "$\cdot$" folgt, daß der partielle Verband $(L,+,\cdot)$ in den Verband M eingebettet ist.

Die folgenden Lemmata geben nun Voraussetzungen an, unter denen "lokale" Einbettungen zu "globalen" zusammengesetzt werden können. Dazu eine Definition: Eine Teilmenge X eines partiellen Verbandes $L=(L,+,\cdot)$ heiße $+$Teilbund von L, falls $a+b$ für alle $a,b\in X$ definiert ist und $a+b\in X$. X mit der eingeschränkten Operation $\vee=+|X$ wird dann ein Supremum-Halbverband und im Falle endlicher Länge auf kanonische Weise ein Verband $(X,\vee,\wedge)$.

Lemma 6. Sei $L=(L,+,\cdot)$ ein abzählbarer partieller Verband, S ein $+$Teilbund von L, $\bar{S}$ ein $\cdot$Teilbund von L, S und $\bar{S}$ modulare Verbände endlicher Länge, S isomorph zu $\bar{S}$ mit einem Isomorphismus $x\longmapsto\bar{x}$ so, daß $x<\bar{x}$ und aus $x\prec y$ in S $y\leq\bar{x}$ folgt.
Sei L die Vereinigung aller Intervalle $[x,\bar{x}]_L$ $(x\in S)$.
Sei für jedes $x\in S$ $[x,\bar{x}]_L$ eingebettet in einen modularen Verband M_x von Länge ≤ 3 so, daß x das kleinste und $\bar{x}$ das größte Element von M_x ist und für alle $x\prec y$ in S gilt $l([y,\bar{x}]_{M_x}) = l([y,\bar{x}]_{M_y})$.
Sei $A\supseteq S$ ein $+$Teilbund und $B\supseteq\bar{S}$ ein $\cdot$Teilbund von L. Dann ist der partielle Verband $(L,+|A,\cdot|B)$ einbettbar in einen modularen Verband M mit $b(M)\leq 3$, $S(M)\cong S$ und (wenn K eine beliebige maximale Kette von S ist) $l(M)=$

$$\sum_{x\in K} l(M_x) - \sum_{x\prec y \text{ in } K} l([y,\bar{x}]_{M_x}) .$$

Beweis. Wir können annehmen, daß alle die $M_x (x \varepsilon S)$, die Länge 3 haben, abzählbare projektive Ebenen sind. Daher sind für alle $x \prec y$ aus S die Intervalle $[y,\bar{x}]_{M_x}$ und $[y,\bar{x}]_{M_y}$ entweder beide einelementig, oder beide zweielementig oder aber beide abzählbare Verbände von Länge 2 . Also gibt es einen Isomorphismus ψ_{yx} von $[y,\bar{x}]_{M_x}$ auf $[y,\bar{x}]_{M_y}$, der die Elemente von L fest läßt. Die Verbände $M_x (x \varepsilon S)$ mit den Abbildungen $\psi_{yx} (x,y \varepsilon S, x \prec y)$ bilden ein lokal-S-verbundenes System im Sinne von [4; Abschnitt 4] :

Sei $x \wedge y \prec x, y \prec x \vee y$ in S , $a \varepsilon M_{x \wedge y}, \psi_{x(x \wedge y)}\, a$ und $\psi_{y(x \wedge y)} a$ definiert. Dann gilt $x, y \leq a \leq \overline{x \wedge y}$, also $x \wedge y < x < x \vee y \leq a \leq \overline{x \wedge y}$, also $a = x \vee y$ oder $a = \overline{x \wedge y}$; in jedem Falle ist aber $a \varepsilon L$, also $\psi_{x(x \wedge y)}\, a = \psi_{y(x \wedge y)}\, a = a$; wegen $x \vee y \leq a \leq \bar{x}, \bar{y}$ sind auch $\psi_{(x \vee y)x}\, a = \psi_{(x \vee y)y}\, a = a$ definiert.

Sei nun M die lokal-S-verbundene Summe des Systems mit den kanonischen Einbettungen $\pi_x : M_x \longrightarrow M$. Da alle M_x modular von Breite ≤ 3 sind, ist auch M modular von Breite ≤ 3 [4; 3.2 und 3.3] und es liegt die Aussage über die Länge auf der Hand. $S(M) \cong S$ folgt nach [4; 7.1], da alle M_x atomistisch sind und die Verklebung monoton ist.
Da für alle $a \varepsilon L$ $\pi_x\, a = \pi_y\, \psi_{yx}\, a$ gilt, ist $\psi = \bigcup \{\pi_x | x \varepsilon S\} | L$ eine injektive Abbildung von L in M . Zum Nachweis, daß ψ mit den partiellen

Operationen $+|A$ und $\cdot|B$ verträglich ist, zeigen wir:

a) $\psi(x) \leq \psi(y)$ für alle $x \leq y$ in S

b) $\psi(x \vee y) = \psi x + \psi y$ für alle $x, y \varepsilon S$

c) $\psi(a+y) = \psi a + \psi y$ für $a \varepsilon A$, x, $y \varepsilon S$ und $x \leq a \leq \bar{x}, x \leq y$

d) $\psi(a+b) = \psi a + b$ für alle $a, b \varepsilon A$

Dabei benutzen wir, daß $\psi|[x,\bar{x}]$ nach Konstruktion ein Homomorphismus ist. Der Beweis ist im wesentlichen derselbe wie bei Satz 5.1-5.2 in [4], es müssen jedoch alle Voraussetzungen des Lemmas ausgenützt werden.

Zu a) Ist $x \prec y$ in S, so gilt $y \leq \bar{x}$, also $\psi x \leq \psi y$. Die Aussage für $x < y$ folgt nun durch Induktion.

Zu b) Gilt $x \wedge y \prec x, y \prec x \vee y$ in S, so folgt $x, y \leq \overline{x \wedge y}$, also $x \vee y \leq \overline{x \wedge y}$ und somit b) in diesem Fall. Die Behauptung ergibt sich nun mit Hilfe der Modularität durch Induktion über die Länge von $[x \wedge y, x \vee y]$ in S .

Zu c) Für $x = y$ folgt wegen $x \leq a \leq \bar{x}$ sofort $\psi(a+y) = \psi a + \psi y$. Für $x < y$ schließt man induktiv: es gibt $z \varepsilon S$ mit $x \leq z \prec y$ und es gilt $\psi(a+y) = \psi(a+z+y) = \psi(a+z) + \psi y = \psi a + \psi z + \psi y = \psi a + \psi y$, da $a+z$ definiert ist, $a \leq \bar{x} \leq \bar{z}$ und somit $a+z, y \varepsilon [z, \bar{z}]$.

Zu d) Ist $a \varepsilon [x,\bar{x}]$, $b \varepsilon [y,\bar{y}]$, so gilt $x \vee y = x + y \leq a + b \leq \bar{x} + \bar{y} \leq \overline{x \vee y}$ und somit

$$\psi(a+b) = \psi(a+b+x+y) = \psi(a+x+y) + \psi(b+x+y)$$
$$= \psi(a) + \psi(x+y) + \psi(b) = \psi(a) + \psi(x) + \psi(y) + \psi(b) = \psi(a) + \psi(b).$$

Lemma 7. Sei $L=(L,+,\cdot)$ ein endlicher partieller Verband, seien $S,\bar{S}\subseteq L$ mit $l(S)=l(\bar{S})=3$, $x\longmapsto\bar{x}$ ein Isomorphismus von $(S,+|S,\cdot|S)$ auf $(\bar{S},+|\bar{S},\cdot|\bar{S})$ mit $x<\bar{x}$. Sei u kleinstes und v größtes Element von S und $v=\bar{u}$. Sei $L=\bigcup\{[x,\bar{x}]_L|x\varepsilon S\}$. Für jedes $x\varepsilon S$ sei $[x,\bar{x}]_L$ eingebettet in einen modularen Verband von Länge 3 so, daß x das kleinste und $\bar{x}$ das größte Element von M_x ist. Maximale Ketten in $S(\bar{S})$ seien maximal in $M_u(M_v)$ und es gelte für alle $x\prec y$ aus S, daß $l([y,\bar{x}]_{M_x}) = l([y,\bar{x}]_{M_y}) = 2$ ist. Sei A ein +Teilbund von L so, daß gilt: zu $a\varepsilon A$ gibt es $x\varepsilon S\cap A$ mit $x\leq a\leq\bar{x}$; sind $x<y$ in $A\cap S$, so gibt es eine maximale Kette $x\prec x_1\prec\ldots\prec x_k=y$ in S mit $x_i\varepsilon A$ für $i=1,\ldots k$. Sei B ein $\cdot$Teilbund mit den entsprechenden Eigenschaften hinsichtlich $\bar{S}$.
$S(\bar{S})$ seien abgeschlossene Teilmengen des mit der Relativstruktur in $M_u(M_v)$ versehenen partiellen Verbandes $(A\cup B)\cap M_u$ $((A\cup B)\cap M_v)$. Dann ist der partielle Verband $(A\cup B,+|A,\cdot|B)$ einbettbar in einen modularen Verband der Länge 6 und Breite 3 mit atomistischem Skelett von Länge 3.

Beweis. M_u kann man insbesondere so wählen, daß das Erzeugnis von $[u,\bar{u}]_{A\cup B}$ die freie projektive Ebene über der Inzidenzstruktur von $[u,\bar{u}]_{A\cup B}$ ist. Dann ist auch das Erzeugnis $\langle S\rangle$ von S in M_u freie projektive Ebene über der Inzidenzstruktur von S.

Wählt man M_v analog, so ist das Erzeugnis $\langle\bar{S}\rangle$ von $\bar{S}$ in M_v isomorph zu $\langle S\rangle$ mit einem Isomorphismus der "$-$" fortsetzt.
Sei L' der partielle Verband $A \cup B \cup M_u \cup M_v$.
Dann gilt für alle $x \succ u$ aus $\langle S\rangle$, daß
$[x,\bar{x}]_{L'} = [x,\bar{x}]_{A\cup B} \cup [x,v]_{M_u}$ ist - auch als partielle Verbände. Somit ist $[x,\bar{x}]_{L'}$ in einen modularen Verband der Länge 3 einbettbar so, daß x das kleinste und $\bar{x}$ das größte Element von M_x ist. Entsprechendes gilt für $y \prec v$ und es können alle $M_x (x \in \langle S\rangle)$ als abzählbare projektive Ebenen gewählt werden. Nach Lemma 6 erhält man eine lokal-$\langle S\rangle$-verklebte Summe M und eine injektive Abbildung ψ von L' in M, die auf $(A \cup B, +|A, \cdot|B)$ ein Homomorphismus ist. Es gilt $l(M)=6$, $b(M)=3$ und $S(M) \cong \langle S\rangle$.

Lemma 8. Sei L ein endlicher partieller Verband, seien $S, \bar{S} \subseteq L$ und $x \longmapsto \bar{x}$ ein Isomorphismus von S auf $\bar{S}$ mit $x<\bar{x}$. S habe ein kleinstes Element u und ein größtes Element v und es sei $\bar{u}=v$. Sei ferner $I \subseteq S$ und $\emptyset \neq J \subseteq L-(S \cup \bar{S})$ so, daß gilt:
$L-J = \bigcup\{[x,\bar{x}]_L \mid x \in S-I\}$; der partielle Verband $L-J$ ist in einen modularen Verband M' von Länge 6 und Breite 3 mit modularem Skelett $S(M') \supseteq S-I$ einbettbar, wobei $z \prec v \prec \bar{z}$ in M' für alle $z \in I$; jedes $a \in J$ ist irreduzibel in L und es gibt genau ein

$z \in I$; mit $z \prec a \prec \bar{z}$ in L . Dann kann L in einen modularen Verband M von Länge 6 und Breite 3 mit nichtmodularem Skelett eingebettet werden.

Beweis. M' kann insbesondere wie im Beweis von Lemma 7 konstruiert werden. Sei S_m der von $S-I$ in M_o' erzeugte Unterverband. Nach Voraussetzung gilt $L-J \subseteq \bigcup\{[x,x^*] \mid x \in S_m\}$ und, da die projektive Ebene M_o' frei erzeugt ist, für alle $x \in S_m$ und $z \in I$, daß aus $x \leq z$ schon $x=0$ folgt. Bestimmt man nun M wie im Beweis von Satz 4 mit $J_z=\{a \mid a \in J \text{ und } a \succ z\}$ für $z \in I$, so ist der partielle Verband L in M eingebettet.

Beweis von Satz 2. Vermöge Lemma 5 ist für jeden endlichen partiellen Verband entscheidbar, ob er die Voraussetzungen von Lemma 6 bzw. 7 erfüllt. Daher erhalten wir eine Lösung des Einbettungsproblems für Verbände vom Typ B oder A von Breite ≤ 3, indem wir eine berechenbare Funktion g angeben, derart, daß jeder partielle Verband P, der in einen solchen Verband M einbettbar ist, so in einen partiellen Verband L mit $|L| \leq g(|P|)$ und ausgezeichneten Teilmengen $S, \bar{S}, A, B$ und ggf. K eingebettet werden kann, daß die Voraussetzungen von Lemma 6 bzw. 7 erfüllt sind und, wenn $a+b$ in P definiert ist a und b zu A, wenn $a \cdot b$ in P definiert ist, a und b zu B gehören.

Diese Funktion ist:

$$g(k)=\max\{2^{(k+2f(k))}, 3\cdot 2^{(2k+2(k+2)^2)+1}\},$$

wobei f die nach (A4) existierende berechenbare Funktion ist, für die $|S(M)|\leq f(|P|)$ gilt, falls M vom Typ A ist und von P erzeugt wird - was wir selbstverständlich hier voraussetzen können.

Ist nun M vom Typ A, so setzen wir $P'=P\cup S(M)\cup S^{\delta}(M)$ und es sei A der von P' in M erzeugte +Teilbund, B der von P' in M erzeugte $\cdot$Teilbund, $L=A\cup B$ mit der Relativstruktur in M, $S=S(M)$, $\bar{S}=S^{\delta}(M)$ und K eine beliebige maximale Kette in $S(M)$.

Ist M jedoch vom Typ B, so wähle man $S_o\subseteq S(M)$ so, daß $P=\bigcup\{[x,x^*]_P \mid x\in S_o\}$ und $|S_o|\leq|P|$.
Aus S_o erhält man $S_1\subseteq S(M)$ so, daß aus $x\prec y$ in S_o $x\prec y$ in M_o folgt, durch Hinzunahme von höchstens $2\cdot(|S_o|+2)^2$ Elementen von $S(M)$. Sei A der von $P\cup S_1$ erzeugte +Teilbund von M, B der von $P\cup(S_1)^*$ erzeugte $\cdot$Teilbund von M. Sei $L'=A\cup B$ und S_2 so gewählt, daß $S_1\subseteq S_2\subseteq S(M)$; $|S_2|\leq|L'|$ und $L'\subseteq\bigcup\{[x,x^*]_{L'}\mid x\in S_2\}$. Sei schließlich $L=L'\cup S_2\cup S_2{}^*$, $S=\langle S_2\rangle_{L'\cap M_o}\cup(\langle S_2^*\rangle_{L^+\cap M_{o^*}})^+$ und $\bar{S}=S^*$.

Insbesondere ist also für einen endlichen partiellen Verband L entscheidbar, ob er die Voraussetzungen von Lemma 8 erfüllt und wir können die Lösung

des Einbettungsproblems für Verbände vom Typ C hierauf zurückführen, da jeder in einen solchen Verband einbettbare partielle Verband P in ein L mit höchstens $3|P|+4$ Elementen eingebettet werden kann.
Es sei bemerkt, daß alle hier verwendeten Algorithmen in den Bereich der primitiv rekursiven Funktionen gehören.

4. Abschließende Bemerkungen.

Bei dem Versuch, die hier entwickelten Methoden für die Lösung von Einbettungsproblemen für weitere Klassen modularer Verbände endlicher Länge nutzbar zu machen, stellen sich folgende Probleme:

Problem 1. Ist das Einbettungsproblem für projektive Geometrien von fester Dimension n lösbar?

Problem 2. Ist das Skelett eines endlich erzeugten modularen Verbandes stets endlich erzeugt?

Problem 3. Ist das Einbettungsproblem für die Klasse aller Skelette von modularen Verbänden fester Länge n lösbar?

Unschwer lassen sich jedoch die folgenden kleinen Ergebnisse herleiten:

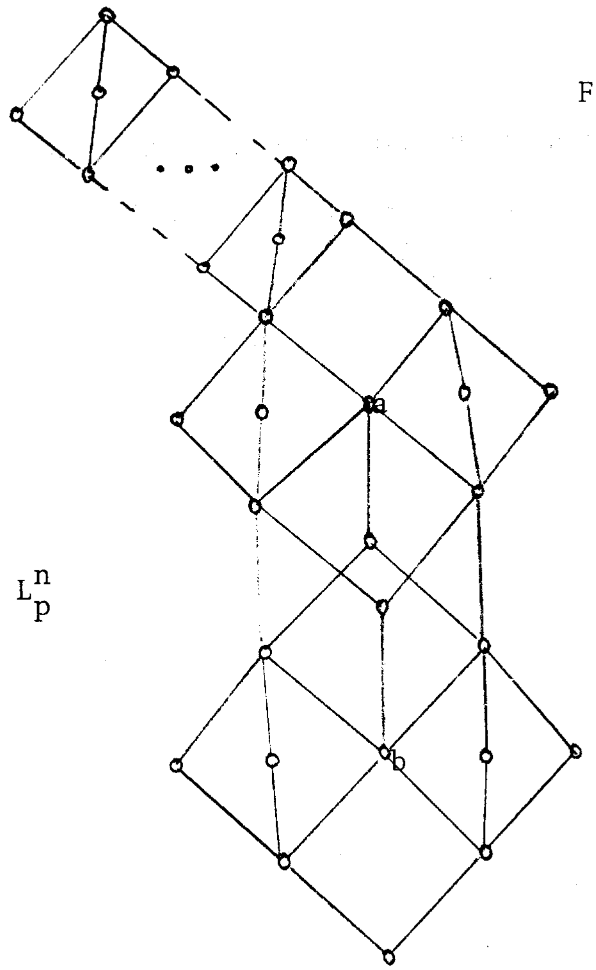
(I) Das Einbettungsproblem für pappus'sche projektive Geometrien fester Dimension n ist lösbar: Ist P in den Untervektorraumverband von K^{n+1} - K kommutativer Körper - eingebettet und P endlich, so kann K immer schon als endliche Erweiterung seines Primkörpers gewählt werden. Daher kann man die einbettbaren P aufzählen, andererseits aber, da die Klasse der pappus'schen projektiven Geometrien von Dimension n endlich axiomatisierbar ist, ist auch die Menge der nicht einbettbaren P aufzählbar.

(II) Im Beweis von Satz 2 ist insbesondere enthalten, daß das Einbettungsproblem für modulare Verbände von Breite ≤ 3 mit endlichem Skelett lösbar ist.

(III) Kombiniert man die Methoden von (I) und (II) so erhält man eine Lösung des Einbettungsproblems für pappus'sche Verbände mit endlichem Skelett; dabei ist ein pappus'scher Verband M ein modularer Verband endlicher Länge so, daß M_x pappus'sche (möglicherweise reduzible) projektive Geometrie ist für jedes $x \varepsilon S(M)$.

(IV) Wie im Falle von Verbänden vom Typ B erhält man eine Lösung des Einbettungsproblems für "projektive Hjelmslevebenen n-ter Stufe", d,h, für folgende induktiv definierte Klassen $\mathfrak{P}_n$ von Verbänden: $\mathfrak{P}_o$ bestehe nur aus dem einelementigen Verband; $M \varepsilon \mathfrak{P}_{n+1}$ genau dann, wenn $S(M) \varepsilon \mathfrak{P}_n$, M_x projektive Ebene ist für jedes $x \varepsilon S(M)$ und $S(M)$ und $S^{\delta}(M)$ Intervalle in M sind.

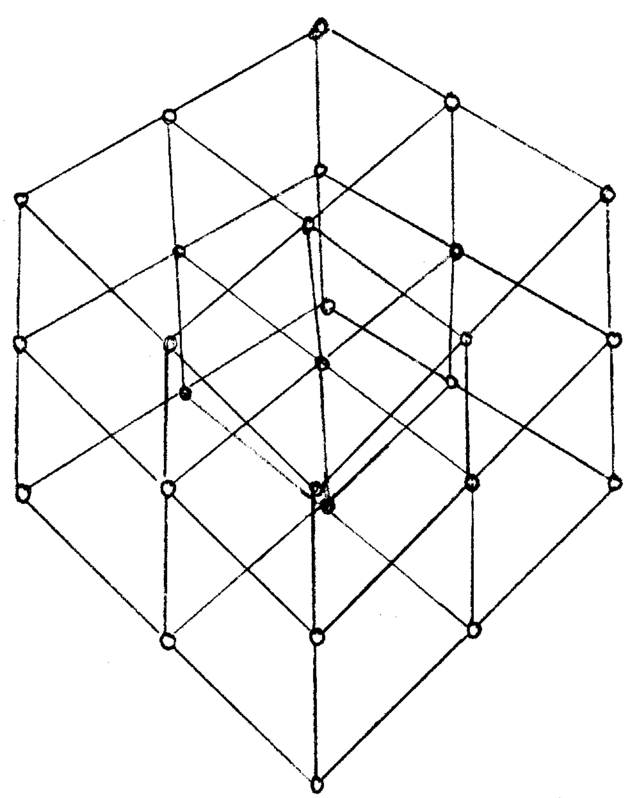
Fig.1



L_p^n

Länge n+1
[a,b] projektive
Ebene über GF(p)

Fig. 3



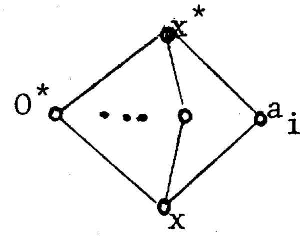


Fig.2

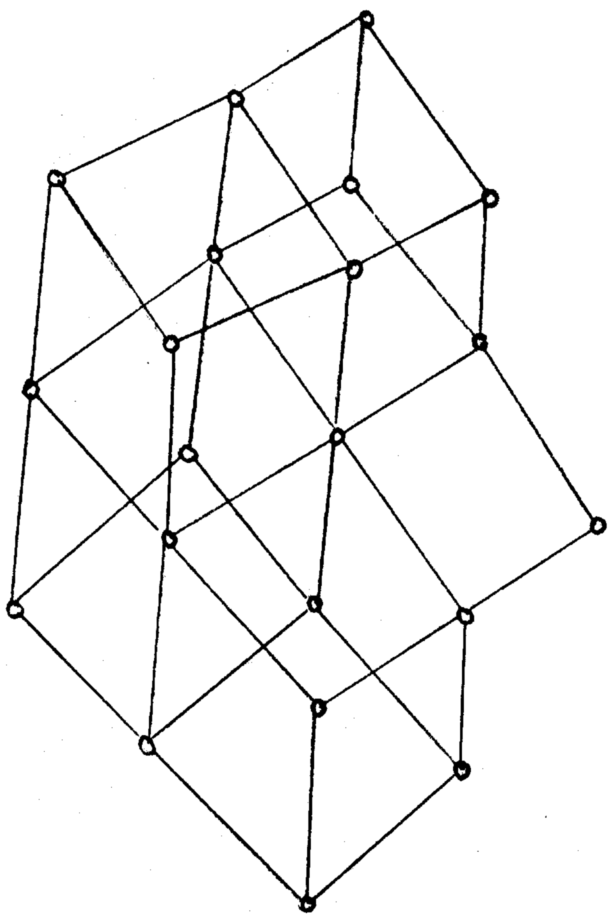


Fig.4

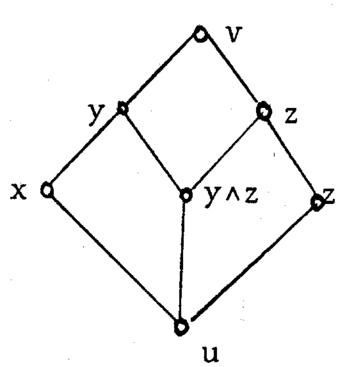


Fig.5

Literatur

[1] B. Artmann, Uniforme Hjelmslev-Ebenen und modulare Verbände, Math.Z. 111 (1969), 15-45.

[2] K. Baker, Equational classes of modular lattices, Pacific J. Math. 28 (1969), 9-15.

[3] T. Evans, Embeddability and the word problem, J.London Math.Soc. 28 (1953), 76-8o.

[4] C. Herrmann, S-verklebte Summen von Verbänden, Math.Z.

[5] C. Herrmann, Quasiplanare Verbände, Arch.d.Math.

[6] C. Herrmann, Weak (projective) radius and finite equational bases in classes of lattices, einger. bei Algebra Universalis.

[7] G. Hutchinson, Recursively unsolvable word problems of modular lattices and diagram-chasing.

[8] B. Jónsson, Arguesian lattices of dimension $n \leq 4$, Math.Scand. 7 (1959), 133-145.

[9] G. Pickert, Projektive Ebenen, Berlin 1955.

Anschrift des Verfassers:

Christian Herrmann

Fachbereich Mathematik der Technischen Hochschule

Arbeitsgruppe Allgemeine Algebra

61 Darmstadt

Hochschulstr.1