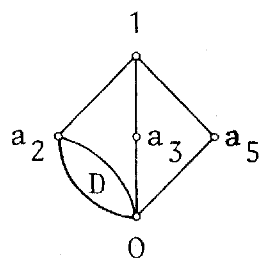
Proc. Univ. of Houston
Lattice Theory Conf..Houston 1973

Freie modulare Verbände $FM({}_DM_3)$

von Aleit Mitschke und Rudolf Wille

In der vorliegenden Note werden modulare Verbände $FM({}_DM_3)$ untersucht, die bis auf Isomorphie dadurch definiert sind, daß sie in der Klasse aller modularen Verbände von einem partiellen Verband ${}_DM_3$ frei erzeugt werden; die partiellen Verbände ${}_DM_3$ sind dabei folgendermaßen definiert:
Ist M_3 ein fünfelementiger Verband der Länge 2 mit kleinstem Element 0, Atomen a_2, a_3, a_5 sowie größtem Element 1 und ist D ein beschränkter, distributiver Verband mit kleinstem Element 0 und größtem Element a_2, dann ist ${}_DM_3$ der partielle Verband, der D und M_3 als Unterverbände besitzt so, daß $D \cup M_3 = {}_DM_3$ und $D \cap M_3 = \{0, a_2\}$ gilt und daß $d \vee a_3$ bzw. $d \vee a_5$ mit $d \in D$ nur für $d \in D \cap M_3$ existiert.

${}_DM_3$:



Für alle Begriffe, die in dieser Note nicht erklärt werden, sei auf GRÄTZER [1] verwiesen.

Da nicht distributive, modulare Verbände stets Unterverbände enthalten, die zu M_3 isomorph sind, treten in jedem nicht distributiven, modularen Verband partielle Verbände ${}_DM_3$ als relative Unterverbände auf, wobei häufig die Kenntnis der von solchen relativen Unterverbänden erzeugten Unterverbände wesentliche Einblicke in die Struktur des Verbandes gibt. Aus dieser Tatsache erhält der folgende Satz seine Bedeutung für die Untersuchung nicht distributiver, modularer Verbände.

<u>Satz:</u> M sei ein modularer Verband und ${}_DM_3$ ein relativer Unterverband von M . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) M wird erzeugt von ${}_DM_3$.

(2) M ist isomorph zu $FM({}_DM_3)$.

(3) M ist isomorph zu der subdirekten Potenz von M_3 , die aus allen quasi-eigentlichen, stetigen Abbildungen von dem Stoneschen Raum $\mathcal{S}(D)$ in den T_0-Raum M_3 mit der Subbasis $\{[a) | a \in M_3\}$ besteht; dabei heißt eine Abbildung zwischen topologischen Räumen quasi-eigentlich, wenn das Urbild jeder quasi-kompakten, offenen Menge wieder quasi-kompakt ist (s.HOFFMANN&KEIMEL [2; Definition 1.7]).

Der Beweis des Satzes wird durch drei Hilfssätze vorbereitet. Mit einer in WILLE [6] entwickelten Methode wird in Hilfssatz 1 gezeigt, daß $FM({}_DM_3)$ zu einer subdirekten Potenz von M_3 isomorph ist. In Hilfssatz 2 werden Normalformen für die Elemente von $FM({}_DM_3)$ angegeben, an denen sich ablesen läßt, daß die in SCHMIDT [5; Lemma 17.1] konstruierten modularen Verbände M isomorph zu den $FM({}_DM_3)$ sind. Hilfssatz 3 beschreibt dann die Isomorphie der Kongruenzrelationenverbände von D und $FM({}_DM_3)$, die auch schon in SCHMIDT [5] gezeigt ist.

Hilfssatz 1: M sei ein modularer Verband, der von einem relativen Unterverband ${}_DM_3$ erzeugt wird. Dann ist M isomorph zu einer subdirekten Potenz von M_3.

Beweis: Die Behauptung soll zunächst unter der Voraussetzung bewiesen werden, daß D ein endlicher, distributiver Verband ist. In diesem Fall kann folgendes Lemma aus WILLE [6] angewandt werden.

M_3-Lemma: S sei ein subdirekt irreduzibler, modularer Verband, der von der endlichen Menge $E_0 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_5 \cup E_1$ erzeugt wird ($E_2, E_3, E_5 \neq \emptyset$); sei ferner $\bar{e}_i := \sup \bigcup (E_j \mid i \text{ teilt } j)$ und $\underline{e}_i := \inf \bigcup (E_j \mid j \text{ teilt } i)$ für $i \in \{2,3,5\}$. Ist $S \neq M_3$ dann gilt:

$$(\bar{e}_2 \wedge \bar{e}_3) \vee (\bar{e}_2 \wedge \bar{e}_5) \vee (\bar{e}_3 \wedge \bar{e}_5) \geq (\underline{e}_2 \vee \underline{e}_3) \wedge (\underline{e}_2 \vee \underline{e}_5) \wedge (\underline{e}_3 \vee \underline{e}_5)$$

Da M isomorph ist zu einem subdirekten Produkt subdirekt irreduzibler Verbände, die von einem homomorphen Bild von ${}_DM_3$ erzeugt werden, ist zu zeigen, daß ein subdirekt irreduzibler, modularer Verband S, der von einem homomorphen Bild $\psi({}_DM_3)$ erzeugt wird und nicht zu M_3 isomorph ist, einelementig sein muß. $|S|=1$ erhält man offenbar, wenn man für alle $c,d\in D$, für die c oberer Nachbar von d ist, $\psi c=\psi d$ nachweist, da dann $\psi 0=\psi a_2$ und damit $\psi 0=\psi 1$ folgt.

Ist c oberer Nachbar von d in D, dann existiert ein $\vee$-irreduzibles Element $\underline{c}$ in D mit $c=\underline{c}\vee d$; ferner gibt es wegen der Distributivität ein größtes Element $\bar{d}$ in D, das nicht größer oder gleich $\underline{c}$ ist. Für $E_0:=\psi(\bar{d}]$, $E_2:=\psi[\underline{c})$, $E_3:=\{\psi a_3\}$, $E_5:=\{\psi a_5\}$ und $E_1=\emptyset$ liefert nun das M_3-Lemma die Ungleichung

$$(\psi a_2\wedge(\psi\bar{d}\vee\psi a_3))\vee(\psi a_2\wedge(\psi\bar{d}\vee\psi a_5))\vee((\psi\bar{d}\vee\psi a_3)\wedge(\psi\bar{d}\vee\psi a_5)) \geq$$
$$(\psi\underline{c}\vee\psi a_3)\wedge(\psi\underline{c}\vee\psi a_5)\wedge(\psi a_3\vee\psi a_5) =$$
$$(\psi\underline{c}\vee\psi a_3)\wedge(\psi\underline{c}\vee\psi a_5) .$$

Da wegen der Modularität von S die linke Seite der Ungleichung gleich

$$(\psi\bar{d}\vee(\psi a_2\wedge\psi a_3))\vee(\psi\bar{d}\vee(\psi a_2\wedge\psi a_5))\vee((\psi\bar{d}\vee\psi a_3)\wedge(\psi\bar{d}\vee\psi a_5))$$
$$= \psi\bar{d}\vee((\psi\bar{d}\vee\psi a_3)\wedge(\psi\bar{d}\vee\psi a_5)) = (\psi\bar{d}\vee\psi a_3)\wedge(\psi\bar{d}\vee\psi a_5)$$ ist, folgt
$$\psi\bar{d}=\psi a_2\wedge(\psi a_3\vee\psi\bar{d})\wedge(\psi a_5\vee\psi\bar{d})\geq\psi a_2\wedge(\psi\underline{c}\vee\psi a_3)\wedge(\psi\underline{c}\vee\psi a_5)=\psi\underline{c} .$$

Wegen $\underline{c}\wedge\bar{d}=\underline{c}\wedge d$ erhält man $\psi\underline{c}\leq\psi d$, also $\psi c=\psi(\underline{c}\vee d)=\psi d$, womit die Behauptung des Hilfssatzes für endliches D bewiesen ist.

Für einen beliebigen beschränkten, distributiven Verband D wird zunächst gezeigt, daß jede in M_3 geltende Gleichung γ auch in M gilt. Sei E eine endliche Teilmenge von M, die als Bild einer Belegung der Variablenmenge von γ auftritt. Da jedes Element von E in dem Erzeugnis einer endlichen Teilmenge von D und M_3 liegt, gibt es einen endlich erzeugten Unterverband $\underline{D}$ von D mit $0,a_2 \varepsilon \underline{D}$, so daß E im Erzeugnis von ${}_{\underline{D}}M_3$ enthalten ist. Nun ist bekanntlich ein endlich erzeugter, distributiver Verband endlich (vgl. GRÄTZER [1; Theorem 8.1]). Daher ist nach dem Vorangehenden der von ${}_{\underline{D}}M_3$ erzeugte Unterverband von M zu einer subdirekten Potenz von M_3 isomorph, woraus folgt, daß γ bei der betrachteten Variablenbelegung gilt. M liegt somit in der kleinsten gleichungsdefinierten Klasse, die M_3 enthält. Nach JÓNSSON [3; Corollary 3.4] ist in dieser Klasse jeder subdirekt irreduzible Verband mit mehr als zwei Elementen isomorph zu M_3. Folglich ist, da es keinen Homomorphismus von ${}_DM_3$ auf einen zweielementigen Verband gibt, M isomorph zu einer subdirekten Potenz von M_3.

<u>Hilfssatz 2:</u> M sei ein modularer Verband, der von einem relativen Unterverband ${}_DM_3$ erzeugt wird. Dann besitzt jedes Element a in M eine eindeutige Darstellung $a=x_a \vee [(y_a \vee a_3) \wedge (z_a \vee a_5)]$ mit $x_a, y_a, z_a \varepsilon D$ und $x_a \wedge y_a = x_a \wedge z_a = y_a \wedge z_a$; speziell gilt $D=[0,a_2]$.

Beweis: Zunächst soll gezeigt werden, daß

$$N:=\{x\vee((y\vee a_3)\wedge(z\vee a_5))\mid x,y,z\in D \text{ und } x\wedge y=x\wedge z=y\wedge z\}$$

ein Unterverband von M ist. Dazu wird die Gültigkeit folgender Gleichungen für $x,y,z,x',y',z'\in D$ mit $x\wedge y=x\wedge z=y\wedge z$ und $x'\wedge y'=x'\wedge z'=y'\wedge z'$ bewiesen:

$$(\wedge)\quad (x\vee[(y\vee a_3)\wedge(z\vee a_5)])\wedge(x'\vee[(y'\vee a_3)\wedge(z'\vee a_5)]) = (x\wedge x')\vee[((y\wedge y')\vee a_3)\wedge((z\wedge z')\vee a_5)]$$

$$(\vee)\quad (x\vee[(y\vee a_3)\wedge(z\vee a_5)])\vee(x'\vee[(y'\vee a_3)\wedge(z'\vee a_5)]) = x\vee x'\vee((y\vee y')\wedge(z\vee z'))\vee[(y\vee y'\vee((x\vee x')\wedge(z\vee z'))\vee a_3)\wedge \wedge(z\vee z'\vee((x\vee x')\wedge(y\vee y'))\vee a_5)]$$

Nach Hilfssatz 1 ist M zu einer subdirekten Potenz von M_3 isomorph, so daß die Gleichungen $(\wedge)$ und $(\vee)$ genau dann in M gelten, wenn sie bei jeder Belegung von x,y,z,x',y',z' mit 0 oder a_2 in M_3 gelten.

Für den Gültigkeitsbeweis in M_3 kann man o.B.d.A. $x'\leq x$ annehmen, da $(\wedge)$ und $(\vee)$ in x und x' symmetrisch sind. Wegen der Bedingung $x\wedge y=x\wedge z=y\wedge z$ müssen, falls nicht $x=y=z=a_2$ gilt, zwei der Variablen x,y,z mit 0 belegt werden (dasselbe gilt für x',y',z').

Damit erhält man folgende Fallunterscheidung:

Fall 1: $x=y=z=0$

Fall 2: $x=y=0,\ z=a_2$

Fall 3: $y=z=0,\ x=a_2$

Fall 4: $x=y=z=a_2$

Fall 2 impliziert aus Symmetriegründen den Fall $x=z=0, y=a_2$.

Fall 1:

$(\wedge)$ $0\wedge(0\vee[(y'\vee a_3)\wedge(z'\vee a_5)])=0$

$(\vee)$ $0\vee(0\vee[(y'\vee a_3)\wedge(z'\vee a_5)])$

$=(y'\vee(x'\wedge z')\vee a_3)\wedge(z'\vee(x'\wedge y')\vee a_5)$ $\quad (x'\wedge y'=x'\wedge z'=y'\wedge z')$

$=(y'\wedge z')\vee[(y'\vee(x'\wedge z')\vee a_3)\wedge(z'\vee(x'\wedge y')\vee a_5)]$

Fall 2:

$(\wedge)$ $[a_3\wedge(a_2\vee a_5)]\wedge[(y'\vee a_3)\wedge(z'\vee a_5)]$ $\quad (x'\leq x=0)$

$=a_3\wedge[(y'\vee a_3)\wedge(z'\vee a_5)]$

$=a_3\wedge(z'\vee a_5)$

$=a_3\wedge((a_2\wedge z')\vee a_5)$ $\quad (z'\leq a_2)$

$(\vee)$ $[a_3\wedge(a_2\vee a_5)]\vee[(y'\vee a_3)\wedge(z'\vee a_5)]$

$=(y'\vee a_3)\wedge(a_3\vee z'\vee a_5)$

$=(y'\vee a_3)$

$=(y'\wedge(a_2\vee z'))\vee[(y'\vee a_3)\wedge(a_2\vee z'\vee a_5)]$ $\quad (y',z'\leq a_2)$

Fall 3:

$(\wedge)$ $a_2\wedge(x'\vee[(y'\vee a_3)\wedge(z'\vee a_5)])$

$=x'\vee(a_2\wedge(y'\vee a_3)\wedge(z'\vee a_5))$ $\quad (x'\leq a_2)$

$=x'\vee(y'\wedge z')$ $\quad (y',z'\leq a_2)$

$=x'$ $\quad (x'\wedge y'=y'\wedge z')$

$=a_2\wedge x'$

$(\vee)$ $a_2\vee(x'\vee[(y'\vee a_3)\wedge(z'\vee a_5)])$

$=a_2\vee[(y'\vee z'\vee a_3)\wedge(z'\vee y'\vee a_5)]$ $\quad (x'\leq a_2; y',z'\in\{0,a_2\})$

$=a_2\vee(y'\wedge z')\vee[(y'\vee z'\vee a_3)\wedge(z'\vee y'\vee a_5)]$

Fall 4:

$(\wedge)$ $1\wedge(x'\vee[(y'\vee a_3)\wedge(z'\vee a_5)])$

$=(a_2\wedge x')\vee[((a_2\wedge y')\vee a_3)\wedge((a_2\wedge z')\vee a_5)]$ $\quad (x',y',z'\leq a_2)$

$(\vee)$ $1\vee(x'\vee[(y'\vee a_3)\wedge(z'\vee a_5)])$

$=1$

$=a_2\vee[(a_2\vee a_3)\wedge(a_2\vee a_5)$

Da $D\subseteq N$ wegen $d=d\vee[(0\vee a_3)\wedge(0\vee a_5)]$ für $d\varepsilon D$ und $a_3,a_5\varepsilon N$ wegen $a_3=0\vee[(0\vee a_3)\wedge(a_2\vee a_5)]$ sowie $a_5=0\vee[(a_2\vee a_3)\wedge(0\vee a_5)]$ gilt, ist die Erzeugendenmenge ${}_DM_3$ in N enthalten, woraus N=M folgt. Jedes Element a in M hat somit die Darstellung $a=x_a\vee[(y_a\vee a_3)\wedge(z_a\vee a_5)]$. Die Eindeutigkeit dieser Darstellung ergibt sich aus

$x_a=a\wedge a_2$

$(*)$ $y_a=([a\wedge a_5]\vee a_3)\wedge a_2$

$z_a=([a\wedge a_3]\vee a_5)\wedge a_2$.

Die Gleichungen von $(*)$ werden folgendermaßen bewiesen:

$x_a=x_a\vee(y_a\wedge z_a)$ $\quad (x_a\wedge y_a=y_a\wedge z_a)$

$=x_a\vee(a_2\wedge(y_a\vee a_3)\wedge(z_a\vee a_5))$ $\quad (y_a,z_a\leq a_2)$

$=(x_a\vee[(y_a\vee a_3)\wedge(z_a\vee a_5)])\wedge a_2$

$=a\wedge a_2$

$y_a=(y_a\vee a_3)\wedge a_2$ $\quad (y_a\leq a_2)$

$=([(y_a\vee a_3)\wedge a_5]\vee a_3)\wedge a_2$

$=([(x_a\vee[(y_a\vee a_3)\wedge(z_a\vee a_5)])\wedge(0\vee[(a_2\vee a_3)\wedge(0\vee a_5)])]\vee a_3)\wedge a_2$ $\quad (\wedge)$

$=([a\wedge a_5]\vee a_3)\wedge a_2$

$z_a=([a\wedge a_3]\vee a_5)\wedge a_2$ analog

(*) liefert auch unmittelbar $D=[0,a_2]$ in M .

<u>Hilfssatz 3:</u> M sei ein modularer Verband, der von einem relativen Unterverband ${}_DM_3$ erzeugt wird. Ist Θ eine Kongruenzrelation von D, dann ist $\bar{\Theta}:=\{(a,b)\in M^2 \mid (x_a,x_b),(y_a,y_b),(z_a,z_b)\in\Theta\}$ eine Kongruenzrelation von M mit $\Theta=\bar{\Theta}\cap D^2$; darüberhinaus wird durch $\Theta\longmapsto\bar{\Theta}$ ein Isomorphismus zwischen den Kongruenzrelationenverbänden von D und M erklärt.

Beweis: Aus $x_{a\wedge c}=x_a\wedge x_c$ und $x_{a\vee c}=x_a\vee x_b\vee[(y_a\vee y_b)\wedge(z_a\vee z_b)]$ sowie den entsprechenden Gleichungen für die anderen Komponenten (siehe ($\wedge$) und ($\vee$)) folgt, daß $\bar{\Theta}$ eine Kongruenzrelation von M ist. $\Theta=\bar{\Theta}\cap D^2$ ist wegen $D=\{a\in M \mid y_a=z_a=0\}$ klar. Für eine Kongruenzrelation Φ von M erhält man aus (*) $\Phi=\overline{\Phi\cap D^2}$. Demnach hat jede Kongruenzrelation Θ von D genau eine Erweiterung auf M, weshalb $\Theta\longmapsto\bar{\Theta}$ ein Isomorphismus zwischen den Kongruenzrelationenverbänden von D und M sein muß.

<u>Beweis des Satzes:</u> Die Äquivalenz von (1) und (2) folgt unmittelbar aus Hilfssatz 2 mit den Gleichungen ($\wedge$) und ($\vee$). Für den Nachweis der Äquivalenz von (2) und (3) wird gezeigt, daß $FM({}_DM_3)$ isomorph ist zu der subdirekten Potenz

von M_3, die aus allen quasi-eigentlichen, stetigen Abbildungen von $S(D)$ in M_3 besteht. Ist ψ ein Homomorphismus von $FM({}_DM_3)$ auf M_3 mit $\psi a_i = a_i \, (i \in \{2,3,5\})$, so ist $P := (\psi^{-1}0) \cap D$ wegen $\psi D = \{0, a_2\}$ ein Primideal von D, das nach Hilfssatz 3 ψ eindeutig bestimmt; für ψ soll deshalb auch ψ_P geschrieben werden. Nach Hilfssatz 1 ist dann $FM({}_DM_3)$ isomorph zu der Potenz von M_3, die aus allen Abbildungen $\hat{a}: S(D) \longrightarrow M_3 \, (a \in FM({}_DM_3))$ mit $\hat{a}(P) = \psi_P a \, (P \in S(D))$ besteht. Somit ist noch zu zeigen, daß die $\hat{a}$ genau die quasi-eigentlichen, stetigen Abbildungen von $S(D)$ in M_3 sind.

Daß für jedes $a \in FM({}_DM_3)$ die Abbildung $\hat{a}$ quasi-eigentlich und stetig ist, folgt mit Lemma 11.4 in GRÄTZER [1] aus

$$
(**) \quad
\begin{aligned}
&\{P \mid \hat{a}(P) \geq a_2\} = \{P \mid x_a \notin P\} \\
&\{P \mid \hat{a}(P) \geq a_3\} = \{P \mid z_a \notin P\} \\
&\{P \mid \hat{a}(P) \geq a_5\} = \{P \mid y_a \notin P\} \\
&\{P \mid \hat{a}(P) = 1\ \} = \{P \mid x_a, y_a, z_a \notin P\} ,
\end{aligned}
$$

was mit Hilfssatz 2 und (*) folgendermaßen nachgewiesen wird:

$$
\begin{aligned}
\hat{a}(P) \geq a_2 &\iff \psi_P a \geq a_2 \\
&\iff a_2 = \psi_P a \wedge a_2 = \psi_P a \wedge \psi_P a_2 = \psi_P (a \wedge a_2) = \psi_P x_a \\
&\iff x_a \notin P
\end{aligned}
$$

$$\hat{a}(P)\geq a_3 \Longleftrightarrow \psi_P a\geq a_3$$
$$\Longleftrightarrow a_3=\psi_P a\wedge a_3$$
$$\Longleftrightarrow a_2=([\psi_P a\wedge a_3]\vee a_5)\wedge a_2=\psi_P(([a\wedge a_3]\vee a_5)\wedge a_2)=\psi_P z_a$$
$$\Longleftrightarrow z_a\notin P$$

$\hat{a}(P)\geq a_5 \Longleftrightarrow y_a\notin P$ analog

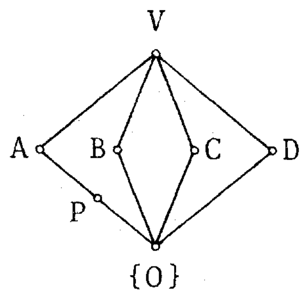
Sei umgekehrt α eine quasi-eigentliche, stetige Abbildung von $S(D)$ in M_3. Dann sind $\alpha^{-1}[a_2)$, $\alpha^{-1}[a_3)$ und $\alpha^{-1}[a_5)$ quasi-kompakte, offene Teilmengen von $S(D)$. Nach Lemma 11.4 in GRÄTZER [1] existieren somit $x,y,z\in D$ mit $\alpha^{-1}[a_2)=\{P|x\notin P\}$, $\alpha^{-1}[a_3)=\{P|z\notin P\}$ und $\alpha^{-1}[a_5)=\{P|y\notin P\}$. Angenommen $x\wedge y\nleq x\wedge z$. Dann gibt es nach Lemma 11.2 in GRÄTZER [1] ein Primideal P von D mit $x\wedge y\notin P$ aber $x\wedge z\in P$, d.h. $x,y\notin P$ aber $z\in P$. Aus $x,y\notin P$ folgt
$P\in\alpha^{-1}[a_2)\cap\alpha^{-1}[a_5)=\alpha^{-1}\{1\}\subseteq\alpha^{-1}[a_3)$, was jedoch $z\in P$ widerspricht. Somit war die Annahme falsch, und es gilt $x\wedge y\leq x\wedge z$. Analog zeigt man $x\wedge z\leq y\wedge z$ und $y\wedge z\leq x\wedge y$, womit $x\wedge y=x\wedge z=y\wedge z$ nachgewiesen ist. Setzt man nun
$a:= x\vee[(y\vee a_3)\wedge(z\vee a_5)]$, so erhält man nach Hilfssatz 2 $x=x_a$, $y=y_a$ und $z=z_a$, was wegen (**) $\alpha=\hat{a}$ zur Folge hat. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Es soll noch angemerkt werden, daß nach dem Satz und Hilfssatz 3 wie zwischen den Kategorien der beschränkten, distributiven Verbände und ihren Stoneschen Räumen (vgl. HOFFMANN

& KEIMEL [2; Theorem 5.23]) eine Dualität zwischen der Kategorie der freien modularen Verbände $FM({}_DM_3)$ mit den Homomorphismen, die M_3 identisch auf sich abbilden, und der Kategorie der Stoneschen Räume $\mathcal{S}(D)$ mit den quasi-eigentlichen, stetigen Abbildungen besteht; ferner sind die Kategorien der beschränkten, distributiven Verbände und der freien modularen Verbände $FM({}_DM_3)$ äquivalent, ja sogar isomorph.

<u>Beispiel:</u> Daß für Verbände der Länge 2 mit mehr als fünf Elementen kein entsprechender Satz wie für M_3 gilt, wird an folgendem Beispiel deutlich: Ist V ein Vektorraum über einem Primkörper mit der Basis e_o, e_1, e_2, e_3 und ist $P:=\langle e_o\rangle$, $A:=\langle e_o,e_2\rangle$, $B:=\langle e_1,e_3\rangle$, $C:=\langle e_o+e_1,e_2+e_3\rangle$ und $D:=\langle e_o-e_3,e_1+e_2\rangle$, so bilden die Untervektorräume $\{0\}$, P, A, B, C, D und V einen relativen Unterverband ${}_3M_4$ des Untervektorraumverbandes von V, der durch folgendes Diagramm dargestellt wird:

${}_3M_4$:



Folgende 1-dimensionale Untervektorräume liegen im Erzeugnis von ${}_3M_4$:

$Q_B := (P+C)\cap B = \langle e_1 \rangle$

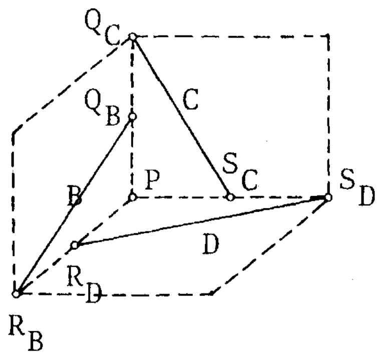
$Q_C := (P+B)\cap C = \langle e_o + e_1 \rangle$

$R_B := (P+D)\cap B = \langle e_3 \rangle$

$R_D := (P+B)\cap D = \langle e_o - e_3 \rangle$

$S_C := (P+D)\cap C = \langle e_o + e_1 + e_2 + e_3 \rangle$

$S_D := (P+C)\cap D = \langle e_o - e_1 - e_2 - e_3 \rangle$



Wegen $V=P+Q_B+R_B+S_C$ und wegen $P+Q_B=P+Q_C=Q_B+Q_C$, $P+R_B=P+R_D=R_B+R_D$, $P+S_C=P+S_D=S_C+S_D$ erzeugt ${}_3M_4$ nach Satz III.2.1 und Satz III.2.4 in MAEDA [4] einen komplementären, einfachen Unterverband der Länge 4, der somit zu einem Untervektorraumverband eines 4-dimensionalen Vektorraumes V' isomorph ist. Da V als Vektorraum über einem Primkörper vorausgesetzt war, muß ${}_3M_4$ folglich den Verband aller Untervektorräume von V erzeugen. Man hat daher unendlich viele Isomorphieklassen subdirekt irreduzibler, modularer Verbände, die von einem homomorphen Bild von ${}_3M_4$ erzeugt werden.

L i t e r a t u r :

[1] G. Grätzer: Lattice theory. First concepts and distributive lattices. San Francisco: Freeman 1971.

[2] K.H. Hoffmann, K. Keimel: A general character theory for partially ordered sets and lattices. Memoirs Amer.Math.Soc. 122 (1972) pp. 119.

[3] B. Jónsson: Algebras whose congruence lattices are distributive. Math.Scand. 21 (1967), 110-121.

[4] F. Maeda: Kontinuierliche Geometrien. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1958.

[5] E.T. Schmidt: Kongruenzrelationen algebraischer Strukturen. Math. Forschungsber. XXV. Berlin: Verlag der Wissenschaften 1969.

[6] R. Wille: On free modular lattices generated by finite chains. Algebra Universalis (im Druck).

Technische Hochschule Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Arbeitsgruppe Allgemeine Algebra