劳尔 · 伯乐与伯乐–陈类

汝 敏

汝敏, 美国休斯敦大学数学系教授。研究方向为复分析、丢番图逼近和微分几何。

匈牙利人伯乐 (Raul Harry Bott, 1923—2005) 是 20 世纪杰出的几何学家之一。“伯乐” 是他多年前使用的中文名字, 甚得他的喜爱。图中是 19 岁的伯乐, 英俊潇洒, 充满才气。老年的伯乐, 留着大胡子, 非常幽默, 和蔼可亲; 说话大声, 远远的走廊里就可以听到笑声; 看起来像圣诞老人。

伯乐是陈省身先生的老朋友, 也是合作者。俩人的名字因著名的 “伯乐–陈类” (Bott-Chern Class, 也被称为 “第二示性类”) 而联系在一起。伯乐–陈类是一种改进的陈示性类, 在奈旺林纳 (Nevanlinna) 理论、复几何与代数几何、阿拉克洛夫 (Arakelov) 理论, 以及现代数论中有着广泛而重要的应用。伯乐对于当代数学有着杰出的贡献, 他因此获得了美国数学会的维布伦奖 (1964), 古根海姆学者奖 (1976), 美国科学奖章 (1987), 美国数学会的斯蒂尔终身成就奖 (1990), 以及沃尔夫数学奖 (2000)。关于伯乐生平有很多介绍文章 (参见文献 [3])。本文将主要依据他们的合作文献[1], 简单介绍伯乐–陈类的概念及其在奈旺林纳理论中的应用。以此来纪念陈省身先生以及他与伯乐的合作。

伯乐–陈类

伯乐和陈省身的文章[1]原意在于推广奈旺林纳理论。本文先对奈旺林纳理论 (也称为值分布理论) 作一个简单的介绍。

因为了解有关历史能够帮助对数学的理解, 我们先从著名的代数基本定理谈起 (Peter Rothe, 1608)。此定理告诉我们: 对于任何一个复多项式 $P(z)$, 它的次数等于其零点计重数个数。我们也可以理解为 $P(z)=a$ (或 $P(z)-a=0$) 得到如此结论: 对于每个复数 a, $P(z)$ 的 a-点计重数的个数等于 P 的次数。换句话说, 多项式有着 "均值分布" 的性质! 后来的研究发现, 此 "均值分布" 的性质对于一般的紧黎曼面 (例如球面和环面等) 上的亚纯函数仍然成立。于是, 自然有了进一步的问题: 一个非紧黎曼面上的亚纯函数是否也具有相同的"均值分布" 性质? 奈旺林纳理论始于对此问题的研究。该理论说, 若该非紧黎曼面和紧黎曼面 "相差不远", 则答案 "基本上" 是肯定的。

再回到关于紧黎曼面 M 上亚纯函数的 "均值分布"。先对这样的函数 $f: M\to\mathbb{C}$ 有一个新的理解: 考虑函数的图像 $\mathrm{gh}(f)=\{(z,f(z))\,|z\in M\}\subseteq M\times\mathbb{C}$, 我们可以把 f 等同于 $\hat{f}: M\to\mathrm{gh}(f)\subseteq M\times\mathbb{C}$, 这里 $\hat{f}$ 称为 "截影", $M\times\mathbb{C}$ 称为平凡线丛。其 "线丛" 名称的来历是因为 $M\times\mathbb{C}$ 由集合 $\{p\}\times\mathbb{C}$ 的并所组成, 这里每个 $\{p\}\times\mathbb{C}$ 是一条位于 p 点之上的复直线 (称为 p 上的纤维)。我们也可以考虑 M 上的一般 (非平凡) 线丛 L, 它局部地 (在$U\subseteq M$ 上) 类似于平凡线丛 $U\times\mathbb{C}$, 整体上则由所谓的连接函数把每块 $U\times\mathbb{C}$ 连接起来。线丛是现代数学中一个非常重要和基本的概念和工具。运用上述关于函数与 $M\times\mathbb{C}$ 截影概念等同的新观点, 自然地会去研究紧黎曼面 M 上埃尔米特全纯线丛 (L,h) 的全纯截影 s 的 "均值分布" 性质。答案也是肯定的。事实上, 截影 s 在 M 上的零点计重个数也是一个与 s 的选取无关的固定整数 (相当于多项式情形中的多项式次数), 此数被称为 "陈 (省身) 数"。确切地说, 它等于第一陈形式 $c_1(L,h)$ 在 M上的积分。什么是 $c_1(L,h)$? 它等于$\dfrac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta$, 其中 Θ 是曲率形式。它是 M 上一个整体闭的、实 $(1,1)$ 形式。它表示了 $H^2(X,\mathbb{R})$ 上的一个示性类 (叫做 "陈类")。所以, 第一陈形式 $c_1(L,h)$ 具有重要的几何和拓扑意义。

奈旺林纳理论则是上述理论的超越 (非紧情况) 的推广。例如, 考虑全纯映射 $f:\mathbb{C}\to M$, 这里 M 是任意一个 n 维复流形。在 M 上给出埃尔米特全纯线丛一个全纯截影 s 后, 我们可以研究由 f 拉回后的截影 f^*s 的零点分布情况。奈旺林纳理论告诉我们, 它"基本上" 具有 "均值分布" 的性质。简单地说, 在复平面上每一个半径为 (足够大) r 的圆盘内, 映射 f 的增长 (相当于多项式情形中的多项式次数), 不见得与 f^*s 的零点相同, 但它们的差可由一个记为 $m_f(r,f^*s=0)$ 的边界项来表示。这一结果被称为奈旺林纳理论中的 "第一基本定理"。一个艰巨的任务是如何控制 $m_f(r,f^*s=0)$ 的大小。此类定理被称为奈旺林纳理论中的 "第二基本定理", 其一般情况至今仍未被证明。在 $M=\mathbb{P}^1$ 的情况下, 奈旺林纳在 1929 年证明了, 对于 $\mathbb{P}^1$ 中 $a_1,\cdots,a_q$ 个不同点, $\sum\limits_{j=1}^{q} m_f(r,a_j)\leqslant 2T_f(r)+O(\log T_f(r))$, 除了一个有限测度集以外, 对所有的 $r\in(0,+\infty)$ 成立。H. 嘉当 (H. Cartan)

(1933) 和阿尔福斯 (L. Ahlfors) (1941) 将此结果推广到了在 $\mathbb{P}^n$ 中全纯曲线与超平面相交的情况。外尔父子 (H. and J. Weyl) (1943) 则把阿尔福斯的证明推广到黎曼面。后来该理论又被推广到抛物流形。

在陈先生的主要工作中, 他一直强调分析中的几何方面。陈先生注意到, 奈旺林纳的上述两个基本定理的几何本质只在于将高斯–博内定理分别应用于 $\mathbb{P}^1$ 上的霍普夫丛与典型丛上。奈旺林纳的结果可由此加上一些微积分型的不等式推出。在文献 [2] 中, 这些观点得以将奈旺林纳的结果推广到由从非紧黎曼面到紧黎曼面的全纯映射上。由于能够运用高斯-博内定理 (陈先生的 "高维高斯–博内定理" 的证明, 是他一生最杰出的工作之一), 陈先生自然对奈旺林纳理论发生了浓厚的兴趣。

一个自然的研究问题是将第一基本定理推广到关于埃尔米特全纯向量丛上的全纯截影的零点分布。这里的向量丛类似于线丛, 只是每点 p 上的纤维不再是直线, 而是一个复向量空间。这是伯乐–陈在文献 [1] 中所致力于研究的。事实上, 在上述证明第一基本定理中, 一个关键处在于第一陈形式 $c_1(L,h)$ 可由 $-\log\|s\|^2$ (称为位势) 来表示。即在M–{s的零点} 上, $c_1(L,h)=dd^c\left(-\log\|s\|^2\right)$。于是, 运用斯托克斯定理就能导出第一基本定理。同样地, 在向量丛的研究中, 位势的存在性甚为关键。伯乐–陈证明了下面的结果[1]:

> 设 M 为一个 n 维复流形, (E,h) 是秩为 n 的埃尔米特全纯向量丛。对任何 E 的全纯截影 s, 可找到一个 M 上的 $(n-1,n-1)$-形式 ρ, 使得 E 的第 n 个陈形式在 $M-(s$ 的零点$)$ 上由 $c_n(E)=dd^c\rho$ 给出。并且, 如 (E,h) 的曲率是正的 (在特定的意义下), 则可取 $\rho\geqslant 0$。

由此, 描述关于全纯向量丛的全纯截影的零点分布的第一基本定理得以证明。

需要指出的是, 作为一个副产品, 上述结果的证明也给出了下面的有用结论:

> 设 E 为全纯向量丛, 且假设 h 和 h' 为 E 上的两个埃尔米特度量。则存在 λ, 使得 $c(E,h)-c(E,h')=dd^c\lambda$。

这里的 λ 就称为"伯乐–陈类", 或称为第二示性类。换言之, 伯乐–陈形式简单地刻画了两个陈形式 (相对于不同度量) 的差异。

这一类结果当然是非常重要和有用的。例如, 它已经成为阿拉克洛夫 (Arakelov) 理论研究的一个非常有效的工具。

伯乐–陈以后的奈旺林纳理论

伯乐和陈的工作[1], 以及陈先生的先前工作, 奠定了奈旺林纳理论几何化的基础, 大大促进了该理论的现代发展。事实上, 格里菲思 (Griffiths) 与他的合作者在 1970 年代初做出了一系列重要的工作。特别是卡尔森 (Carlson)–格里菲思以及格里菲思–金 (King) 在全纯映照 $f:\ M \to N$ 满足 $\operatorname{rank} f = \dim N$的条件下, 证明了第二基本定理, 此处 M 是格里菲思–金意义下的抛物流形, N 是任意的紧复射影流形。需要指出的是, 在近 25 年中, 由于奈旺林纳理论与丢番图逼近论之间的相似关系被沃伊塔 (P. Vojta) 等数学家发现, 这个古老的理论又一次吸引了一批优秀数学家。这个领域的研究又在继续向前发展, 这也许会使陈先生感到欣慰的。

参考文献

[1] Bott, R. and Chern, S. S. Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeroes of their holomorphic sections. Acta Math. 114. 1965, 71–112.

[2] Chern, S. S. Complex analytic mappings of Riemann surfaces I, American J. of Math. 82(1960), 323–337.

[3] Tu, Loring W. The life and works of Raoul Bott, Notices Amer. Math. Soc. 53(2006), no. 5, 554–570.

[4] Wu, H.: Shiing-shen Chern: 1911—2004, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) 46(2009), no. 2, 327–338.