

# TD d'Analyse Complexe

## Prépa-Agreg ENS Cachan

Nicolas Charon

6 février 2013

### 1 Fonctions de la variable complexe :

#### 1.1 Différentiabilité, $\mathbb{C}$ -dérivabilité : [2], Chapitre 2

**Définition :** (*Différentiabilité*)

Soit  $U$  un ouvert du plan complexe et  $f$  une fonction de  $U$  dans  $\mathbb{C}$ . Soit  $z_0$  un point de  $U$ , on dit que  $f$  est différentiable en  $z_0$  s'il existe deux nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que, quand  $z \rightarrow z_0$  :

$$f(z) = f(z_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0) + o(|z - z_0|)$$

Avec  $z = x + iy$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0$ .

Remarque : L'écriture  $z = x + iy$  permet de voir la fonction  $f$  comme une fonction définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  en définissant  $\tilde{f}(x, y) = f(x + iy)$ . Dire que  $f$  est différentiable au sens précédent est équivalent à dire que  $\tilde{f}$  est différentiable au sens usuel des fonctions définies sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . On confondra par la suite ces deux fonctions.

Si  $f$  est différentiable en  $z_0$  on voit que le taux d'accroissement

$$\frac{f(x + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{x - x_0}$$

tend vers  $a$  quand  $x$  tend vers  $x_0$ .  $f$  admet donc une dérivée partielle en  $z_0$  par rapport à  $x$  et celle-ci vaut  $a$  (en toute rigueur c'est  $\tilde{f}$  qui admet une dérivée partielle en  $(x_0, y_0)$ ). On notera donc celle-ci  $\frac{\partial f}{\partial x}$  (et de manière analogue  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ).

La notion de différentiabilité des fonctions définies sur un ouvert de  $\mathbb{C}$  est stable par combinaison linéaire, multiplication, quotient (lorsque le numérateur ne s'annule pas) et la composition (lorsque celle-ci a un sens).

**Attention :** Si la différentiabilité implique l'existence de dérivées partielles, la réciproque n'est pas vraie! Il faut exiger la continuité des dérivées partielles pour être sûr d'avoir la différentiabilité. Contre-exemple :

$$f : z \mapsto \frac{z^2 - \bar{z}^2}{z\bar{z}}$$
$$\mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$$

prolongée par 0 en 0 admet des dérivées partielles nulles en 0 mais n'est pas différentiable en ce point.

**Définition : ( $\mathbb{C}$ -dérivabilité)**

Soit  $U$  un ouvert du plan complexe et  $f$  une fonction de  $U$  dans  $\mathbb{C}$ . Soit  $z_0$  un point de  $U$ . On dit que  $f$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $z_0$  si le rapport  $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$  admet une limite, notée  $f'(z_0)$ , lorsque  $z$  tend vers  $z_0$ ,  $z \in U$  et  $z \neq z_0$ . Autrement dit on a l'égalité suivante, lorsque  $z \rightarrow z_0$  :

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)$$

Comme on va le voir plus bas, la  $\mathbb{C}$ -dérivabilité est un critère beaucoup plus fort que la simple différentiabilité. Observons déjà comment, parti d'une fonction différentiable, on peut espérer construire une fonction  $\mathbb{C}$ -dérivable.

On sait que  $f$  s'écrit au voisinage de  $z_0 = x_0 + iy_0$  :

$$f(z) = f(z_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0) + o(|z - z_0|) \tag{1.1}$$

Ce qui s'écrit également :

$$f(z) = f(z_0) + \frac{a - ib}{2}(z - z_0) + \frac{a + ib}{2}(\bar{z} - \bar{z}_0) + o(|z - z_0|) \tag{1.2}$$

D'où la notation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &:= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &:= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Et la proposition :

**Proposition :**

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $z_0$  un point de  $U$  et  $f$  une fonction de  $U$  dans  $\mathbb{C}$ . Se valent :

- (i)  $f$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $z_0$ .
- (ii)  $f$  est différentiable en  $z_0$  et on a :  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$  et  $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'(z_0)$
- (iii)  $f$  est différentiable en  $z_0$  et on a :  $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = f'(z_0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = if'(z_0)$ . En particulier on a les relations de Cauchy-Riemann (en notant  $f = f_1 + if_2$ ), liant les quatre nombres réels suivants :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} &= -\frac{\partial f_2}{\partial x} \end{aligned}$$

Remarque :

- Une autre propriété équivalente est le fait que la différentielle de  $f$  soit une similitude directe. Mieux vaut alors écrire cette condition sur  $\tilde{f}$  et traduire la similitude en terme matriciel.
- Les conditions de Cauchy-Riemann ne suffisent pas, à elles seules, à obtenir la  $\mathbb{C}$ -dérivabilité : la différentiabilité est nécessaire. Contre-exemple dans [1], p.103, Ex. 3.2 :

$$\begin{aligned} f : z &\longmapsto e^{-1/z^4} \\ \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C} \end{aligned}$$

prolongée par 0 en 0.

## 1.2 Holomorphie, anti-holomorphie : [2], Chapitre 2

### Définition :(Holomorphie)

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $f$  une fonction de  $U$  dans  $\mathbb{C}$ . Si  $f$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en tout point de  $U$ , on dit que  $f$  est holomorphe. L'ensemble des fonctions holomorphes sur  $U$  est noté  $\mathcal{H}(U)$ . On trouve parfois la notation  $\mathcal{O}(U)$ , calquée de l'école italienne où holomorphe se dit *olomorfico*. Dans le cas où  $U = \mathbb{C}$ , on dit que  $f$  est entière.

La proposition précédente conduit facilement à l'équivalence des deux propriétés :

- (i)  $f$  holomorphe sur  $U$ .
- (ii)  $f$  différentiable et  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$  sur  $U$ .

Ce qui invite la définition :

### Définition :(Anti-holomorphie)

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $f$  une fonction de  $U$  dans  $\mathbb{C}$ . On dit que  $f$  est anti-holomorphe sur  $U$  si  $f$  est différentiable sur  $U$  et vérifie :  $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$  sur  $U$ .

Tout comme la différentiabilité, l'holomorphie et l'anti-holomorphie sont des notions stables par combinaison linéaire, multiplication, quotient (lorsque le numérateur ne s'annule pas). Par contre il faut faire attention à la composition (lorsque celle-ci a un sens)! La composée de deux fonctions holomorphes est toujours holomorphe. Par contre la composée de deux fonctions anti-holomorphes devient holomorphe. Le mieux pour s'en souvenir c'est de se rappeler le cas "simple" de la conjugaison. En fait on a la proposition :

### Proposition :

Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $\mathbb{C}$  et  $z_0$  un point de  $U$ . Soient  $f$  une fonction de  $U$  dans  $V$  et  $g$  une fonction de  $V$  dans  $\mathbb{C}$ . On suppose que  $f, g$  sont respectivement différentiables en  $z_0, f(z_0)$ . Alors la composée  $g \circ f$  est différentiable en  $z_0$  et :

$$\begin{aligned}\frac{\partial(g \circ f)}{\partial z}(z_0) &= \frac{\partial g}{\partial z}(f(z_0)) \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(f(z_0)) \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(z_0) \\ \frac{\partial(g \circ f)}{\partial \bar{z}}(z_0) &= \frac{\partial g}{\partial z}(f(z_0)) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(f(z_0)) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}(z_0)\end{aligned}$$

Par ailleurs les propriétés calculatoires de la dérivation se transmettent à la  $\mathbb{C}$ -dérivabilité : dérivation de puissance, de produit, de quotient, de composition (lorsque toutes les fonctions sont holomorphes)...

## 1.3 Séries entières, fonctions analytiques : [1], p.69-70

### Lemme :(Abel)

Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres complexes. Si la suite  $(a_n r^n)$  est bornée pour un certain  $r > 0$ , alors la série  $\sum a_n z^n$  converge normalement sur tout disque  $\bar{D}(0, s)$ ,  $s < r$ .

Ainsi si on pose  $R = \sup\{r \geq 0; (a_n r^n)_n \in l^\infty(\mathbb{N})\}$ , alors la série  $\sum a_n z^n$  converge normalement sur tout compact du disque ouvert  $D(0, R)$ .  $R$  est appelé rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n z^n$ . Ce rayon peut-être estimé par le lemme suivant :

**Lemme :** (*Hadamard*)

Le rayon de convergence  $R$  d'une série entière  $\sum a_n z^n$  est donné par :

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$$

Etant donnée une série entière  $\sum a_n z^n$ , on appelle série dérivée la série  $\sum n a_n z^{n-1}$ . Le lemme précédent permet d'obtenir que la série dérivée possède le même rayon de convergence que la série dont elle provient. On obtient alors la proposition suivante :

**Proposition :**

Toute série entière est holomorphe sur son disque ouvert de convergence. Sa dérivée est donnée par la série dérivée et est également holomorphe. Toute série entière est donc  $\mathbb{C}$ -dérivable une infinité de fois.

Exemple :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

est une série entière de rayon de convergence infini et elle définit donc une fonction entière, l'exponentielle, que l'on note  $\exp(z)$ . L'exponentielle réalise un morphisme surjectif de  $(\mathbb{C}, +)$  dans  $(\mathbb{C}^*, \times)$  et est sa propre dérivée. La surjectivité de  $\exp$  implique sa non injectivité ( $e^\lambda = -1 \Rightarrow 2\lambda \in \text{Ker}(\exp) - \{0\}$ ) et l'égalité  $e^{\bar{z}} = e^z$  implique que  $\exp^{-1}(U) \subset i\mathbb{R}$  et donc  $\text{Ker}(\exp) \subset i\mathbb{R}$ . L'étude des sous-groupes de  $\mathbb{R}$  fournit l'existence d'un réel  $a$  tel que  $\text{Ker}(\exp) = ia\mathbb{Z}$ . Le nombre  $a/2$  est appelé  $\pi$ . On définit également à partir de l'exponentielle les fonctions circulaires et hyperboliques élémentaires. Voir [1] pour le détail de ce qui précède.

**Définition :** (*Fonctions analytiques*)

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ . On dit d'une fonction  $f$  de  $U$  dans  $\mathbb{C}$  qu'elle est analytique si elle est développable en série entière au voisinage de tout point de  $U$ .

Remarque : L'holomorphie étant une propriété locale, la proposition précédente implique que les fonctions analytiques sont également  $\mathbb{C}$ -dérivables une infinité de fois.

## 1.4 Homographies, cercles, droites : [3], p.327

**Définition :**

Soient  $a, b, c$  et  $d$  quatre nombres complexes tels que  $ad - bc \neq 0$ . L'application

$$z \longmapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

est définie sur  $\mathbb{C}$  sauf éventuellement en un point ( $-\frac{d}{c}$  si  $c \neq 0$ ). On appelle homographie les applications de ce type.

Remarque : Le cas  $ad - bc = 0$  conduit à une application non définie ( $c = d = 0$ ) ou constante. Un calcul immédiat permet de voir qu'une composée d'homographies est toujours une homographie. Les homographies sont holomorphes sur leur ensemble de définition.

**Définition :**

On appelle similitude directe (resp. indirecte) une application du type  $z \mapsto az + b$  (resp.  $z \mapsto a\bar{z} + b$ ).

On appelle inversion l'application  $z \mapsto \frac{1}{z}$ .

Les similitudes directes et l'inversion sont clairement des homographies.. et elles permettent de créer toutes les autres !

Pour le voir le plus simple est d'écrire :

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cz + d} \quad (1.3)$$

pour obtenir que toute homographie est la composée de similitudes et de l'inversion.

La décomposition précédente va nous servir à étudier les déformations subies par un cercle ou une droite sous l'action d'une homographie.

Notons  $\mathcal{E}$  l'ensemble des cercles et des droites de  $\mathbb{C}$ .

En décomposant les similitudes directes en translation, rotation, homothétie on voit que celles-ci transforment les cercles en cercles, et les droites en droites. Qu'en est-il de l'inversion ?

Il faut observer que tout élément de  $\mathcal{E}$  est paramétré par une équation du type :

$$\alpha z\bar{z} + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0 \quad (1.4)$$

$$\alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C} \text{ et } \beta\bar{\beta} > \alpha\gamma$$

et que ce type d'équation est "stable" par inversion. Plus précisément on a :

**Proposition :**

*Les homographies laissent globalement  $\mathcal{E}$  invariant au sens suivant : pour toute homographie  $h$ , l'image de l'intersection d'un élément quelconque de  $\mathcal{E}$  avec l'ensemble de définition de  $h$  est l'intersection de l'image de  $h$  avec un élément de  $\mathcal{E}$ .*

Les homographies sont "presque" des bijections de  $\mathbb{C}$  sur  $\mathbb{C}$ . L'homographie

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

est une bijection de  $\mathbb{C} - \{-d/c\}$  sur  $\mathbb{C} - \{a/c\}$  d'inverse (également une homographie) :

$$z \mapsto \frac{dz - b}{-cz + a}$$

Il peut-être intéressant de poser une structure de groupe sur l'ensemble des homographies. Pour ce faire il faut se débarrasser de la contrainte de l'ensemble de définition ; une méthode est de considérer les homographies comme des applications de  $\mathbb{S}^2$  (la sphère de Riemann) dans elle-même.

L'application :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right\}$$

définit alors un morphisme surjectif de  $GL_2(\mathbb{C})$  dans l'ensemble des homographies (définies sur  $\mathbb{S}^2$ ), dont le noyau est l'ensemble des homothéties. Ce point de vue permet d'obtenir d'une autre manière que l'inversion et les similitudes directes engendrent les homographies : la première correspond à la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  qui échange lignes/colonnes et les deuxièmes aux matrices triangulaires supérieures. On obtient ainsi toutes les matrices de transvections et de dilatations élémentaires et on génère bien  $GL_2(\mathbb{C})$ . Le morphisme précédent passé au quotient montre que le groupe des homographies est isomorphe à  $PGL_2(\mathbb{C})$ . Pour approfondir voir [1], p. 302 et suivantes, et aussi [2] pour une définition précise de  $\mathbb{S}^2$  et de sa topologie.

## 1.5 Exercices :

1. Extrait de [4] : soit  $U$  un ouvert connexe et  $f$  une fonction holomorphe sur cet ouvert. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
  - (a)  $f$  est constante sur  $U$ .
  - (b)  $f'$  nulle sur  $U$ .
  - (c)  $\operatorname{Re}(f)$  constante.
  - (d)  $\operatorname{Im}(f)$  constante.
  - (e)  $\bar{f}$  holomorphe sur  $U$ .
  - (f)  $|f|$  constante.
2. (a) Soit  $f$  une fonction holomorphe sur un ouvert  $U$ . On suppose de plus que  $f$  est  $\mathcal{C}^2(U)$  (considérée comme une fonction de deux variables). Prouver que les parties réelles et imaginaires de  $f$  sont harmoniques.
  - (b) Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Pour  $z = x + iy$ , on pose  $P(z) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ . Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur  $(a, b, c)$  pour qu'il existe  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$  telle que  $P = \operatorname{Re}(f)$ .
  - (c) La condition précédente étant supposée remplie, déterminer toutes les fonctions  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$  telles que  $\operatorname{Re}(f) = P$ .
3. Extrait de [5], p.238 : on se propose de démontrer la surjectivité de l'exponentielle sur  $\mathbb{C}^*$  énoncée plus haut, juste à partir de la définition en série entière et de la propriété de morphisme qui s'en déduit. Soit donc  $z$  un complexe non nul.
  - (a) Si  $z \notin \mathbb{R}_-$ , on définit deux chemins pour  $t \in [0, 1]$  :

$$\begin{aligned}\gamma(t) &:= tz + (1-t) \\ \beta(t) &:= -\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} ds\end{aligned}$$

Après avoir vérifié que  $\beta$  était bien défini, prouver que  $\exp(\beta(t))\gamma(t)$  est un chemin constant et en déduire que  $z \in \exp(\mathbb{C})$ .

- (b) Traiter le cas des réels strictement négatifs.
4. En partie extrait de [1], p.304 : on note  $\mathbb{D}$  le disque ouvert unité,  $\mathbb{P} = \{z; \operatorname{Im}(z) > 0\}$  le demi-plan de Poincaré et  $\bar{\mathbb{P}} = \{z; \operatorname{Im}(z) < 0\}$  son image par la conjugaison. On considère l'homographie :

$$h : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

- (a) Vérifier que  $h(\mathbb{P})$  et  $h(\bar{\mathbb{P}} - \{-i\})$  sont des ouverts de  $\mathbb{C} - \{1\}$  (et donc de  $\mathbb{C}!$ ).
- (b) Montrer que  $h(\mathbb{R}) = \partial\mathbb{D} - \{1\}$  et en déduire

$$h(\mathbb{P}) \sqcup h(\bar{\mathbb{P}} - \{-i\}) = \mathbb{C} \setminus \partial\mathbb{D}$$

puis  $h(\mathbb{P})$  par un argument de connexité.

- (c) Soit  $\lambda$  un nombre complexe de module 1 et  $a$  un point de  $\mathbb{D}$ . On considère l'homographie :

$$h_{\lambda,a} : z \mapsto \lambda \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$$

Montrer que  $h_{\lambda,a}(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\mathbb{D}$ . Donner l'expression de l'homographie inverse de  $h_{\lambda,a}$  et en déduire que l'inclusion précédente est en fait une égalité.

Montrer alors que  $h_{\lambda,a}(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$  par connexité et en déduire  $h_{\lambda,a}(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ .

Les homographies du type  $h_{\lambda,a}$  sont appelées transformations de Möbius. En fait elles forment un groupe qui est précisément l'ensemble des automorphismes holomorphes de  $\mathbb{D}$  (cf exercice 4.4.2 n°2).

5. Extrait de [3], p.326 : Pour tout complexe  $z \neq 0$ , on définit l'angle par  $A[z] = \frac{z}{|z|}$ . Si  $f$  est une application définie sur un ouvert  $\Omega$  telle que pour tout  $z_0 \in \Omega$ , il existe un voisinage  $D(z_0, r) \subset \Omega$  pour lequel  $\forall z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ ,  $f(z) \neq f(z_0)$ , on dit que  $f$  conserve les angles en  $z_0$  si la quantité :

$$\lim_{r \rightarrow 0} e^{-i\theta} A[f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)]$$

existe et est indépendante de  $\theta$ .

- (a) Montrer que si  $f'(z_0)$  existe et si  $f'(z_0) \neq 0$  alors  $f$  conserve les angles en  $z_0$ .  
 (b) Réciproquement, on suppose que la différentielle de  $f$  existe en  $z_0$ , qu'elle est non nulle et que  $f$  conserve les angles en  $z_0$ . En partant de l'expression de la différentielle en fonction de  $z$  et  $\bar{z}$  de la page 2, montrer que  $f'(z_0)$  existe et que  $f'(z_0) \neq 0$ . Lorsque  $f$  vérifie cette propriété, on dit aussi que  $f$  est **conforme**.  
 6. On se place dans le disque unité ouvert  $D$ . Soit  $g$  une fonction continue définie sur le cercle unité noté  $T$  et à valeurs réelles.

- (a) On pose :

$$u_g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} g(\cos t, \sin t) dt$$

Montrer que  $u_g$  est holomorphe sur  $D$ .

- (b) En déduire que la fonction

$$v_g(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2} g(\cos t, \sin t) dt$$

est harmonique sur  $D$ .

- (c) En remarquant que

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(u) + r^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{inu}$$

pour  $u \in \mathbb{R}$  (noyau de Poisson) et en utilisant la densité pour la norme uniforme des polynômes trigonométriques dans les fonctions continues  $2\pi$ -périodiques (théorème de Stone ou de Féjer), montrer que la fonction  $H_g$  obtenue en prolongeant  $v_g$  par les valeurs de  $g$  sur le cercle unité est continue sur  $\bar{D}$ .

- (d) Conclure quant à l'existence de solutions au problème de Dirichlet dans le disque unité (c.à.d trouver une fonction harmonique égale à une fonction continue donnée sur le cercle unité).

On peut même démontrer l'unicité de la solution ainsi obtenue. Il va de soi que ces résultats se généralisent sans problèmes à des disques de centre et de rayon quelconque.

## 2 Intégration le long d'un chemin, indice d'un lacet :

### 2.1 Chemin dans $\mathbb{C}$ : [2] p.51-54

C'est essentiellement la même terminologie que pour les courbes du plans.

**Définition :**

On appelle courbe paramétrée (ou chemin) dans  $\mathbb{C}$ , une fonction continue  $\gamma$  (resp.  $\mathcal{C}^1$ , resp continue  $\mathcal{C}^1$ -pm) d'un intervalle  $[a, b]$  dans  $\mathbb{C}$ . Si  $\gamma(a) = \gamma(b)$  on parle de lacet.

**Définition :**

Soit  $\gamma$  un chemin défini sur un intervalle  $[a, b]$ . On appelle changement de paramétrage  $\mathcal{C}^1$  tout  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $[a', b']$  dans  $[a, b]$ . On dit que  $\alpha$  est direct (resp. indirect) si il est strictement croissant (resp. indirect). On peut alors construire un nouveau chemin en posant  $\gamma_1 = \gamma \circ \alpha$ . On dit alors que  $\gamma_1$  est obtenu de  $\gamma$  par changement de paramétrage et que les deux chemins sont  $\mathcal{C}^1$ -équivalents. Si le changement de paramétrage est direct, on dit que les deux chemins sont  $\mathcal{C}^1$ -équivalents de même orientation.

Remarque :

Les deux précédentes relations sont d'équivalence. Tout chemin est  $\mathcal{C}^1$ -équivalent de même orientation à un chemin défini sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

En pratique on utilisera principalement deux types de chemin :

- Les segments : Pour relier un point  $z_1$  à un point  $z_2$  on définit :

$$\gamma : t \mapsto tz_2 + (1-t)z_1$$

- Les arcs de cercles : Pour relier le point  $Re^{i\theta_1}$  au point  $Re^{i\theta_2}$  on définit (on suppose  $\theta_1$  et  $\theta_2$  dans  $[0, 2\pi]$ ) :

$$\gamma : t \mapsto Re^{i(t\theta_2 + (1-t)\theta_1)}$$

### 2.2 Intégrale le long d'un chemin, indice :

**Définition :** [2] p.54-55

Soit un chemin  $\gamma$   $\mathcal{C}^1$ -pm, défini sur  $[a, b]$  à valeurs dans un ouvert  $U$ . Soit  $f$  une fonction continue définie sur  $U$ . La fonction  $f(\gamma(t))\gamma'(t)$  est intégrable sur  $[a, b]$ . On note alors :

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Remarque : Si deux arcs sont  $\mathcal{C}^1$ -équivalents de même orientation, les intégrales correspondantes dans la définition précédente sont égales. L'intégration le long d'un chemin ne dépend donc pas du paramétrage mais juste de l'orientation. Le changement de cette dernière produit un signe moins. Dans la suite dès que l'intégration se fera sur un chemin celui-ci sera automatiquement supposé continu,  $\mathcal{C}^1$ -pm.



**Proposition-définition :** [3], p.247

Soit  $\gamma$  un lacet et  $\Omega$  le complémentaire de l'image de  $\gamma$ . Pour  $a \in \Omega$  on définit l'indice de  $a$  par rapport au lacet  $\gamma$  :

$$\text{Ind}_\gamma(a) := \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

La fonction  $\text{Ind}_\gamma(\cdot)$  est une fonction à valeurs entières sur  $\Omega$ , constante sur chaque composante connexe de  $\Omega$  et nulle sur l'unique composante non bornée de  $\Omega$ .

### 2.3 Exercices :

1. Calculer  $\int_{C(z_0, r)} \frac{dz}{z}$  pour  $|z_0| \neq r$ , en développant l'intégrande en série entière.
2. Prouver la proposition concernant les indices de lacets.

Indication : On pose (on suppose que le chemin est défini sur  $[0, 1]$ ) :

$$G(t) = e^{\int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z_0} ds}$$

Montrer que  $\frac{\gamma(t)-z_0}{G(t)}$  est constante et en déduire que  $G(1) = 1$ .

3. Soient  $m, n \in \mathbb{Z}^*$  et  $\gamma_1, \gamma_2$  des lacets de classe  $C^1$  paramétrés sur  $[0, 1]$ . On suppose que  $0 \notin \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$ . Pour  $t \in [0, 1]$ , on pose  $\gamma(t) = [\gamma_1(t)]^m [\gamma_2(t)]^n$ . Calculer  $\text{Ind}_\gamma(0)$  en fonction de  $\text{Ind}_{\gamma_1}(0)$  et  $\text{Ind}_{\gamma_2}(0)$ .

### 3 Théorèmes et formules de Cauchy :

#### 3.1 Le cas étoilé :[2],[3]

On commence par le cas du triangle. On peut également se baser sur des rectangles (suggéré dans [9]).

**Théorème :**(Goursat)

Soit  $T$  un triangle plein fermé, inclus dans un ouvert  $\Omega$  du plan. Soit  $z_0 \in \Omega$  et  $f \in \mathcal{H}(\Omega - \{z_0\}) \cap \mathcal{C}^0(\Omega)$ . Alors on a :

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0$$

**Proposition :**

Soit  $\Omega$  un ouvert étoilé et  $f \in \mathcal{H}(\Omega - \{z_0\}) \cap \mathcal{C}^0(\Omega)$ .  $f$  admet une primitive holomorphe, i.e. un élément  $F \in \mathcal{H}(\Omega)$  tel que  $F' = f$ .

**Corollaire :**(Théorème de Cauchy pour les étoilés)

Soit  $\Omega$  un ouvert étoilé et  $f \in \mathcal{H}(\Omega - \{z_0\}) \cap \mathcal{C}^0(\Omega)$ . Alors pour tout lacet  $\gamma$  de  $\Omega$ , on a :

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

**Théorème :**(Formule de Cauchy pour les étoilés)

Soit  $\Omega$  un ouvert étoilé et  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Alors pour tout lacet  $\gamma$  de  $\Omega$ , et  $\xi$  un point en dehors de l'image de  $\gamma$ , on a :

$$f(\xi) \text{Ind}_{\gamma}(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - \xi} dz$$

#### 3.2 Le cas homotope :[2], Chapitre 5

**Définition :**

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Soient  $\gamma_0 : [a_0, b_0] \rightarrow U$  et  $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow U$  deux chemins. On dit qu'ils sont homotopes au sens des chemins dans  $U$  si sont définis sur le même intervalle, ( $a = a_0 = a_1$ ,  $b = b_0 = b_1$ ) s'ils ont même origine et même extrémité et si il existe une application continue  $h$  de  $[a, b] \times [0, 1]$  dans  $U$  vérifiant :

- Pour tout  $t \in [a, b]$ , on a :

$$\begin{aligned}\gamma_0(t) &= h(t, 0) \\ \gamma_1(t) &= h(t, 1)\end{aligned}$$

- Pour tout  $\theta \in [0, 1]$ , on a :

$$\begin{aligned}\gamma_0(a) &= \gamma_1(a) = h(a, \theta) \\ \gamma_0(b) &= \gamma_1(b) = h(b, \theta)\end{aligned}$$

On définit de manière tout à fait analogue l'homotopie au sens des lacets : on impose que les deux lacets aient les mêmes extrémités et qu'à chaque instant  $\theta$ , l'homotopie définisse un lacet de mêmes extrémités.

On a alors le résultat suivant :

**Théorème :** (*Théorème de Cauchy Homotope*)

Soient  $U$  un ouvert et  $f \in \mathcal{H}(\Omega - \{z_0\}) \cap \mathcal{C}^0(\Omega)$ . Soient  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux courbes de  $U$  homotopes au sens des chemins. Alors on a :

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

**Définition :**

Un ouvert de  $U$  de  $\mathbb{C}$  est dit simplement connexe si il est connexe par arcs et si tout lacet tracé dans  $U$  est homotope au sens des lacets à un point (lacet constant).

Une application immédiate du théorème précédent conduit à :

**Proposition :**

Soit  $U$  un ouvert simplement connexe et  $f \in \mathcal{H}(\Omega - \{z_0\}) \cap \mathcal{C}^0(\Omega)$ . Soit  $\gamma$  un lacet et  $\gamma_1, \gamma_2$  deux chemins de mêmes extrémités. On a :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= 0 \\ \int_{\gamma_1} f(z)dz &= \int_{\gamma_2} f(z)dz \end{aligned}$$

Remarque : Ces dernières formules peuvent aussi se résumer en disant que la forme différentielle complexe  $f(z)dz$  est fermée dans l'ouvert simplement connexe  $U$ . C'est notamment l'approche qui est adoptée dans [6].

**Théorème :** (*Formule de Cauchy homotope*)

Soit  $\Omega$  un ouvert simplement connexe et  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Alors pour tout lacet  $\gamma$  de  $\Omega$ , et  $\xi$  un point en dehors de l'image de  $\gamma$ , on a :

$$f(\xi) \text{Ind}_{\gamma}(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - \xi} dz$$

### 3.3 Exercices :

1. *Primitive d'une fonction holomorphe sur un simplement connexe et applications :*

- $U$  un ouvert simplement connexe.  $f$  continue sur  $U$ , holomorphe sauf éventuellement en un point. Prouver que  $f$  admet une primitive.
- Etablir une relation entre le laplacien et les opérateurs  $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$  lorsqu'on les applique sur une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . Soit  $U$  un ouvert simplement connexe et  $\varphi$  une fonction à valeurs réelles définie sur  $U$ . On suppose que  $\varphi$  est  $\mathcal{C}^2(U)$  et harmonique.

En déduire qu'il existe  $\psi \in \mathcal{H}(U)$  telle que  $\varphi = \text{Re}(\psi)$ .

Remarque : On formule parfois cette dernière propriété en disant que toute fonction harmonique réelle est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe. On peut aussi donner explicitement l'expression de cette fonction holomorphe à partir des intégrales de Poisson (cf 1.5 exercice 6).

- Application ([4] p.162) : Soit  $U$  un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$ ,  $u$  une fonction réelle harmonique non constante sur  $U$  et  $Z = \{z \in U / \frac{\partial u}{\partial x}(z) = \frac{\partial u}{\partial y}(z) = 0\}$ .

Montrer, en utilisant le résultat précédent et le théorème des zéros isolés, que  $Z$  est discret.

2. Soit  $a$  un réel strictement supérieur à 1. Calculer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \sin(t)} dt$$

en utilisant le théorème de Cauchy pour le cercle unité sur une fonction holomorphe bien choisie et le calcul de l'indice d'un point pour le cas du cercle.

3. (a) Prouver que la fonction  $\frac{\sin(t)}{t}$  n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .  
 (b) Prouver la semi-convergence de l'intégrale associée :

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Indication : [8], p.786 : On utilisera la formule de Cauchy pour la fonction  $f : z \mapsto \frac{e^{iz}}{z}$ . Le contour à utiliser est un demi-cercle centré en l'origine (dont le rayon tendra vers l'infini) du plan  $\{Im(z) \geq 0\}$  auquel on a enlevé un demi-cercle concentrique (dont le rayon tendra lui vers 0).

4. *Théorème de Brouwer en dimension 2* : On note  $B$  le disque unité fermé de  $\mathbb{C}$  et  $S$  le cercle unité. Soit  $F : B \rightarrow B$  une application continue. On suppose par l'absurde que  $F$  n'admet pas de point fixe dans  $B$ .

- (a) Montrer qu'il existe alors une rétraction continue de  $B$  sur  $S$ , i.e une application continue  $G : B \rightarrow S$  telle que  $G|_S = id_S$ .  
 (b) Pour  $s, t \in [0, 1]$ , on note :

$$\gamma_s(t) = G(s \cos(2\pi t), s \sin(2\pi t))$$

Montrer que  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  sont deux lacets homotopes dans  $\mathbb{C}^*$  et calculer leurs indices respectifs par rapport à l'origine. Conclure.

## Références

- [1] É. Amar, É. Matheron. Analyse complexe.
- [2] P. Vogel. Fonctions analytiques.
- [3] W. Rudin. Analyse réelle et complexe (3ème édition).
- [4] P. Tauvel. Exercices d'analyse complexe.
- [5] P. Tauvel. Mathématiques pour l'agrégation.
- [6] H. Cartan. Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes.
- [7] J. Bass Cours de Mathématiques, Tome II, 4ième édition.
- [8] Narasimhan Raghavan. Complex Analysis in one variable.
- [9] N. Boccara. Fonctions analytiques.
- [10] C. Zuily, H. Queffélec. Éléments d'analyse (2ème édition).
- [11] I. Stewart. Complex Analysis.
- [12] Agrégation Externe 1991, Mathématiques Générales, B. 3).
- [13] Agrégation Externe 1995, Analyse Numérique, II. 2).
- [14] Agrégation Externe 2002, Analyse et Probabilités, IV, a) - c).
- [15] Marc Briane, Gilles Pagès. Théorie de l'intégration (4ème édition).
- [16] Vincent Beck, Jérôme Malick, Gabriel Peyré. Objectif agrégation

## 4 ολος, μορφη

Le but de cette section est la justification de l'emploi du mot "holomorphe" pour les fonctions décrites jusqu'à maintenant. Celui-ci vient du grec, "holos" (ολος) signifiant entier et "morphe" (μορφη) signifiant forme. Voyons donc pourquoi les fonctions holomorphes ont une forme entière et surtout quelles conséquences peut-on en tirer.

### 4.1 Formule de la moyenne, analyticité :[2], Chapitre 4

Tout commence par un cas particulier de la formule de Cauchy homotope (ou étoilé!) :

**Proposition :**

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $f$  un élément de  $\mathcal{H}(U)$ . Soit  $z_0 \in U$  et  $r$  un réel strict positif tel que l'on ait l'inclusion  $\overline{D}(z_0, r) \subset U$ . Alors on a, pour tout point  $a$  du disque ouvert  $D(z_0, r)$  :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}(z_0, r)} \frac{f(z)}{z-a} dz$$

Dans le cas où  $a = z_0$ , on parle de formule de la moyenne.

Lorsqu'une fonction  $f$  quelconque définie sur  $\mathbb{C}$  à valeurs réelles ou complexes satisfait la formule de la moyenne sur toute boule incluse dans  $U$ , on dit que  $f$  vérifie la *propriété de la moyenne*. C'est donc le cas des fonctions holomorphes mais on peut montrer de façon plus générale que cette propriété caractérise en fait les fonctions harmoniques (cf [6] chap 4). A partir de la proposition précédente on obtient également le théorème suivant :

**Théorème :**

Toute fonction holomorphe sur ouvert  $U$  est analytique sur cet ouvert. En un point  $z_0$ , le rayon de la série entière associée est au moins égal à  $\sup\{r > 0 : \overline{B}(z_0, r) \subset U\}$ .

Remarque : En  $z_0$ , le rayon de convergence de la série entière peut être strictement supérieur à  $\sup\{r > 0 : \overline{B}(z_0, r) \subset U\}$  : considérer  $S(z) = \frac{1}{1-iz}$  pour  $z_0 = 1/2$ .

Exercice : Dédurre de la proposition qui précède que le rayon de convergence de la série entière définissant  $\tan$  en 0 est égal à  $\frac{\pi}{2}$ .

### 4.2 « Holomorphe un jour, holomorphe toujours »

Le théorème précédent (toujours à l'aide de l'étude sur les séries entières) implique que la dérivée d'une fonction holomorphe est toujours holomorphe. Cela permet d'aboutir à quelques propriétés intéressantes des fonctions holomorphes :

**Proposition :**

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ .  $f$ , ainsi que ses parties réelles et imaginaires, sont des fonctions harmoniques.

**Proposition :** [3], p.318

Soit  $\Omega$  un ouvert simplement connexe et  $f$  un élément de  $\mathcal{H}(\Omega)$  ne s'annulant pas sur  $\Omega$ . Alors :

1. Il existe  $g \in \mathcal{H}(\Omega)$  telle que  $f = e^g$ . Une telle fonction s'appelle logarithme complexe de  $f$ .
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  il existe  $g_n \in \mathcal{H}(\Omega)$  telle que  $f = (g_n)^n$ . Une telle fonction s'appelle racine  $n$ -ième de  $f$ .

Remarque : Lorsque  $f$  est la fonction identité sur  $\mathbb{C}$ , on ne peut pas définir le logarithme complexe sur  $\mathbb{C}^*$  tout entier, cet ensemble n'étant pas simplement connexe. On s'en sort en enlevant une demi-droite passant par 0 au plan complexe. En prenant pour cette demi-droite  $\{z \in \mathbb{C}/\operatorname{Re}(z) \leq 0\}$ , on obtient diverses déterminations du logarithme différant d'une constante  $2ik\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . En particulier, celle obtenue en fixant la partie imaginaire entre  $-\pi$  et  $\pi$  s'appelle la **détermination principale** du log (cf [6] chap.1 pour plus de détails).

**Théorème** : (inversion locale holomorphe) [3], p.257

Soit  $\Omega$  un ouvert et  $f$  un élément de  $\mathcal{H}(\Omega)$ . On considère  $z_0 \in \Omega$  tel que  $f'(z_0) \neq 0$ . Il existe un ouvert  $V$  contenant  $z_0$  tel que :

1.  $f$  est injective sur  $V$ .
2.  $W = f(V)$  est ouvert.
3.  $f^{-1}$  est holomorphe sur  $W$ , de dérivée  $\frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

**Proposition** : (Morera) [3], p.251

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $f$  une fonction continue. Se valent :

1.  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ .
2. Pour tout triangle plein  $T$  inclus dans  $\Omega$ ,  $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$ .

### 4.3 Conséquences directes de l'analyticité :

**Proposition** : (Formule de Cauchy pour les dérivées) [2], p.77

Soit  $\Omega$  un ouvert simplement connexe et  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ . Alors pour tout lacet  $\gamma$  de  $\Omega$  homotope à un point, et  $\xi$  un point en dehors de l'image de  $\gamma$ , on a :

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \operatorname{Ind}_\gamma(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - \xi)^{n+1}} dz$$

**Théorème** : (Intégration à paramètre complexe) [1], p.94

Soit  $A$  un borélien de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Soit  $F : \Omega \times A \rightarrow \mathbb{C}$  vérifiant :

- (i) Pour tout  $z \in \Omega$ , l'application  $x \mapsto F(z, x)$  est mesurable.
- (ii) Pour presque tout  $x \in A$ , l'application  $z \mapsto F(z, x)$  est holomorphe dans  $\Omega$ .
- (iii) Pour tout compact  $K \subset \Omega$  il existe une fonction  $u_K \in L^1(A)$  telle que

$$|F(z, x)| \leq u_K(x)$$

pour tout  $z \in K$  et presque tout  $x \in A$ .

Alors la fonction :

$$f(z) = \int_A F(z, x) dx$$

est holomorphe sur  $\Omega$  et toutes ses dérivées s'obtiennent par dérivation sous le signe intégral.

**Théorème** : (Liouville)

Toute fonction entière bornée est constante.

**Théorème :**(Principe des zéros isolés) [3], p.251

Soit  $\Omega$  un ouvert connexe et soit  $f$  un élément de  $\mathcal{H}(\Omega)$ . On pose :

$$Z(f) = \{a \in \Omega \mid f(a) = 0\}$$

Alors soit  $Z(f) = \Omega$ , soit  $Z(f)$  n'a pas de points d'accumulation dans  $\Omega$ . Dans ce dernier cas, à chaque  $a \in Z(f)$  correspond un unique entier positif  $m = m(a)$  tel que ( $\forall z \in \Omega$ ) :

$$f(z) = (z - a)^m g(z)$$

où  $g \in \mathcal{H}(\Omega)$  ne s'annule pas en  $a$ . De plus  $Z(f)$  est au plus dénombrable.

**Corollaire :**(Principe du prolongement analytique)

Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$  et  $f$  un élément de  $\mathcal{H}(\Omega)$ . Se valent :

1.  $f \equiv 0$  sur  $\Omega$ .
2. Il existe  $z_0 \in \Omega$  annulant  $f$  et toutes ses dérivées.
3.  $f$  est nulle sur un ouvert non vide de  $\Omega$ .

Conséquence : L'anneau des fonctions holomorphes sur un ouvert connexe est intègre.

**Proposition :**(Principe du maximum) [6], p.83

Soit  $\Omega$  un ouvert,  $f$  un élément de  $\mathcal{H}(\Omega)$ .

1. Si  $f$  admet un maximum local en un point  $z_0 \in \Omega$  alors  $f$  est constante sur la composante connexe de  $\Omega$  contenant  $z_0$ .
2. Si  $\Omega$  est borné et  $f \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$  alors

$$\sup_{z \in \Omega} |f(z)| = \sup_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$$

Et si  $f$  n'est pas constante, cette borne n'est atteinte que sur le bord.

**Proposition :**(singularités artificielles) [3], p.253

Soit  $\Omega$  un ouvert et  $z_0 \in \Omega$ . On suppose  $f$  holomorphe sur  $\Omega - \{z_0\}$ . Alors  $f$  se prolonge holomorphiquement en  $z_0$  ssi  $f$  est bornée au voisinage de  $z_0$ .

Remarque : On en déduit en particulier que si  $f$  est continue sur  $\Omega$  et  $\mathbb{C}$ -dérivable sauf en un point, alors elle est en fait  $\mathbb{C}$ -dérivable en tout point. Attention! La singularité doit être à l'intérieur de l'ouvert et isolée!

#### 4.4 Exercices :

$\mathbb{D}_R$  désigne le disque ouvert centré en 0 de rayon  $R$ . On note  $\mathbb{D} = \mathbb{D}_1$ .

##### 4.4.1 Dans l'adhérence du cours :

1. Prouver que le théorème de Morera permet (juste) de prouver l'holomorphicité des intégrales à paramètres (sous les hypothèses du théorème concerné).
2. [13], p.227-228 : Prouver que la fonction

$$z \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{itz} e^{-t^2/2} dt$$

est entière.

En déduire la transformée de Fourier de la Gaussienne  $t \mapsto e^{-t^2/2}$  en admettant la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$$

3. Que dire d'une fonction entière dont la partie réelle est bornée ?
4. On pose :

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{k\pi - 1}{k\pi + 1}, \quad k \in \mathbb{N}^* \\ h(z) &= \frac{1+z}{1-z} \end{aligned}$$

Prouver que la fonction  $\sin(h(z))$  s'annule en les  $x_k$ .

Prouver que la suite  $(x_k)_k$  admet un point d'accumulation dans  $\mathbb{C}$ .

Est-ce en contradiction avec le principe des zéros isolés ?

5. Prouver le théorème d'inversion locale holomorphe.
6. Prouver le théorème de d'Alembert-Gauss en une ligne.
7. Prouver que si  $f$  est entière non constante alors  $f(\mathbb{C})$  est dense dans  $\mathbb{C}$ .  
Remarque : *En fait, toute fonction entière non polynomiale prend toutes les valeurs complexes (sauf peut-être une) une infinité de fois : c'est le grand théorème de Picard.*
8. Que dire d'une fonction entière bornée en module par  $C(|z|^N + 1)$  où  $C$  est une constante positive et  $N$  un entier naturel ?

##### 4.4.2 Applications du principe du maximum :

###### Exercice 1 :

1. Prouver, en utilisant l'exercice 3.3.1, qu'une fonction harmonique sur un ouvert vérifie la propriété de la moyenne puis le principe du maximum.
2. En déduire l'unicité de la solution du problème de Dirichlet sur le disque unité (cf exercice 1.5.6).

###### Exercice 2 : Lemme de Schwarz [1], p.156

Soit  $f$  une fonction holomorphe sur le disque unité  $\mathbb{D}$ , à valeur dans  $\overline{\mathbb{D}}$ , nulle en 0.

On a :

1.  $|f(z)| \leq |z|$  sur  $\mathbb{D}$  et  $|f'(0)| \leq 1$ .  
Indication : On écrira  $f(z) = zg(z)$  avec  $g$  holomorphe et on prouvera  $|g| \leq \frac{1}{r}$  sur  $\overline{\mathbb{D}}_r$  pour  $r < 1$ .



2. Si  $|f(a)| = |a|$  pour un certain  $a \neq 0$  ou bien si  $|f'(0)| = 1$  alors  $f(z) \equiv \lambda z$  pour une certaine constante  $\lambda$  de module 1.

**Exercice 3 :** [3], p.298

Pour  $\alpha \in \mathbb{D}$  et  $\phi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$ , on a déjà montré à l'exercice 1.5, n°4 que  $\phi_\alpha$  est une bijection holomorphe de  $\mathbb{D}$  sur  $\mathbb{D}$  telle que  $\phi_\alpha(0) = -\alpha$  et  $\phi_\alpha(\alpha) = 0$ .

1. Montrer que  $\phi'_\alpha(0) = 1 - \alpha^2$  et  $\phi'_\alpha(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha^2}$ .
2. Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{D}$ . On suppose que  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$  est telle que  $f(\alpha) = \beta$  et  $\|f\|_\infty \leq 1$ . Quelle condition obtient-on sur  $|f'(\alpha)|$ ? Pour quelles fonctions  $f$  a-t-on égalité? Indication : *Se ramener au cas où  $f(0) = 0$  en utilisant les fonctions  $\phi_\alpha$ .*
3. En déduire toutes les fonctions holomorphes bijectives sur  $\mathbb{D}$  telles que  $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$  et  $f(\alpha) = 0$ .

**Exercice 4 :** *Inégalité de Borel-Carathéodory* [6], p.112

Soit  $f$  une fonction holomorphe sur un ouvert  $\Omega$  contenant le disque fermé  $\overline{\mathbb{D}_R}$  ( $R > 0$ ). On pose, pour  $0 < r < R$  :

$$A(R) = \sup_{|z|=R} \operatorname{Re}(f(z))$$

$$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$$

1. Montrer que l'on a aussi :

$$A(R) = \sup_{|z| \leq R} \operatorname{Re}(f(z))$$

$$M(r) = \sup_{|z| \leq r} |f(z)|$$

Indication : *Pour  $A(R)$  on étudiera la fonction  $\exp(f(z))$ .*

2. Pour les 4 questions suivantes on suppose  $f$  nulle en 0.
- (a) Prouver que si  $A(R) \leq 0$  alors  $f$  est la fonction nulle. Dans le cas contraire vérifier que la quantité  $2A(R) - f(z)$  ne s'annule pas dans le disque fermé  $\overline{\mathbb{D}_R}$ . Indication : *La même qu'en 1. !*
  - (b) On pose, pour  $z \neq 0$  :

$$g(z) = \frac{f(z)}{z(2A(R) - f(z))}$$

Prouver que  $g$  est holomorphe sur le disque  $\mathbb{D}_R$  épointé de 0 et qu'elle possède une singularité artificielle en 0.

- (c) En déduire que  $g$  est bornée par  $\frac{1}{R}$  sur  $\overline{\mathbb{D}_R}$ .
- (d) Montrer que :

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r} A(R)$$

3. Dans le cas général montrer l'*inégalité de Borel-Carathéodory* :

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)|$$

### 4.4.3 Etude sur le cercle d'incertitude :

#### Exercice 1 : Points singuliers

Soit  $f$  une série entière et  $R$  son rayon de convergence. On dit qu'un point  $z_0$  de  $\partial\mathbb{D}_R$  est régulier si il admet un voisinage sur lequel  $f$  se prolonge holomorphiquement. Dans le cas contraire on dit que  $z_0$  est singulier.

1. [3], p.369 ou [11], p.51 : Prouver que l'ensemble des points singuliers de  $f$  est un fermé non vide.
2. On sait (voir plus haut) que  $f'$  possède le même rayon de convergence que  $f$ . Prouver que les points réguliers de  $f$  et de  $f'$  sont les mêmes.
3. Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence 1. Existe-t-il un lien entre la convergence de la série  $\sum a_n$  et le caractère régulier du point 1 ?

#### Exercice 2 : Cercle de coupure [11], p.57, Ex. 6

On définit par récurrence la suite suivante :

$$(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \begin{cases} \varepsilon_0 = 1 \\ \varepsilon_{2n} = \varepsilon_n \\ \varepsilon_{2n+1} = -\varepsilon_n \end{cases}$$

La série entière  $\sum_{n \geq 0} \varepsilon_n z^n$  possède un rayon de convergence égal à 1. Elle définit sur le disque ouvert unité  $\mathbb{D}$  une fonction holomorphe que l'on note  $f$ .

On se propose de montrer que tous les points du cercle unité sont singuliers pour  $f$ . On parle alors du cercle de coupure de  $f$ .

1. Montrer que  $\forall z \in \mathbb{D}$

$$f(z) = (1 - z)f(z^2)$$

Et en déduire que  $\forall z \in \mathbb{D}$  la suite  $\prod_{p=0}^n (1 - z^{2^p})$  converge vers  $f(z)$ .

2. Soit  $u = \exp\left(\frac{2ik\pi}{2^N}\right)$  un point dyadique ( $k \in \mathbb{Z}$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$ ). Montrer que pour tout  $r \in [0, 1[$  on a :

$$|f(ru)| \leq 2^N (1 - r^{2^N})$$

En déduire qu'aucun point du cercle unité n'est régulier pour  $f$ .

Pour aller plus loin : *Il existe toute une classe de séries vérifiant la propriété précédente, ce sont les séries entières dites lacunaires (à ce sujet, voir notamment [3] p.371). En fait, on peut même montrer que cette situation est générique dans le sens suivant. Si  $\sum a_n z^n$  est une série entière de rayon de convergence 1 alors il existe une suite  $(\phi_n) \in [0, 2\pi[^\mathbb{N}$  telle que le cercle unité soit une coupure pour la série entière  $\sum a_n e^{i\phi_n} z^n$ , ceci étant vrai pour presque toute suite  $(\phi_n)$ . Ce résultat porte le nom de théorème de Steinhaus ([12] p. 541).*

#### 4.4.4 Suites de fonctions holomorphes

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ . On pose  $K_n = \{z \in \Omega : d(z, \Omega^c) \geq 1/n \text{ et } |z| \leq n\}$ . La suite de compacts  $(K_n)$  est croissante pour l'inclusion et recouvre  $\Omega : \Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ .

On définit la notion de **convergence compacte** d'une suite de fonctions  $f_p \in C(\Omega, \mathbb{C})$  par :  $f_p \rightarrow f$  ssi  $f_p$  converge uniformément vers  $f$  sur tout compact de  $\Omega$ , ou de manière équivalente sur tout compact  $K_n$ . On peut vérifier que cette topologie est aussi celle donnée par la distance :

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min \left( 1, \sup_{z \in K_n} |f(z) - g(z)| \right)$$

**Exercice 1 :**  $\mathcal{H}(\Omega)$  est fermé pour la convergence compacte [6], p.144-146

Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions holomorphes sur  $\Omega$  convergeant uniformément sur tout compact de  $\Omega$  vers une fonction  $f$ . Montrer que  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ .

Montrer que la dérivation est continue pour la convergence compacte : la suite des dérivées  $(f'_n)_n$  converge sur tout compact vers  $f'$ .

Remarque : Pour une définition plus précise de la topologie de  $\mathcal{H}(\Omega)$ , on peut aussi voir [1], p.93.

**Exercice 2 :** *Théorème de Montel* [1], p.92-93

Soit  $(f_p)_p$  une suite de fonctions holomorphes telle que, pour tout compact  $K$  de  $\Omega$ , il existe un réel  $C_K$  vérifiant :

$$\sup_{z \in K, p \in \mathbb{N}} |f_p(z)| \leq C_K$$

En utilisant la suite exhaustive de compacte décrite plus haut et le théorème d'Ascoli, prouver que l'on peut extraire de  $(f_p)_p$  une sous-suite convergente pour la convergence compacte. Existe-t-il une norme sur  $\mathcal{H}(\Omega)$  dont la topologie soit celle de la convergence compacte ?

**Exercice 3 :** *Produit infini* [16], [1], p.157-159

On note  $\text{Log}$  la détermination principale du logarithme.

1. Prouver que pour tout  $z \in B(0, 1/2)$ ,  $|\text{Log}(1+z)| \leq 2|z|$
2. Soit  $(g_n)$  une suite de fonctions holomorphes telle que la série  $\sum_n g_n$  converge normalement sur tout compact de  $\Omega$ .  
Soit  $K$  un compact, montrer que pour  $N_K$  suffisamment grand la série

$$\sum_{n \geq N_K} \text{Log}(1+g_n)$$

converge normalement sur  $K$ .

3. En déduire que la suite de fonctions holomorphes :

$$h_n = \prod_{k=0}^n (1+g_k) = \prod_{k=0}^n f_k$$

converge uniformément sur tout compact de  $\Omega$  vers une fonction holomorphe :  $h$ .  
Montrer que l'ensemble des zéros de  $h$  est l'union des zéros de  $f_k := (1+g_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

4. Si aucune des fonctions  $h_k$  ne s'annule montrer que l'on a :

$$\frac{h'}{h} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f'_k}{f_k}$$

Où la série du terme de droite est uniformément convergente sur les compacts de  $\Omega$ .

**Exercice 4 :** *Espace de Bergman* [7], p.78

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $A^2$  l'espace des fonctions  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphes et de carré intégrable. On munit  $A^2$  de la norme  $L^2$  sur  $\Omega$ .

1. Montrer que pour tout disque  $D(a, r)$  inclus dans  $\Omega$  et toute fonction  $f$  holomorphe sur  $\Omega$ , on a :

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(a,r)} f(x+iy) dx dy$$

2. Soit  $K$  un compact inclus dans  $\Omega$  et  $f \in A^2$ . Montrer que :

$$\sup_{z \in K} |f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} d(K, \partial\Omega)} \|f\|$$

3. En déduire que  $A^2$  est un espace de Hilbert et que les fonctions  $\delta_z : f \mapsto f(z)$  sont des formes linéaires continues sur  $A^2$ .

*Cette dernière propriété montre en fait que  $A^2$  est un espace à noyau reproduisant dont le noyau associé est appelé le noyau de Bergman*

#### 4.4.5 Divers :

**Exercice 1 :** *Théorème de Thron*

Soit  $f$  une fonction entière telle que  $f \circ f = \exp$ .

- Quelle est l'image de  $f$ ? En déduire que  $f$  admet un logarithme holomorphe sur  $\mathbb{C}$ . On le note  $g$ .
- Montrer que  $g$  est surjective et  $f$  injective.
- En déduire le *théorème de Thron* : il n'existe pas de fonction entière vérifiant  $f \circ f = \exp$ .

**Exercice 2 :**

Soit  $f$  une fonction entière non constante. On suppose qu'il existe deux constantes réelles positives  $A, B$  et un entier  $n$  tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C} |f(z)| \leq A e^{B|z|^n} \quad [*]$$

- On suppose d'abord que  $f$  ne s'annule pas. Montrer, en utilisant l'inégalité de Borel-Carathéodory, que  $f$  s'écrit  $\exp(P)$  où  $P$  est un polynôme de degré au plus  $n$ .
- En déduire que (dans le cas général) si  $f$  vérifie [\*] : soit  $f$  est surjective, soit  $f$  « rate » un seul point et alors elle prend une infinité de fois tous les nombres complexes comme valeur sauf ce dernier (qu'elle n'atteint même pas).  
Ce résultat est un cas particulier du grand théorème de Picard.

**Exercice 3 :** *Forme locale d'une fonction holomorphe* [2], p.86 et [1], p.243

Soit  $\Omega$  un ouvert connexe et  $f$  un élément de  $\mathcal{H}(\Omega)$  non constant. Soit  $z_0$  un point de  $\Omega$ .

1. Montrer l'existence d'un entier  $k \in \mathbb{N}^*$ , d'un réel  $R > 0$  et d'une fonction  $\varphi \in \mathcal{H}(B(z_0, R))$  tels que  $\varphi'(z_0) \neq 0$  et :

$$\forall z \in B(z_0, R) \quad : \quad f(z) = f(z_0) + \varphi(z)^k$$

2. Montrer que l'on peut trouver un voisinage  $V$  de  $z_0$  et un voisinage  $W$  de  $f(z_0)$  tel que, pour tout  $w \in W$ ,  $w \neq f(z_0)$ , l'équation :

$$f(z) = w$$

admette exactement  $k$  solutions distinctes dans  $V$ . On parle (pour  $k$ ) du degré de  $f$  en  $z_0$ .

3. Dédire de ce qui précède que les éléments de  $\mathcal{H}(\Omega)$  non constants sont des applications ouvertes.
4. Montrer qu'il y a équivalence entre l'injectivité locale de  $f$  en un point et la non nullité de  $f'$  en ce point.
5. En déduire un théorème d'inversion globale holomorphe où l'hypothèse d'inversibilité de la différentielle peut être omise.

**Exercice 4 : Idéaux maximaux de  $\mathcal{H}(\mathbb{D})$**

On définit  $\mathcal{H}^c(\mathbb{D})$  comme l'ensemble des fonctions holomorphes sur  $\mathbb{D}$  et continues sur le disque fermé  $\overline{D}$ . Déterminer les morphismes d'algèbres (non triviaux) de  $\mathcal{H}^c(\mathbb{D})$  dans  $\mathbb{C}$ . En déduire que les idéaux du type  $\{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) / f(a) = 0\}$  pour  $a \in D$  sont des idéaux maximaux de  $\mathcal{H}^c(\mathbb{D})$ .

Indication : On commencera par observer que la fonction  $z \mapsto z$  est envoyée sur un élément de  $\mathbb{D}$ .

**Exercice 5 : Polynômes orthogonaux et base hilbertienne :**

Soit  $(a, b)$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $w : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  une fonction continue telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x^n w(x) \in L^1(]a, b[)$ . L'espace vectoriel :

$$L_w^2 := \{f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{C}; f\sqrt{w} \in L^2(]a, b[)\}$$

muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de la norme associée  $\|\cdot\|_{L_w^2}$  définis par :

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}w(x)dx$$

$$\|f\|_{L_w^2} := \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 w(x)dx}$$

est un espace de Hilbert.

1. Montrer qu'il existe une unique suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\deg(P_n) = n$ ,  $P_n$  est unitaire et orthogonal à  $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ .

Exemples classiques :

*Polynômes de Legendre* :  $]a, b[ = ]-1, 1[$ ,  $w(x) = 1$ .

*Polynômes de Tchebyshev* :  $]a, b[ = ]-1, 1[$ ,  $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

*Polynômes de Hermite* :  $]a, b[ = \mathbb{R}$ ,  $w(x) = e^{-x^2}$ .

*Polynômes de Laguerre* :  $]a, b[ = ]0, +\infty[$ ,  $w(x) = e^{-x}$ .

2. Montrer que si  $]a, b[$  est borné la famille  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base hilbertienne de  $L_w^2$ . C'est donc le cas pour les polynômes de Legendre et Tchebyshev.
3. Quand  $]a, b[$  est non borné il peut arriver que le résultat précédent soit faux : montrer que, pour  $]a, b[ = ]0, +\infty[$ ,  $w(x) := x^{-\ln(x)}$ , la fonction  $f(x) := \sin(2\pi \ln(x))$  appartient à  $L_w^2$  et est orthogonale à  $\mathbb{C}[X]$ .

4. Le but de cette question est de montrer que s'il existe  $C, \alpha > 0$  tels que pour tout  $t \in ]a, b[$ ,  $w(t) \leq Ce^{-\alpha|t|}$ , alors  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base hilbertienne de  $L_w^2$  : c'est le cas pour les polynômes de Hermite et Laguerre.

(a) Soit  $f \in L_w^2$ , orthogonale à  $\mathbb{C}[X]$ . On prolonge  $f$  et  $w$  par zéro hors de  $]a, b[$ .  
Montrer que

$$F(z) := \int_{\mathbb{R}} f(t)w(t)e^{-zt} dt$$

définit une fonction holomorphe sur  $\Omega := \{z \in \mathbb{C}; |\operatorname{Re}(z)| < \alpha/2\}$ .

(b) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $F^{(n)}(0) = 0$ . Conclure.

## 5 Méromorphie, théorème des résidus :

### 5.1 Fonctions méromorphes :

**Théorème-Définition :** (Casorati-Weierstrass) [3], p.253

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et un point  $a \in \Omega$ . Soit  $f \in \mathcal{H}(\Omega - \{a\})$ . Trois cas sont possibles :

1.  $a$  est une singularité artificielle pour  $f$ .
2. Il existe des nombres complexes  $c_1, \dots, c_m$ , où  $m$  est un entier positif et  $c_m \neq 0$  tels que :

$$f(z) - \sum_{k=1}^m \frac{a_{-k}}{(z-a)^k}$$

ait une singularité artificielle en  $a$ . On dit alors que  $f$  a un pôle d'ordre  $m$  en  $a$ . La fraction rationnelle

$$\sum_{k=1}^m \frac{a_{-k}}{(z-a)^k}$$

s'appelle la partie principale de  $f$  au point  $a$  et le coefficient  $a_{-1}$  est le résidu de  $f$  en  $a$ . On le note  $\text{Rés}(f; a)$ .

3. Pour tout  $\delta > 0$  tel que  $B(a, \delta) \subset \Omega$ , l'image de la boule épointée  $B(a, \delta) - \{a\}$  est dense dans  $\mathbb{C}$ . On dit alors que  $f$  a une singularité essentielle en  $a$ .

**Définition :** On appellera fonction méromorphe dans un ouvert  $\Omega$  toute fonction holomorphe sur  $\Omega \setminus S$  où  $S$  est un fermé discret de  $\Omega$ , telle que les singularités de  $f$  aux points de  $S$  soient toutes des pôles. On note  $\mathcal{M}(\Omega)$  l'ensemble des fonctions méromorphes sur  $\Omega$ .

Remarque :

Comme pour les homographies (qui sont un cas particulier de fonctions méromorphes) il peut-être pratique d'attribuer à une fonction méromorphe la valeur  $\infty$  en ses pôles.

### 5.2 Théorème et calcul des résidus :

**Théorème :** ("des résidus")

Soit  $\Omega$  un ouvert  $\mathbb{C}$  et  $\gamma$  un lacet continu  $\mathcal{C}^1$  par morceaux homotope à un point dans  $\Omega$ . Soit  $f \in \mathcal{M}(\Omega)$  et  $S$  l'ensemble de ses pôles. On suppose que  $S \cap \gamma([a, b]) = \emptyset$ . Alors on a :

$$\int_{\gamma} f = 2i\pi \sum_{s \in S} \text{Ind}_{\gamma}(s) \text{Rés}(f; s)$$

La somme précédente faisant intervenir un nombre fini de termes non nuls.

En pratique pour calculer un résidu, il faut essayer de garder à l'esprit les remarques suivantes :

- Si  $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z)$  est nulle,  $a$  est une singularité artificielle.
- Si  $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z)$  est finie non nulle,  $a$  est un pôle d'ordre 1 de  $f$  et la limite précédente n'est autre que le résidu de  $f$  en  $a$ .

Si au voisinage de  $a$  on a l'écriture :

$$f(z) = \frac{u(z)}{v(z)}$$

où  $u$  et  $v$  sont holomorphes,  $v(a) = 0$ ,  $u(a) \neq 0 \neq v'(a)$ , alors on peut également en déduire que  $a$  est pôle d'ordre 1 et le résidu s'écrit :

$$\text{Rés}(f; a) = \frac{u(a)}{v'(a)}$$

- Si  $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^k f(z)$  est finie non nulle pour un certain entier  $k$  non nul,  $a$  est un pôle d'ordre  $k$  de  $f$ . En effet, la fonction  $g(z) := (z - a)^k f(z)$  est (à une singularité artificielle près) holomorphe. On écrit alors, sur un voisinage  $V$  de  $a$  :

$$\begin{aligned} g(z) &= g(a) + (z - a)g'(a) + \cdots + (z - a)^{k-1} \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} + (z - a)^k \overbrace{h(z)}^{\in \mathcal{H}(V)} \\ f(z) &= \frac{g(z)}{(z - a)^k} \\ &= g(a) \frac{1}{(z - a)^k} + g'(a) \frac{1}{(z - a)^{k-1}} + \cdots + \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} \frac{1}{z - a} + h(z) \end{aligned}$$

Si bien que le résidu de  $a$  est donné par  $\frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$ .

Remarque :

- « En général » le monde est bien fait et on a affaire à un pôle d'ordre 1.  $f$  est même *déjà* donnée sous une forme quotientée (non locale) et le calcul du résidu est immédiat.
- Si toutefois on doit calculer le résidu d'un pôle d'ordre multiple, il peut-être plus rapide de le calculer en déterminant le développement en série entière de  $g(z) := (z - a)^k f(z)$ , plutôt que de dériver  $k - 1$  fois cette dernière. En fait cette dernière option est surtout à utiliser lorsque  $f$  est donnée sous la forme d'un quotient  $\frac{g(z)}{(z - a)^k}$ , où  $g$  est une fonction usuelle.

### 5.3 Exercices :

#### 5.3.1 Dans l'adhérence du cours :

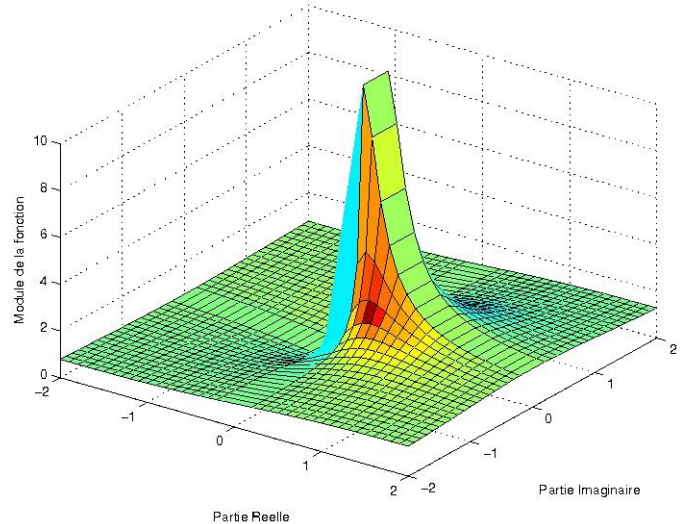
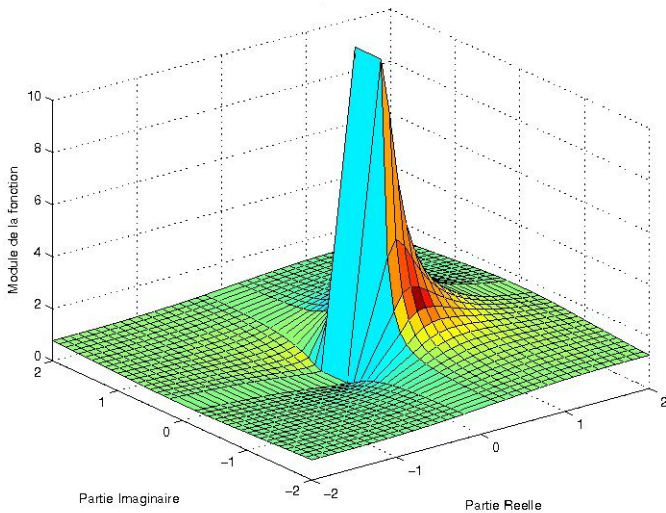
On suppose dans cette partie que  $\Omega$  est connexe.

1. Soit  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  non nulle. Montrer que  $\frac{1}{f} \in \mathcal{M}(\Omega)$ .
2. Toute fonction méromorphe sur un ouvert donné est localement le quotient de deux fonctions holomorphes.

Remarque : *En fait on peut enlever le mot "localement", mais cela nécessite un théorème de Weierstrass. Autrement dit, le corps des fractions de l'anneau (intègre) des fonctions holomorphes sur un ouvert est précisément l'ensemble des fonctions méromorphes sur cet ouvert (à ce sujet, cf [3] chap.15).*

3. Soit  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  non constante, et  $z_0$  un zéro de  $f$ . Montrer que  $z_0$  est un pôle d'ordre 1 pour  $\frac{f'}{f}$  et que son résidu est égal à sa valuation en tant que zéro de  $f$ .
4. Pour  $\delta > 0$ , calculer l'image d'une boule épointée  $B(0, \delta) - \{0\}$  par  $\exp(\frac{1}{z})$  et en déduire le type de singularité que possède cette fonction en 0.





5. Soient  $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$  vérifiant en tout point qui n'est pas un pôle de  $f$  ou  $g$  :

$$|f(z)| \leq r|g(z)|$$

pour un certain réel  $r$  positif. Prouver l'existence d'une constante complexe  $\lambda$  vérifiant :

$$f(z) = \lambda g(z)$$

en tout point qui n'est pas un pôle de  $f$  ou  $g$ .

6. Que dire d'une fonction  $f$ , méromorphe sur  $\mathbb{C}$ , ayant un nombre fini de pôles et tendant en l'infini vers l'infini? Et si  $f$  est holomorphe?

Indication : On prouvera que  $f$  a un nombre fini de zéros et on considèrera  $\frac{1}{f}$ .

### 5.3.2 Trois résultats classiques :

**Exercice 1 :** (Développement de Laurent) [1], p.141-142, [2], p.140

Soit  $f$  holomorphe sur une couronne  $C = \{z \in \mathbb{C}; r_1 < |z - a| < r_2\}$ ,  $a \in \mathbb{C}$ ,  $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$ .

1. Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ , l'intégrale :

$$c_n(r) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

est indépendante du rayon  $r$  choisi dans  $]r_1, r_2[$ . On appelle alors cette quantité (qui ne dépend que de  $n$ ) : le  $n$ -ième coefficient de Laurent de  $f$  au point  $a$ . On le note  $c_n$ .

2. Fixons  $\rho_1, \rho_2$  deux réels vérifiant :  $r_1 < \rho_1 < \rho_2 < r_2$ . Les deux cercles concentriques  $\mathcal{C}(a, \rho_1)$  et  $\mathcal{C}(a, \rho_2)$  sont alors strictement inclus dans  $C$ . Soit  $z_0$  un point strictement compris entre ces deux cercles. Prouver qu'on a l'égalité :

$$\int_{\mathcal{C}(a, \rho_2)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{\mathcal{C}(a, \rho_1)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2i\pi f(z_0)$$

Indication : Considérer la fonction  $z \mapsto \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ .

3. Prouver que les séries  $\sum_{n \geq 0} c_n (z-a)^n$  et  $\sum_{n > 0} c_{-n} (z-a)^{-n}$  convergent normalement sur (respectivement) les compacts du disque ouvert  $D(a, r_2)$  et les ensembles  $\{|z-a| \geq r\}$ , pour  $r > r_1$  et montrer que l'on a pour tout  $z \in C$  :

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n (z-a)^n$$

Remarque :

Le cas de la couronne inclut le cas de la boule épointée. Le développement de Laurent précise donc l'étude faite plus haut au voisinage d'un point singulier. Un tel développement (avec ces conditions de convergence) est unique.

**Exercice 2 :** (*Théorèmes de Rouché et Hurwitz :*) [14] et [15]

1. Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$  et  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  non constante. On suppose que la boule fermée  $\overline{B(a, r)}$  est incluse dans  $\Omega$ . Montrer que si  $f$  ne s'annule pas sur  $\partial B(a, r)$  alors le nombre de zéros de  $f$  dans  $B(a, r)$ , comptés avec multiplicité, est donné par :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial B(a, r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

2. En déduire le théorème de Rouché : sous les hypothèses de la question précédente, si  $g \in \mathcal{H}(\Omega)$  telle que :

$$\forall z \in \partial B(a, r) \quad |g(z) - f(z)| < |f(z)|$$

alors  $g$  et  $f$  ont le même nombre de zéros dans  $B(a, r)$  comptés avec multiplicité.

3. Exemple [4] : Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a \in \mathbb{R}$  avec  $a > e$ . Montrer que  $h(z) = az^n - e^z$  admet  $n$  racines dans  $D(0, 1)$  et qu'elles sont simples.
4. Prouver le théorème de Hurwitz : si  $f$  est la limite (pour la convergence compacte) d'une suite d'éléments de  $\mathcal{H}(\Omega)$  tous injectifs, alors  $f$  est constante ou injective.

### 5.3.3 Calculs !

A chaque calcul d'intégrale on vérifiera d'abord que l'objet manipulé existe bel et bien !

1. On considère

$$f_1(z) = \frac{e^{iz} - 1}{\sin(z)}, \quad f_2(z) = \frac{e^{iz} - 1}{\sin(z) - z} \quad \text{et} \quad f_3(z) = \frac{\cos z}{(z - \pi)^3}$$

Etudier les singularités éventuelles en 0 et  $\pi$ . Dans le cas de pôles, déterminer l'ordre et le résidu associé.

2. [10], p.135 : Étudier la singularité en 0 de

$$f(z) = \frac{\cotan(z) \coth(z)}{z^3}$$

3. Calculer la transformée de Fourier de  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$  en utilisant un contour en forme de demi-lune.

4. [10], p.124 : Pour  $a \in ]-1, 1[$ , calculer l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{\operatorname{ch}(x)} dx$$

en utilisant le contour rectangulaire de sommets  $-R, R, R + i\pi$  et  $-R + i\pi$ .

5. [3] p.269 : Pour  $n$  un entier plus grand que 2, calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n} dx$$

6. [1], p.249 : Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ . On pose :

$$I_\alpha = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x)} dx$$

- (a) Justifier l'existence de  $I_\alpha$ .  
 (b) Trouver la valeur de  $I_\alpha$  en utilisant ( $0 < \varepsilon < 1 < R$ ) le contour  $K_{\varepsilon,R}$  formé du demi-cercle  $C_\varepsilon = \{|z| = \varepsilon \mid \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$  suivi du segment  $I_{\varepsilon,R}^+ = [i\varepsilon, i\varepsilon + \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}]$ , de l'arc de cercle  $\Gamma_{\varepsilon,R} = \{|z| = R \mid \operatorname{Re}(z) \leq 0 \text{ ou } |\operatorname{Im}(z)| \geq \varepsilon\}$  et du segment  $I_{\varepsilon,R}^- = [-i\varepsilon, -i\varepsilon + \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}]$ .

Indication : On utilisera (en le notant  $z \mapsto z^\alpha$ ) l'unique prolongement de la puissance  $\alpha$ -ième sur l'ouvert  $\Omega = \mathbb{C} - \mathbb{R}_+$ . On rappelle que ce prolongement est défini par :  $z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha\theta}$  où  $\theta$  est l'unique argument de  $z$  dans  $]0, 2\pi[$ .

Remarque : On peut également trouver dans [6] chap III.6 une généralisation de ce dernier résultat aux intégrales de fonctions du type  $\frac{R(x)}{x^\alpha}$  pour une certaine classe de fractions rationnelles  $R$ .

## 5.4 La fonction Gamma :

**Exercice 1 : Définition classique :**

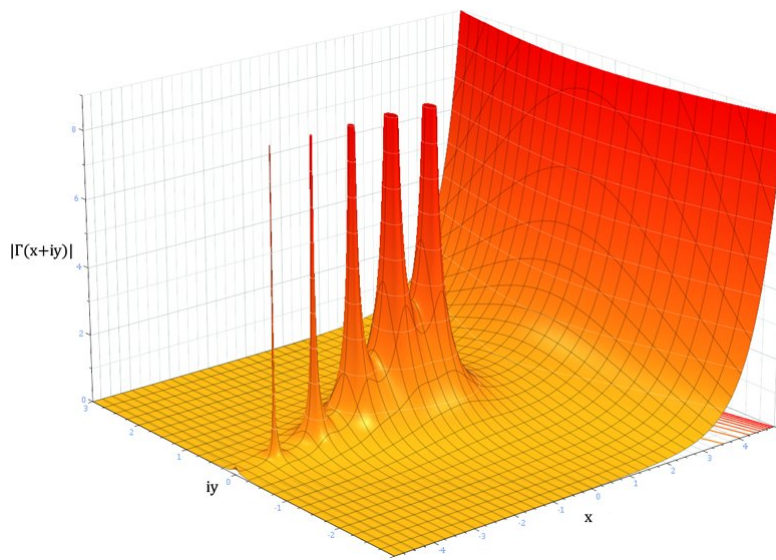
On pose, pour  $\operatorname{Re}(z) > 0$  :

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

- Vérifier que la formule précédente a bien sens sur l'ouvert  $\Omega = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > 0\}$  et qu'elle y définit une fonction holomorphe dont on calculera les dérivées.
- Prouver que pour  $z \in \Omega$ ,  $\Gamma$  vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

- En déduire que  $\Gamma$  admet un prolongement méromorphe à  $\mathbb{C}$  (que l'on note toujours  $\Gamma$ ). Préciser pourquoi ce prolongement est unique et déterminer les pôles et les résidus associés.



**Exercice 2 :** *Formule des compléments* : [1], p.251

On se propose de prouver la formule des compléments à partir de l'intégrale  $I_\alpha$  calculée plus haut. La formule des compléments relie  $\Gamma$  à la fonction sin sur l'ouvert  $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$  par l'équation :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

1. Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ . Prouver l'égalité :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_U \left(\frac{t}{s}\right)^\alpha e^{-(s+t)} \frac{1}{t} ds dt$$

où  $U$  est le quart de plan  $\{(s, t) \in \mathbb{R}^2; s > 0, t > 0\}$ .

2. On rappelle la formule de changement de variable :

**Proposition :** (*Changement de variables*) [17], p.239-240  
 Soit  $\varphi$  un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme entre deux ouverts  $\Delta$  et  $D$  de  $\mathbb{R}^d$ . Alors pour toute fonction intégrable  $f \in L^1(D)$ , on a l'égalité :

$$\int_D f(x) dx = \int_\Delta f(\varphi(u)) |J_\varphi|(u) du$$

En considérant le  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme :

$$\begin{aligned} \varphi : U &\longrightarrow U \\ (t, s) &\longmapsto (u, v) = \left(s + t, \frac{t}{s}\right) \end{aligned}$$

prouver

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = I_{1-\alpha}$$

3. En déduire la formule des compléments et déterminer à partir de celle-ci les zéros de  $\Gamma$ . Que peut-on dire de la fonction  $\frac{1}{\Gamma}$  ?

**Exercice 3 :** (*Une autre écriture de la fonction  $\Gamma$* ) [11] p.306

1. Montrer que :

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(z)$$

où

$$I_n(z) = \int_0^n t^{z-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$

2. Montrer que  $I_n(z) = n^z J_n(z)$  où  $J_n(z)$  est une intégrale à définir, vérifiant ( $n \geq 1$ ) :

$$J_n(z) = \frac{n}{z} J_{n-1}(z+1)$$

3. En déduire la définition de Gauss de la fonction  $\Gamma$  :

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

**Exercice 4 :** (*Une caractérisation de la fonction  $\Gamma$* ) [1], p.170

1. Montrer que la fonction  $\Gamma$  est bornée sur la bande  $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C}; 1 \leq \operatorname{Re}(z) < 2\}$ .
2. Soit  $f$  une fonction holomorphe dans le demi-plan  $\mathbb{P} = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > 0\}$ . On suppose que  $f$  vérifie les propriétés suivantes :
  - (i)  $f(1) = 1$ .
  - (ii)  $f(z+1) = zf(z)$  sur  $\mathbb{P}$ .
  - (iii)  $f$  est bornée sur  $\mathbb{B}$ .On pose  $\varphi = f - \Gamma$ .
  - (a) Montrer que  $\varphi$  se prolonge méromorphiquement puis holomorphiquement à  $\mathbb{C}$ , on note  $\phi$  ce prolongement.
  - (b) Montrer que  $\phi$  est bornée sur la bande  $\{z \in \mathbb{C}; 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$ .
  - (c) En déduire que la fonction  $g : z \mapsto \phi(z)\phi(1-z)$  est constante.
3. Montrer que la fonction  $\Gamma$  est le seul élément de  $\mathcal{H}(\mathbb{P})$  vérifiant les propriétés (i),(ii),(iii).

## 5.5 Automorphismes

On dit que  $f$  est un automorphisme d'un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$  si  $f$  est une bijection biholomorphe de  $\Omega$  dans lui-même.

**Exercice 1 :** (*Automorphismes de  $\mathbb{C}$* ) [1] p.301

Soit  $f$  une application entière et injective.

1. Prouver que la singularité en 0 de  $g(z) := f(1/z)$  n'est pas essentielle.
2. En déduire que  $f$  est polynômiale et conclure.

Remarque : *On a (en particulier) déterminé tous les automorphismes de  $\mathbb{C}$ .*

**Exercice 2 :** (*Automorphismes de  $\mathbb{D}$* ) [1] p.305

On rappelle que les transformations de Möbius (voir le début du TD) sont des automorphismes du disque  $\mathbb{D}$ . On va prouver que ce sont les seuls.

1. Soit  $G$  un groupe agissant sur un ensemble  $X$  et soit  $H$  un sous-groupe de  $G$ . On suppose que l'action de  $H$  (induite par celle de  $G$ ) est transitive et qu'il existe un élément de  $X$  dont le stabilisateur (pour l'action de  $G$ ) soit inclus dans  $H$ . Montrer que  $H = G$ .
2. Soit  $\varphi$  un automorphisme de  $\mathbb{D}$ .
  - (a) Montrer que si  $\varphi$  s'annule en 0 alors  $\varphi$  est une rotation.
  - (b) Soit  $a$  et  $b$  deux points de  $\mathbb{D}$ . Trouver une transformation de Möbius qui envoie  $a$  sur  $b$ .
3. Conclure.

## 5.6 Eulereries sur le sinus

**Exercice 1 :** (*Développement Eulérien du sinus en somme infinie*) [1] p.159

1. Prouver que la série  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$  converge normalement sur tout compact de  $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$  et en déduire qu'elle définit sur l'ouvert précédent une fonction holomorphe  $f$ .
2. Prouver que  $f$  possède un pôle d'ordre 2 en 0. Déterminer le développement asymptotique associé à ce pôle. En remarquant que  $f$  est 1-périodique, en déduire le comportement de  $f$  au voisinage de chaque entier.

3. Faire la même étude pour la fonction  $h : z \mapsto \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2$ .
4. En déduire l'existence d'une fonction entière  $g$  vérifiant pour tout  $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$  :

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} - \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2$$

- (a) Montrer que  $g$  est bornée sur la bande  $\{z \in \mathbb{C}; 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$  et en déduire que  $g$  est constante.
- (b) Prouver que la suite  $(g(ip))_{p \in \mathbb{N}^*}$  tend vers 0.  
Indication : On pourra utiliser le théorème de convergence dominée pour la mesure de comptage sur  $\mathbb{Z}$ .
5. Déduire de ce qui précède la formule d'Euler :

$$\left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

6. On pose :

$$\alpha(z) = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2} - \pi \cotan(\pi z)$$

Après avoir vérifié que l'expression de  $\alpha$  définit une fonction holomorphe sur l'ouvert  $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$ , déduire du développement eulérien du sinus le développement de la cotangente :

$$\pi \cotan(\pi z) = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2}$$

**Exercice 2 :** (Un développement en produit infini) [1] p.161

On utilise dans cet exercice quelques résultats sur les produits infinis (voir plus haut).

1. Montrer que le produit :

$$\pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

définit une fonction entière. On la note  $f$ .

2. En déduire l'expression de la dérivée logarithmique de  $f$  en un point  $z$  non entier :

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2}$$

3. On définit sur  $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$  :

$$u(z) := \frac{f(z)}{\sin(\pi z)}$$

Calculer la dérivée logarithmique de  $u$  et en déduire le développement en produit infini, sur  $\mathbb{C}$  :

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

## 5.7 Représentation conforme et théorème de Riemann :

On notera dans toute la suite  $D$  le disque unité ouvert de  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 1 :** (*Conservation des angles, applications conformes*) [3] p.326 Pour tout complexe  $z \neq 0$ , on définit l'angle par  $A[z] = \frac{z}{|z|}$ . Si  $f$  est une application définie sur un ouvert  $\Omega$  telle que pour tout  $z_0 \in \Omega$ , il existe un voisinage  $D(z_0, r) \subset \Omega$  pour lequel  $\forall z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ ,  $f(z) \neq f(z_0)$ , on dit que  $f$  conserve les angles en  $z_0$  si la quantité :

$$\lim_{r \rightarrow 0} e^{-i\theta} A[f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)]$$

existe et est indépendante de  $\theta$ .

1. Montrer que si  $f$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $z_0$  et  $f'(z_0) \neq 0$  alors  $f$  conserve les angles en  $z_0$ .
2. Réciproquement, on suppose que la différentielle de  $f$  existe en  $z_0$ , qu'elle est non nulle et que  $f$  conserve les angles en  $z_0$ . Montrer que  $f'(z_0)$  existe et que  $f'(z_0) \neq 0$ .

**Définitions :** Si  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $f$  vérifie cette propriété en tout point de  $\Omega$ , on dit que  $f$  est *conforme* sur  $\Omega$ . Lorsque  $f$  est de plus une bijection de  $\Omega$  vers  $\Omega'$ ,  $f$  est appelée une *représentation conforme* ou encore un *automorphisme* de  $\Omega$  dans  $\Omega'$  et ces deux ouverts sont alors dits *conformément équivalents*.

3. Justifier qu'une application holomorphe sur un ouvert  $\Omega$ , bijective est une représentation conforme de  $\Omega$  dans  $f(\Omega)$  (cf résultat de 4.4.4 exercice 3). En déduire que la composée de deux applications conformes est conforme.

**Exercice 2 :** (*Exemples*)

1. Montrer que  $\mathbb{C}$  et  $D$  ne sont pas conformément équivalents.
2. Montrer que  $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$  définit une représentation conforme de  $P = \{z \in \mathbb{C} / \text{Im}(z) > 0\}$  vers  $D$ .
3. Rappeler (cf 5.5 exercice 2) quels sont les automorphismes de  $D$  dans lui-même et justifier qu'étant donné deux points  $a$  et  $b$  dans  $D$ , il existe un automorphisme de  $D$  qui envoie  $a$  sur  $b$ .

**Exercice 3 :** (*Théorème de représentation conforme*) [6] [3]

**Théorème :** *Tout ouvert  $\Omega$  du plan  $\mathbb{C}$ , simplement connexe et distinct de  $\mathbb{C}$  est conformément équivalent à  $D$ .*

1. On commence par réduire le problème au cas où  $\Omega$  est inclus dans  $D$ . Fixons  $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ .
  - (a) Justifier l'existence d'une détermination  $u$  de  $\log(z - a)$  dans  $\Omega$  et montrer que  $u$  est injective.
  - (b) Soit  $z_0 \in \Omega$ . Montrer que  $z \mapsto \frac{1}{u(z) - u(z_0) - 4i\pi}$  est holomorphe, injective et bornée sur  $\Omega$ .
  - (c) Se ramener alors à un ouvert contenu dans  $D$ .
2. On introduit maintenant  $A$ , l'ensemble des applications  $f$  holomorphes injectives de  $\Omega$  à valeurs dans  $D$  telles que  $f(0) = 0$  (non vide grâce à la réduction précédente). On va montrer que si  $|f'(0)|$  est maximum parmi toutes les valeurs qu'il peut prendre lorsque  $f$  parcourt  $A$  alors on a  $f(\Omega) = D$ . Par contraposée, soit  $f \in A$ . Supposons qu'il existe  $a \in D$  tel que  $a \notin f(\Omega)$ .
  - (a) En introduisant la transformation de Möbius  $\phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ , justifier que  $\phi_a \circ f$  est à valeurs dans  $D$  et ne s'annule pas. En déduire qu'il existe  $h$  holomorphe sur  $\Omega$  à valeurs dans  $D$  telle que  $h(z)^2 = \phi_a \circ f(z)$ .
  - (b) Pour  $b = h(z_0)$ , montrer que  $g := \phi_b \circ h$  appartient à  $A$ .

- (c) Observer que  $f = v \circ g$  avec  $v = \phi_{-a} \circ s \circ \phi_{-b}$ , où  $s : z \mapsto z^2$  et montrer que  $v : D \rightarrow D$  n'est pas injective.
- (d) Grâce au lemme de Schwarz (cf 4.4.2 exercice 2), en déduire que  $|v'(0)| < 1$ .
- (e) Conclure.
3. Posons  $\eta = \sup\{|f'(0)|/f \in A\}$ . Il reste donc à prouver que le sup précédent est atteint pour une certaine fonction  $f \in A$ . On considère ainsi une suite  $(f_n) \in A^{\mathbb{N}}$  telle que  $|f'_n(0)| \rightarrow \eta$ .
- (a) Montrer que cette suite satisfait aux hypothèses du théorème des familles normales (4.4.4 exercice 2).
- (b) En déduire qu'on peut extraire de  $(f_n)$  une sous-suite convergeant uniformément sur tout compact vers une fonction  $f$ , holomorphe sur  $\Omega$  et montrer que  $f(\Omega) \subset D$ ,  $f(0) = 0$  et  $|f'(0)| = \eta$ .
- (c) Montrer, grâce au théorème de Hürwitz (5.3.2 exercice 2), que  $f$  est injective.
- (d) Conclusion

## Références

- [1] É. Amar, É. Matheron. Analyse complexe.
- [2] P. Vogel. Fonctions analytiques.
- [3] W. Rudin. Analyse réelle et complexe (3ème édition).
- [4] P. Tauvel. Exercices d'analyse complexe.
- [5] P. Tauvel. Mathématiques pour l'agrégation.
- [6] H. Cartan. Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes.
- [7] A. Chambert-Loir, S. Fremigier. Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 2.
- [8] J. Bass Cours de Mathématiques, Tome II, 4ème édition.
- [9] Narasimhan Raghavan. Complex Analysis in one variable.
- [10] N. Boccara. Fonctions analytiques.
- [11] C. Zuily, H. Queffélec. Éléments d'analyse (2ème édition).
- [12] C. Zuily, H. Queffélec. Analyse pour l'agrégation (3ème édition).
- [13] I. Stewart. Complex Analysis.
- [14] Agrégation Externe 1991, Mathématiques Générales, B. 3).
- [15] Agrégation Externe 1995, Analyse Numérique, II. 2).
- [16] Agrégation Externe 2002, Analyse et Probabilités, IV, a) - c).
- [17] Marc Briane, Gilles Pagès. Théorie de l'intégration (4ème édition).